
TRAVAIL ÉCRIT DU 4 DÉCEMBRE 2023

NOM ET PRÉNOM :	TOTAL : ...	NOTE : ...
-----------------	-------------	------------

Le travail dure une heure. Le seul moyen auxiliaire autorisé est le formulaire distribué en classe.

Lisez attentivement et complètement chaque énoncé avant de commencer la résolution d'un problème.

Soignez votre rédaction, commentez et expliquez vos démarches, présentez clairement vos réponses et simplifiez vos résultats. Tous ces critères seront pris en compte pour l'évaluation de vos réponses.

Problème 1

(8 pts)

On considère un ensemble A non vide et une relation R sur A .

a) Si la relation R est réflexive alors

- (1) la relation $\overline{R}$ est, elle aussi, réflexive (quelle que soit R),
- (2) la relation $\overline{R}$ peut être réflexive ou non (cela dépend de R),
- (3) la relation $\overline{R}$ n'est pas réflexive (quelle que soit R).

Réponse : ____

b) Si la relation R est symétrique alors

- (1) la relation $\overline{R}$ est, elle aussi, symétrique (quelle que soit R),
- (2) la relation $\overline{R}$ peut être symétrique ou non (cela dépend de R),
- (3) la relation $\overline{R}$ n'est pas symétrique (quelle que soit R).

Réponse : ____

c) Si la relation R est antisymétrique alors

- (1) la relation $\overline{R}$ est, elle aussi, antisymétrique (quelle que soit R),
- (2) la relation $\overline{R}$ peut être antisymétrique ou non (cela dépend de R),
- (3) la relation $\overline{R}$ n'est pas antisymétrique (quelle que soit R).

Réponse : ____

d) Si la relation R est transitive alors

- (1) la relation $\overline{R}$ est, elle aussi, transitive (quelle que soit R),
- (2) la relation $\overline{R}$ peut être transitive ou non (cela dépend de R),
- (3) la relation $\overline{R}$ n'est pas transitive (quelle que soit R).

Réponse : ____

Problème 2

(8 pts)

Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers on considère la relation R définie par

$$x R y \iff 2x > y.$$

Décider – en justifiant chaque réponse par une preuve ou un contre-exemple – si la relation R est (a) réflexive, (b) symétrique, (c) antisymétrique, (d) transitive.

Tournez svp

Problème 3

(12 pts)

On considère les ensembles $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ainsi que la relation R de A vers B définie par

$$R = \{(a, 1), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 5), (c, 4)\}$$

et la relation S , également de A vers B , donnée par sa matrice

$$M(S) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

- Donner le graphe représentatif de R .
- Donner la matrice de la relation inverse R^{-1} .
- Donner la matrice de la relation complémentaire $\overline{S}$.
- Calculer, à l'aide des deux matrices précédentes et en précisant les résultats intermédiaires, la matrice de la relation $T = R^{-1} \circ \overline{S}$.
- Donner le graphe représentatif de T .

Problème 4

(12 pts)

- a) Calculer les modulus qui suivent en justifiant/détaillant suffisamment chaque réponse.

(1) $350 \bmod 120$

(2) $-75 \bmod 8$

(3) $(638 \cdot 444) \bmod 8$

- b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer les modulus qui suivent en justifiant/détaillant précisément et clairement chaque réponse.

(1) $n^3 \bmod (n+1)$

(2) $(n! - 1) \bmod (n-1)$

(3) $((n-1)! + (n-2)!) \bmod n$

- c) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Simplifier l'expression

$$\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}$$

Problème 5

(10 pts)

Pour chacune des fonctions suivantes, définie de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, décider si elle est injective ou surjective (voire les deux ou ni l'un ni l'autre).

	Injective		Surjective	
	Oui	Non	Oui	Non
1. $f_1(n) = -2n$	☐	☐	☐	☐
2. $f_2(n) = n+2 + 4$	☐	☐	☐	☐
3. $f_3(n) = n^3$	☐	☐	☐	☐
4. $f_4(n) = 5 - \lceil n/4 \rceil$	☐	☐	☐	☐
5. $f_5(n) = n - (n \bmod 2)$	☐	☐	☐	☐
6. $f_6(n) = \lceil 2n \rceil - \lfloor n \rfloor$	☐	☐	☐	☐