

MATHÉMATIQUES DISCRÈTES

MAD 23-24

EXAMEN

NOM ET PRÉNOM : _____

Durée : 60 minutes

- ▷ Le seul moyen auxiliaire autorisé est le formulaire distribué en classe.
- ▷ La machine à calculer n'est pas autorisée. Les téléphones portables, les tablettes, les ordinateurs ainsi que tous vos appareils connectés doivent être éteints et rangés.
- ▷ La solution de **chaque problème** doit être présentée sur **une feuille différente** et votre nom doit être écrit **lisiblement** sur chaque feuille.
- ▷ Expliquer/commenter vos démarches de résolution, simplifier vos réponse, respecter les notations du cours, présenter clairement vos solutions et soigner votre rédaction. Ces éléments font également partie des critères d'évaluation de vos réponses.

Problème 1 (10 pts)

Soient l'ensemble $S = \{0, 1, \dots, 999\}$ des entiers naturels inférieurs à mille et son ensemble des parties $\mathcal{P}(S)$. Sur cet ensemble des parties on considère la relation R définie par

$$X R Y \iff |X| - |Y| \leq 1$$

où X et Y sont deux sous-ensembles de S .

Déterminer, en justifiant chaque réponse (preuve ou contre-exemple selon le cas), si la relation R est a) réflexive, b) symétrique, c) antisymétrique, d) transitive.

Problème 2 (8 pts)

Calculer, en fonction des entiers positifs n et m , la valeur de la double somme

$$S(n, m) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^m 2^{-i} (2k + 1).$$

Problème 3 (10 pts)

Soient l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ X &\longmapsto |X \setminus \{0, 2, 4\}|^3 \end{aligned}$$

où X est un élément de l'ensemble des parties de E .

Pour chaque question, détailler/commenter/justifier le raisonnement et présenter la réponse en utilisant et en respectant les notations du cours.

- a) Déterminer l'image de $\emptyset$ par f .
 - b) Déterminer l'image de la fonction f .
 - c) Déterminer l'ensemble de toutes les préimages de 0 par f .
 - d) Déterminer si la fonction f est (1) injective, (2) surjective.
-

Problème 4 (10 pts)

Le parterre d'un théâtre compte n rangées de fauteuils, numérotées de 1 à n . Dans la première rangée, la plus proche de la scène, il y a a fauteuils, dans la deuxième $a+1$, dans la troisième $a+2$ et ainsi de suite, chaque rangée comptant un fauteuil de plus que la précédente. Le prix d'une place au premier rang est de b francs et diminue de 5 francs à chaque rang en s'éloignant de la scène.

- a) Établir une formule directe pour le terme général de la suite $(a_k, k = 1, \dots, n)$ où a_k est le nombre de fauteuils dans la rangée k ainsi que pour celui de la suite $(b_k, k = 1, \dots, n)$ où b_k est le prix, en francs, d'une place dans la rangée k .
- b) En fonction des entiers positifs n et a et du réel positif b , écrire à l'aide du symbole somme la recette $R(n, a, b)$ de la vente de toutes les places du parterre du théâtre.
REMARQUE. Il n'est pas demandé de calculer cette recette mais seulement de l'écrire à l'aide du symbole somme.
- c) On suppose que le parterre du théâtre compte 20 rangées de fauteuils et que le premier rang compte 21 fauteuils. Calculer, en fonction du prix b d'un fauteuil au premier rang, la recette $R(b)$ de la vente de toutes les places du parterre du théâtre.