
TRAVAIL ÉCRIT DU 22 JANVIER 2024

NOM ET PRÉNOM :	TOTAL : ...	NOTE : ...
-----------------	-------------	------------

Le travail dure une heure et quart. Le seul moyen auxiliaire autorisé est le formulaire distribué en classe.

Lisez attentivement et complètement chaque énoncé avant de commencer la résolution d'un problème.

Soignez votre rédaction, commentez et expliquez vos démarches, présentez clairement vos réponses et simplifiez vos résultats. Tous ces critères seront pris en compte pour l'évaluation de vos réponses.

Problème 1

(6 pts)

Dans chaque cas, compléter l'expression de droite afin de conserver l'égalité (n est un entier positif).

a) $\prod_{k=10}^{20} (3-k)^2 = \prod_{k=?}^? k^2$

b) $\sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{i+1} (1+i)j = \sum_{i=1}^? \sum_{j=?}^?$

Problème 2

(4 pts)

Au voisinage de 0, la série de Taylor de la fonction $\arctan(x)$ est

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \dots$$

Récrire ce développement en série à l'aide du symbole somme.

Problème 3

(8 pts)

Calculer la valeur de la double somme

$$S = \sum_{k=0}^{24} \sum_{j=5}^k 1.$$

Problème 4

(8 pts)

Déterminer, en fonction de l'entier $n \geq 1$, la valeur de la somme

$$S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1}.$$

Problème 5

(8 pts)

Déterminer, en fonction de l'entier $n \geq 3$, la valeur du produit

$$P(n) = \prod_{k=3}^n (4 - k^2).$$

Tournez svp

Problème 6*(10 pts)*

On considère un carré dont la longueur des côtés est égale à c cm. De ce carré on retire un carré dont les sommets sont les milieux des côtés du carré initial. On ajoute ensuite à la figure un carré dont les sommets sont les milieux des côtés du carré retiré à l'itération précédente. On continue ainsi, indéfiniment, en alternant les retraits et les ajouts.

a) Pour $k \geq 0$, on note c_k la longueur d'un côté du carré ajouté ou retiré à l'itération k .

i) Donner une formule récurrente pour le terme général de la suite $(c_k, k \geq 0)$.

ii) Donner une formule directe pour le terme général de la suite $(c_k, k \geq 0)$.

b) Déterminer l'aire de la figure finale (l'aire de la surface bleue), obtenue après une infinité d'itérations.

ILLUSTRATION.

