
CORRIGÉ DU TRAVAIL ÉCRIT DU 4 DÉCEMBRE 2023

Problème 1

(8 pts)

On considère un ensemble A non vide et une relation R sur A .

- a) Si la relation R est réflexive alors
 - (3) la relation $\overline{R}$ n'est pas réflexive (quelle que soit R).
- b) Si la relation R est symétrique alors
 - (1) la relation $\overline{R}$ est, elle aussi, symétrique (quelle que soit R).
- c) Si la relation R est antisymétrique alors
 - (2) la relation $\overline{R}$ peut être antisymétrique ou non (cela dépend de R).
- d) Si la relation R est transitive alors
 - (2) la relation $\overline{R}$ peut être transitive ou non (cela dépend de R).

Problème 2

(8 pts)

Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers on considère la relation R définie par

$$x R y \iff 2x > y.$$

- (a) La relation R n'est pas réflexive car, par exemple, $(0, 0) \notin R$ (en effet $2 \cdot 0 \not> 0$) et, plus généralement, $(x, x) \notin R$, quel que soit l'entier x négatif ou nul.
- (b) La relation R n'est pas symétrique car, par exemple, $(3, 1) \in R$ (on a bien $2 \cdot 3 > 1$) mais $(1, 3) \notin R$ (car $2 \cdot 1 \not> 3$).
- (c) La relation R n'est pas antisymétrique car, par exemple, $(2, 3) \in R$ ($2 \cdot 2 > 3$) et $(3, 2) \in R$ ($2 \cdot 3 > 2$) alors que 2 et 3 sont deux entiers différents.
- (d) La relation R n'est pas transitive car, par exemple, $(2, 3) \in R$ ($2 \cdot 2 > 3$) et $(3, 4) \in R$ ($2 \cdot 3 > 4$) mais $(2, 4) \notin R$ car $2 \cdot 2 \not> 4$.

Problème 3

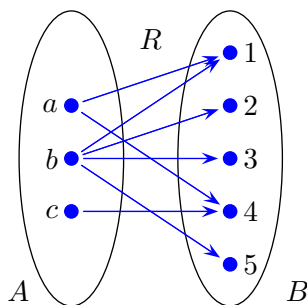
(12 pts)

On considère les ensembles $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ainsi que la relation R de A vers B définie par

$$R = \{(a, 1), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 5), (c, 4)\}$$

et la relation S , également de A vers B , donnée par sa matrice $M(S) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$.

- a) Graphe représentatif de R :



b) Matrice de R^{-1} :

$$\mathbf{M}(R^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Matrice de $\overline{S}$:

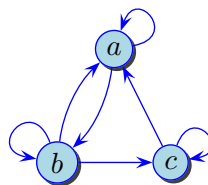
$$\mathbf{M}(\overline{S}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) La relation $T = R^{-1} \circ \overline{S}$ est une relation sur A et pour calculer sa matrice on commence par calculer le produit

$$\mathbf{M}(\overline{S}) \cdot \mathbf{M}(R^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

puis on y remplace les éléments supérieurs à 1 par des 1 afin d'obtenir $\mathbf{M}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

e) Graphe représentatif de T :



Problème 4

(12 pts)

a) (1) $350 \bmod 120 = 110$ car $350 = 240 + 110 = 2 \cdot 120 + 110$

(2) $-75 \bmod 8 = 5$ car $-75 = -80 + 5 = -10 \cdot 8 + 5$

(3) $(638 \cdot 444) \bmod 8 = ((638 \bmod 8) \cdot (444 \bmod 8)) \bmod 8 = (6 \cdot 4) \bmod 8 = 24 \bmod 8 = 0$
car $638 = 640 - 2 = 632 + 6 = 79 \cdot 8 + 6$, $444 = 440 + 4 = 55 \cdot 8 + 4$ et $24 = 3 \cdot 8$.

b) Pour tout entier n , supérieur ou égal à 2, on a

$$\begin{aligned} (1) \quad n^3 \bmod (n+1) &= (n^3 + 1 - 1) \bmod (n+1) \\ &= \left(\underbrace{(n^3 + 1) \bmod (n+1)}_{=0 \text{ car } (n+1) \mid (n^3 + 1)} + \underbrace{(-1 \bmod (n+1))}_{=-1+(n+1)=n} \right) \bmod (n+1) = n \end{aligned}$$

Comme $n \equiv -1 \pmod{n+1}$ on a aussi

$$n^3 \bmod (n+1) = (-1)^3 \bmod (n+1) = -1 \bmod (n+1) = n.$$

$$(2) \quad (n! - 1) \bmod (n-1) = \left(\underbrace{n! \bmod (n-1)}_{=0 \text{ car } (n-1) \mid n!} + \underbrace{(-1 \bmod (n-1))}_{=-1+(n-1)=n-2} \right) \bmod (n-1) = n-2$$

$$(3) \quad ((n-1)! + (n-2)!) \bmod n = ((n-2)!((n-1) + 1)) \bmod n = (n-2)!n \bmod n = 0$$

c) Pour tout entier n , supérieur ou égal à 2, on a

$$\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1) \cdot n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

ou, de manière plus brutale,

$$\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{n! \cdot (n+1)!} - \frac{n! \cdot n}{n! \cdot (n+1)!} = \frac{n!(n+1-n)}{n! \cdot (n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Problème 5

(10 pts)

Chaque fonction est définie de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

	Injective		Surjective	
	Oui	Non	Oui	Non
1. $f_1(n) = -2n$	☒	☐	☐	☒
2. $f_2(n) = n+2 + 4$	☐	☒	☐	☒
3. $f_3(n) = n^3$	☒	☐	☐	☒
4. $f_4(n) = 5 - \lceil n/4 \rceil$	☐	☒	☒	☐
5. $f_5(n) = n - (n \bmod 2)$	☐	☒	☐	☒
6. $f_6(n) = \lceil 2n \rceil - \lfloor n \rfloor$	☒	☐	☒	☐