

CORRIGÉ DU TRAVAIL ÉCRIT DU 22 JANVIER 2024

Problème 1

(6 pts)

$$a) \prod_{k=10}^{20} (3-k)^2 = \prod_{k=10-3}^{20-3} (3-(k+3))^2 = \prod_{k=7}^{17} (-k)^2 = \prod_{k=7}^{17} k^2$$

On décale l'indice k de 3 vers le haut dans l'expression et, par conséquent, de 3 vers le bas dans les bornes.

$$b) \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{i+1} (1+i)j = \sum_{i=1}^{(n+1)+1} \sum_{j=0}^{(i-1)+1} (1+(i-1))j = \sum_{i=1}^{n+2} \sum_{j=0}^i i \cdot j$$

On décale l'indice i de 1 vers le haut dans les bornes de la somme externe et de 1 vers le bas dans l'expression sommée (y compris dans les bornes de la somme interne).

Problème 2

(4 pts)

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Problème 3

(8 pts)

Pour $k \leq 4$ la somme $\sum_{j=5}^k 1$ est vide et est donc égale à 0. On a alors

$$S = \sum_{k=0}^{24} \sum_{j=5}^k 1 = \sum_{k=0}^4 \sum_{j=5}^k 1 + \sum_{k=5}^{24} \sum_{j=5}^k 1 = \sum_{k=0}^4 0 + \sum_{k=5}^{24} (k-4) = \sum_{k=1}^{20} k = \frac{20 \cdot 21}{2} = \underline{\underline{210}}.$$

Problème 4

(8 pts)

On commence par décomposer le terme général de la somme en éléments simples :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4k^2-1} &= \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1} = \frac{A(2k+1) + B(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{2(A+B)k + (A-B)}{(2k-1)(2k+1)} \end{aligned}$$

La suite d'égalités qui précède est valide pour tout $k \geq 1$ si et seulement si les constantes A et B vérifient

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{cases}$$

Ainsi

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

et en utilisant cette décomposition pour remplacer le terme général de la somme on obtient une série télescopique :

$$\begin{aligned}
 S(n) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2k-1} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2(n+1)-1} \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2n+1} \right] \\
 &= \frac{n}{\underline{\underline{2n+1}}}, \quad n \geq 1.
 \end{aligned}$$

Problème 5

(8 pts)

On factorise $(4 - k^2)$ puis on décompose le produit en deux. Il faut juste faire attention à la gestion du signe moins.

$$\begin{aligned}
 P(n) &= \prod_{k=3}^n (4 - k^2) = \prod_{k=3}^n (2 - k)(2 + k) = \prod_{k=3}^n (2 - k) \prod_{k=3}^n (2 + k) \\
 &= \prod_{k=3}^n (-1) \prod_{k=3}^n (k - 2) \prod_{k=3}^n (k + 2) = (-1)^{n-2} \prod_{k=1}^{n-2} k \cdot \prod_{k=5}^{n+2} k \\
 &= (-1)^n (n-2)! \frac{(n+2)!}{4!} = \underline{\underline{\frac{(-1)^n (n-2)! (n+2)!}{24}}}, \quad n \geq 3.
 \end{aligned}$$

Problème 6

(10 pts)

a) Par Pythagore on a

$$c_k = \sqrt{\left(\frac{c_{k-1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{c_{k-1}}{2}\right)^2} = \frac{c_{k-1}}{\sqrt{2}}$$

et la suite $(c_k, k \geq 0)$ des longueurs des côtés des carrés est géométrique de raison $r = 1/\sqrt{2}$.

i) Formule récurrente pour le terme général de la suite $(c_k, k \geq 0)$:

$$\underline{\underline{\begin{cases} c_k &= \frac{c_{k-1}}{\sqrt{2}}, & k \geq 1 \\ c_0 &= c \end{cases}}}$$

ii) Formule directe pour le terme général de la suite $(c_k, k \geq 0)$: $\underline{\underline{c_k = c \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k, k \geq 0.}}$

b) Le terme général de la suite $(A_k, k \geq 0)$ des aires des carrés ajoutés ou retirés au fil des itérations est

$$A_k = (c_k)^2 = c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2k} = c^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k, k \geq 0.$$

L'aire $\mathcal{A}$ de la figure finale est égale à la somme alternée des termes de cette suite géométrique. Il s'agit donc d'une série géométrique de raison $-1/2$ et de terme initial c^2 :

$$\mathcal{A} = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k = c^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{c^2}{1 - (-\frac{1}{2})} = \underline{\underline{\frac{2}{3}c^2 \text{ [cm}^2\text{]}}}}$$