

CORRIGÉ DU TRAVAIL ÉCRIT DU 16 OCTOBRE 2023

Problème 1

(18 pts)

On considère les cinq ensembles

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{-1, 0, 1\}, \quad C = \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$

$$D = [-3, 6] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 6\} \quad \text{et} \quad E =]0, 2[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}.$$

a) (1) $C \setminus A = \{-2, -1\}$ et $\mathcal{P}(C \setminus A) = \{\emptyset, \{-2\}, \{-1\}, \{-2, -1\}\},$

(2) Comme $A \triangle B \triangle C$ est un sous-ensemble de $A \cup B \cup C$ on a simplement

$$(A \cup B \cup C) \cap (A \triangle B \triangle C) = A \triangle B \triangle C = \{-2, 0, 1, 3, 4, 5\}$$

($A \triangle B \triangle C$ est l'ensemble des éléments appartenant à un seul ou aux trois ensembles),

(3) $A \setminus C = \{3, 4, 5\}$ et

$$B \times (A \setminus C) = \{(-1, 3), (-1, 4), (-1, 5), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\},$$

(4) On a $C \setminus B = \{-2, 2\}$ et les sous-ensembles de $C \setminus B$ qui ne sont pas disjoints de A sont ceux qui contiennent 2. Ainsi $\{X \in \mathcal{P}(C \setminus B) \mid X \cap A \neq \emptyset\} = \{\{2\}, \{-2, 2\}\}.$

b) (1) $(C \setminus B) \cup E = \{-2, 2\} \cup]0, 2[= \{-2\} \cup]0, 2],$

(2) $D \setminus E = [-3, 6] \setminus]0, 2[= [-3, 0] \cup [2, 6].$

c) (1) $|\mathcal{P}(C^2) \times B| = |\mathcal{P}(C^2)| \cdot |B| = 2^{|C^2|} \cdot |B| = 2^{|C|^2} \cdot |B| = 2^{5^2} \cdot 3 = 3 \cdot 2^{25},$

$$\begin{aligned} (2) \quad |\mathcal{P}(A) \triangle \mathcal{P}(C)| &= |\mathcal{P}(A)| + |\mathcal{P}(C)| - 2|\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(C)| \quad (\text{Inclusion-Exclusion pour } \triangle) \\ &= |\mathcal{P}(A)| + |\mathcal{P}(C)| - 2|\mathcal{P}(A \cap C)| \quad (\mathcal{P}(S) \cap \mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(S \cap T)) \\ &= 2^{|A|} + 2^{|C|} - 2 \cdot 2^{|A \cap C|} \quad (|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}) \\ &= 2^6 + 2^5 - 2 \cdot 2^3 = 64 + 32 - 16 = 80. \quad (|A \cap C| = |\{0, 1, 2\}| = 3) \end{aligned}$$

Problème 2

(10 pts)

a) Modélisation : On définit

- ▷ l'univers Ω du problème égal à l'ensemble des participants au congrès,
- ▷ G égal à l'ensemble des personnes de Ω présentant une allergie au gluten,
- ▷ L égal à l'ensemble des personnes de Ω présentant une allergie au lactose,
- ▷ O égal à l'ensemble des personnes de Ω présentant une allergie aux œufs.

Retranscription des informations : De l'énoncé on obtient

- ▷ $|\Omega| = 60$, (le congrès compte 60 participants)
- ▷ $|G| = 14$ (14 participants ont déclaré une allergie au gluten)
- ▷ $|L| = 10$ (10 participants ont déclaré une allergie au lactose),
- ▷ $|O| = 6$ (6 participants ont déclaré une allergie aux œufs),

- ▷ $|\overline{G \cup L \cup O}| = 40$ (40 participants ne souffrent d'aucune des trois allergies),
- ▷ $|(G \cap L) \cup (G \cap O) \cup (L \cap O)| = 7$ (7 participants souffrent d'au moins deux allergies parmi les trois).
- b) On cherche le nombre de participants au congrès souffrant des trois allergies, c.-à-d. le cardinal de $G \cap L \cap O$.
- ▷ On a premièrement

$$|\overline{G \cup L \cup O}| = |\Omega| - |G \cup L \cup O| \quad \text{et} \quad |G \cup L \cup O| = |\Omega| - |\overline{G \cup L \cup O}| = 60 - 40 = 20.$$

▷ On a aussi

$$|(G \cap L) \cup (G \cap O) \cup (L \cap O)| = |G \cap L| + |G \cap O| + |L \cap O| - 2|G \cap L \cap O|$$

et

$$|G \cap L| + |G \cap O| + |L \cap O| = |(G \cap L) \cup (G \cap O) \cup (L \cap O)| + 2|G \cap L \cap O|.$$

▷ Finalement, la formule d'inclusion-exclusion pour trois ensembles nous donne

$$\begin{aligned} |G \cup L \cup O| &= |G| + |L| + |O| - (|G \cap L| + |G \cap O| + |L \cap O|) + |G \cap L \cap O| \\ &= |G| + |L| + |O| - |(G \cap L) \cup (G \cap O) \cup (L \cap O)| + |G \cap L \cap O| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |G \cap L \cap O| &= |G| + |L| + |O| - |(G \cap L) \cup (G \cap O) \cup (L \cap O)| - |G \cup L \cup O| \\ &= 14 + 10 + 6 - 7 - 20 = 30 - 27 = 3. \end{aligned}$$

Le congrès compte donc 3 participants souffrant des trois allergies.

Problème 4

(10 pts)

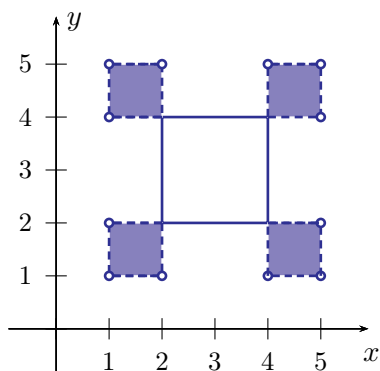
Soient $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ l'ensemble des chiffres décimaux et $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ celui des chiffres pairs.

	$\in$	$\subseteq$	les deux	aucune
a) $B \diamond \mathcal{P}(A)$	☒	☐	☐	☐
b) $(A \setminus B)^2 \diamond A^2 \setminus B^2$	☐	☒	☐	☐
c) $\{0, 4, 9\} \diamond A$	☐	☒	☐	☐
d) $\mathbb{N} \diamond \mathbb{Z}^2$	☐	☐	☐	☒
e) $A \triangle B \diamond \mathcal{P}(A \setminus B)$	☒	☐	☐	☐
f) $\{\{0, 2\}, \{2, 4\}, \{0, 0, 6\}\} \diamond \mathcal{P}(A)$	☐	☒	☐	☐
g) $\emptyset \diamond \mathcal{P}(B \setminus A)$	☐	☐	☒	☐
h) $(8, 8) \diamond \mathcal{P}(B \times A)$	☐	☐	☐	☒
i) $\{(\emptyset, \emptyset)\} \diamond \mathcal{P}(A^2)$	☐	☐	☐	☒
j) $\mathcal{P}(B) \diamond \mathcal{P}(A)$	☐	☒	☐	☐
k) $\emptyset \diamond \mathcal{P}(B)^2$	☐	☒	☐	☐
l) $\{\{1, 5, 9\}\} \diamond A \setminus B$	☐	☐	☐	☒
m) $\{1, \{2\}, 3, \{4\}, 5, \{6\}, 7, \{8\}, 9\} \diamond A \cup \mathcal{P}(A)$	☐	☒	☐	☐

Problème 5*(6 pts)*

a) Représenter graphiquement, dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien, l'ensemble

$$(C \setminus E)^2 \cup (E^2 \setminus F^2).$$



b) $A \times (B \setminus E)$ ou $(A \times B) \setminus (A \times E)$ ou, encore, $(A \times B) \setminus (B \times E)$.