

Mathématiques discrètes

Table des matières

1	Ensembles	1
1.1	Appartenance et égalité d'ensembles	1
1.2	Inclusion et sous-ensembles	3
1.3	Opérations sur les ensembles	4
1.4	Cardinal d'un ensemble fini	7
1.5	Ensemble des parties	8
1.6	Produit cartésien et n -uples	9
1.7	Exercices supplémentaires et récapitulatifs	11
1.8	Solutions d'exercices choisis	15
2	Relations	25
2.1	Graphe représentatif et matrice d'une relation	25
2.2	Opérations sur les relations	27
2.3	Propriétés des relations sur un ensemble	30
2.4	Relations d'ordre	32
2.5	Relations d'équivalence	34
2.6	Exercices supplémentaires et récapitulatifs	35
2.7	Solutions d'exercices choisis	41
3	Fonctions	57
3.1	Images et préimages	57
3.2	Fonctions et relations	58
3.2.1	Représentation graphique d'une fonction	60
3.3	Compositions de fonctions	61
3.4	Propriétés des fonctions	61
3.5	Quelques fonctions particulières	64
3.6	Exercices supplémentaires et récapitulatifs	66
3.7	Solutions d'exercices choisis	69

4 Suites et séries	77
4.1 Suites	77
4.1.1 Suites arithmétiques et géométriques	79
4.1.2 Suites arithmético-géométriques	80
4.2 Sommes et produits	81
4.3 Séries	82
4.3.1 Séries télescopiques	82
4.3.2 Séries arithmétiques	83
4.3.3 Séries géométriques	84
4.4 Raisonnement par induction	85
4.5 Exercices supplémentaires et récapitulatifs	86
4.6 Solutions d'exercices choisis	92

Ensembles



Ensemble et élément

Intuitivement, un **ensemble** est un regroupement d'**éléments** considérés comme un tout. On note un ensemble en entourant la liste de ses éléments par des accolades.



Exemples



$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}, \quad B = \{\text{Oui}, \text{Non}, \text{Peut-être}\}.$$



Ensemble vide

L'ensemble qui ne contient aucun élément est l'**ensemble vide** et est noté $\emptyset$ ou $\{\}$.



Univers

L'ensemble qui contient tous les éléments (dans un contexte donné) est l'**univers** ou l'**ensemble universel** et sera généralement noté Ω .

1.1 Appartenance et égalité d'ensembles



Relation d'appartenance

Si x est un élément de l'ensemble S , on dit que x **appartient** à S et on note $x \in S$. Dans le cas contraire, x n'appartient pas à S et on note $x \notin S$.



Égalité d'ensembles

Deux ensembles A et B sont **égaux**, et on note $A = B$, s'ils contiennent les mêmes éléments.

Pour définir un ensemble, deux approches principales sont possibles. La première, utilisable dans les cas les plus simples uniquement, consiste à décrire un ensemble **en extension**, c.-à-d. en énumérant complètement (ou partiellement lorsqu'un motif clair peut être établi) ses éléments. La seconde approche consiste à définir un ensemble **en compréhension** en utilisant un **constructeur** d'ensembles qui spécifie une propriété satisfaite par tous les éléments recherchés et par eux seuls.

**Exemple**

L'ensemble S des chiffres décimaux peut être défini en extension par

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad \text{ou} \quad S = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

et en compréhension par

$$S = \{x \mid x \text{ est entier et } 0 \leq x \leq 9\} \quad \text{ou} \quad S = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 9\}.$$

1.1 Réécrire en extension chacun des ensembles proposés.

- a) $A = \{x \mid x \text{ est entier et } -2 < x \leq 5\}$ c) $C = \{z \mid z \text{ est réel et } \cos(z) = 3/2\}$
 b) $B = \{y \mid y \text{ est impair et } |y| < 5\}$ d) $D = \{k \mid k \text{ est entier et } k^2 = -k\}$

1.2 Écrire explicitement chacun des ensembles proposés en énumérant ses éléments.

- a) $A = \{k \in \mathbb{N}^* \mid 0 \leq k \leq 4\}$ c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 10\}$
 b) $B = \{n \in \mathbb{Z}_+ \mid n < 0\}$ d) $D = \{z \in \mathbb{R} \mid \log_2(z^2) = 4\}$

**Quantificateurs existentiel et universel**

- 1) Le symbole $\exists$, appelé quantificateur existentiel, est l'abréviation de la condition « il existe (au moins) un ».
- 2) En ajoutant un point d'exclamation au symbole précédent on obtient le quantificateur d'unicité $\exists!$ qui se lit « il existe un seul et unique ».
- 3) Le quantificateur universel $\forall$ est, lui, l'abréviation de la condition « quel que soit » ou « pour tout ».

1.3 Écrire explicitement les éléments de chaque ensemble.

- a) $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid -4 < n \leq 2\}$ c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists n \in A \text{ tel que } x = |n|\}$
 b) $B = \{n \in A \mid n \text{ est impair}\}$ d) $D = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists! n \in A \text{ tel que } y = |n|\}$

1.4 Décider si les appartenances suivantes sont vraies ou fausses.

- a) $\{1\} \in \{0, 1\}$ d) $2 \in \{0, 1, 2\}$ g) $\emptyset \in \emptyset$
 b) $\{-1\} \in \{\{-1\}, \{1\}\}$ e) $1 \in \{\{1\}\}$ h) $0 \in \emptyset$
 c) $\{1, 2\} \in \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ f) $2 \in \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ i) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

1.5 Parmi les ensembles proposés, déterminer lesquels sont égaux.

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid |x| = x^2\} & C &= \{x \mid x = \sin(k\pi), k \in \mathbb{Z}\} \\ B &= \{x \mid x^3 = x\} & D &= \{1, 1, 0, -1, 0, 1\} \end{aligned}$$

1.6 Parmi les ensembles proposés, déterminer lesquels sont égaux.

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 3| = 3\} & E &= \{x \in \mathbb{R} \mid e^x + e^{-x} = 1\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \ln(x) = \ln(12 - x)\} & F &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| = |x + 3|\} \\ C &= \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x - 2} - \sqrt{x^2 - 8} = 0\} & G &= \{x \in \mathbb{R} \mid 3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+2} = 3^5\} \\ D &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 6x^2 + 9x = 0\} & H &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2/(x + 3) = 9/(x + 3)\} \end{aligned}$$

1.2 Inclusion et sous-ensembles



Relation d'inclusion

L'ensemble B est **inclus** dans l'ensemble A , et on note $B \subseteq A$, si tout élément appartenant à B appartient également à A :

$$B \subseteq A \iff (\forall x \in B, x \in A).$$



Sous-ensemble

Si B est inclus dans A , B est appelé un **sous-ensemble** ou une **partie** de A .



Propriétés

- 1) Tout ensemble est sous-ensemble de lui-même.
- 2) L'ensemble vide $\emptyset$ est un sous-ensemble de A quel que soit l'ensemble A .
- 3) Dans un contexte donné, tous les ensembles considérés sont des parties de l'univers Ω .



Sous-ensemble propre et inclusion stricte

Si B est un sous-ensemble de A mais n'est pas égal à A , B est dit un **sous-ensemble propre** de A . Si on veut insister sur le fait que B est (ou doit être) un sous-ensemble propre de A (et ne peut donc être égal à A), on pourra utiliser la notation $B \subset A$. On a donc

$$B \subset A \iff B \subseteq A \text{ et } B \neq A.$$

1.7 Décider si les inclusions suivantes sont vraies ou fausses.

- | | | |
|--|--|-------------------------------------|
| a) $\{3, 6\} \subseteq \{3, 4, 5, 6\}$ | c) $\{\{2\}\} \subseteq \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ | e) $\emptyset \subseteq \mathbb{Z}$ |
| b) $\{3\} \subseteq \{\{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ | d) $\{2, 4\} \subseteq \{2, 4\}$ | f) $\emptyset \subseteq \emptyset$ |

1.8 Décider si les inclusions suivantes sont vraies ou fausses.

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\{3, 6\} \subset \{3, 4, 5, 6\}$ | d) $\{\{4\}\} \subseteq \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ | g) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$ |
| b) $\{3, 4\} \subset \{3, 4\}$ | e) $\emptyset \subset \emptyset$ | h) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ |
| c) $\{2, 3\} \subseteq \{\{2\}, \{3\}\}$ | f) $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$ | i) $\emptyset \subset \mathbb{Z}$ |

1.9 Est-il possible de trouver deux ensembles A et B tels que $A \in B$ et $A \subseteq B$?

1.10 Soit T l'ensemble des triangles non dégénérés du plan (c.-à-d. l'ensemble des triangles du plan dont les trois sommets sont distincts et non alignés). Soient, encore, E le sous-ensemble des triangles équilatéraux de T , I le sous-ensemble des triangles isocèles de T et R le sous-ensemble des triangles rectangles de T . Construire un diagramme d'Euler représentant les relations d'inclusion entre ces quatre ensembles.

1.11 Soit Q l'ensemble des quadrilatères convexes du plan. Dans Q , on considère le sous-ensemble C des carrés, le sous-ensemble R des rectangles, le sous-ensemble P des parallélogrammes et le sous-ensemble L des losanges. Construire un diagramme d'Euler représentant les relations d'inclusion entre ces ensembles.

1.3 Opérations sur les ensembles

Les trois opérations ensemblistes de base sont l'*union*, l'*intersection* et le *complément*. Elles correspondent aux opérateurs logiques « ou », « et » et « non ».



Union

L'**union**, ou la **réunion**, de deux ensembles A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble formé par les éléments appartenant à A ou à B (ou aux deux) :

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$



Intersection

L'**intersection** de deux ensembles A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble formé par les éléments appartenant à A et à B :

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$



Ensembles disjoints

Deux ensembles A et B sans éléments communs, c.-à-d. tels que $A \cap B = \emptyset$, sont dits **disjoints**.



Complément

Le **complément** de l'ensemble A , noté $\overline{A}$, est l'ensemble formé de tous les éléments de l'univers Ω n'appartenant pas à A :

$$\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \Omega \mid x \notin A\}.$$

À l'aide des trois opérations de base, on définit deux autres opérations courantes : la *différence* et la *différence symétrique* (cette dernière correspond à l'opérateur logique « ou exclusif »).



Différence

La **différence** de deux ensembles A et B , notée $A \setminus B$, est l'ensemble formé des éléments appartenant à A mais pas à B :

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$



Différence symétrique

La **différence symétrique** de deux ensembles A et B , notée $A \triangle B$ ou parfois $A \oplus B$, est l'ensemble formé des éléments appartenant soit à A soit à B mais pas aux deux. À l'aide des opérations précédentes, elle peut être définie par

$$A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

ou par

$$A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

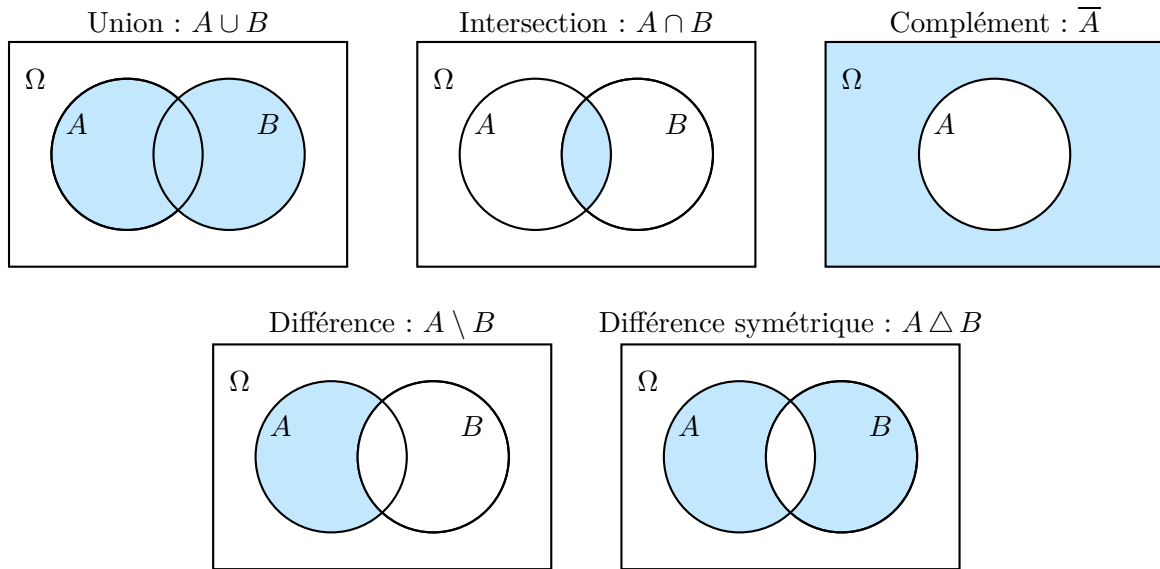


Figure 1.1 – Illustration des opérations ensemblistes à l'aide de diagrammes de Venn. Les surfaces pleines représentent le résultat des différentes opérations.

1.12 Pour les ensembles $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 5, 9\}$ et $C = \{1, 3, 7, 11\}$, calculer

- | | | |
|--------------------|------------------------|----------------------------------|
| a) $A \cup B$ | d) $B \setminus A$ | g) $A \setminus C$ |
| b) $A \cap B$ | e) $(A \cup B) \cap C$ | h) $(A \setminus C) \setminus B$ |
| c) $A \setminus B$ | f) $A \cup (B \cap C)$ | i) $A \setminus (C \setminus B)$ |

1.13 Pour les ensembles $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, calculer

- | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|----------------------------|
| a) $A \triangle B$ | b) $B \triangle A$ | c) $C \triangle C$ | d) $C \triangle \emptyset$ |
|--------------------|--------------------|--------------------|----------------------------|

1.14 Pour les ensembles $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, calculer

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| a) $A \triangle (B \triangle C)$ | d) $(A \cup B) \triangle (A \cup C)$ |
| b) $(A \triangle B) \triangle C$ | e) $A \cap (B \triangle C)$ |
| c) $A \cup (B \triangle C)$ | f) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$ |

1.15 Dans chacun des cas suivants, déterminer quelle condition (la plus générale possible) doivent vérifier les ensembles A et B pour que l'égalité ou l'inclusion soit vérifiée.

- | | |
|--------------------------|--|
| a) $A \cup B = A$ | e) $A \setminus B = B \setminus A$ |
| b) $A \cap B = A$ | f) $A \cup B \subseteq A \cap B$ |
| c) $A \setminus B = A$ | g) $A \setminus (A \setminus B) = A \setminus (B \setminus A)$ |
| d) $A \cap B = B \cap A$ | h) $A \triangle B = A$ |

1.16 Dans chaque cas, établir un diagramme de Venn correspondant à l'ensemble proposé.

- | | |
|---|---|
| a) $B \setminus (\overline{A \triangle C})$ | b) $(A \triangle B) \cap (A \triangle C)$ |
|---|---|

Propriétés des opérations ensemblistes

Les principales identités vérifiées par les trois opérations ensemblistes de base sont résumées dans la table 1.1 où A , B et C sont trois sous-ensembles d'un même univers Ω .

Table 1.1 – Principales propriétés des trois opérations ensemblistes de base.

Identité	Nom
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$	Associativité
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributivité
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Commutativité
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	De Morgan
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Absorption
$\overline{\overline{A}} = A$	Involution
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Idempotence
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap \Omega = A$	Identité
$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup \Omega = \Omega$	Domination
$A \cup \overline{A} = \Omega$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Complémentarité

1.17 Vérifier la deuxième loi de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

- a) à l'aide de diagrammes de Venn,
- b) à l'aide d'une table d'appartenance,
- c) en montrant que chaque côté de l'égalité est un sous-ensemble de l'autre.

1.18 Soient A , B et C trois ensembles (dans un univers Ω). Vérifier l'identité

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

- a) à l'aide de diagrammes de Venn,
- b) à l'aide d'une table d'appartenance,
- c) à l'aide des définitions et des propriétés des opérations sur les ensembles (préciser à chaque transformation la définition ou la propriété utilisée).

1.19 Soient A et B deux ensembles (dans un univers Ω), simplifier les expressions suivantes en utilisant les définitions et les propriétés des opérations ensemblistes. Préciser à chaque transformation la définition ou la propriété utilisée et vérifier vos résultats à l'aide de diagrammes de Venn.

- a) $A \setminus (A \setminus B)$ b) $(A \setminus B) \triangle B$ c) $A \cup (B \setminus A)$ d) $A \cap (B \setminus A)$

1.20 a) La différence est-elle une opération commutative ? En d'autres termes, a-t-on toujours

$$A \setminus B = B \setminus A$$

quels que soient les ensembles A et B ?

- b) La différence est-elle une opération associative ? En d'autres termes, a-t-on toujours

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$$

quels que soient les ensembles A , B et C ?

- 1.21** a) La différence symétrique est-elle une opération commutative ? En d'autres termes, a-t-on toujours

$$A \triangle B = B \triangle A$$

quels que soient les ensembles A et B ?

- b) La différence symétrique est-elle une opération associative ? En d'autres termes, a-t-on toujours

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$$

quels que soient les ensembles A , B et C ?

Dans l'affirmative, comment peut-on définir la différence symétrique de trois ensembles et plus généralement de k ensembles ?

- 1.22** Vérifier, à l'aide d'une table d'appartenance si la différence ensembliste est distributive par rapport à l'union.

1.4 Cardinal d'un ensemble fini



Ensemble fini

Un ensemble est **fini** s'il contient n éléments distincts où n est un entier non négatif. Dans le cas contraire, l'ensemble est **infini**.



Cardinal d'un ensemble

Le **cardinal**, ou la **cardinalité**, d'un ensemble fini A , notée $|A|$, est égal au nombre d'éléments distincts formant l'ensemble A .

Certains auteurs préfèrent les notations $\text{Card}(A)$ ou $\#(A)$ pour désigner le cardinal de l'ensemble A .

- 1.23** Pour chacun des ensembles suivants, déterminer s'il est fini ou non. Dans l'affirmative, donner son cardinal.

- a) $A = \{\text{entiers à la fois pairs et impairs}\}$ c) $C = \{\text{réels positifs et inférieurs à } 1\}$
 b) $B = \{\text{cantons suisses}\}$ d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = -1\}$

- 1.24** Déterminer le cardinal des ensembles

- a) $\{4\}$ c) $\{4, \{4\}\}$ e) $\emptyset$ g) $\{\emptyset, \{4\}\}$
 b) $\{\{4\}\}$ d) $\{4, \{4\}, \{4, 4\}\}$ f) $\{\emptyset\}$ h) $\{4, \{4\}, \{4, \{4\}\}\}$

1.25 Soient A et B deux ensembles finis vérifiant $|A| = 26$ et $|B| = 6$. Déterminer le cardinal de $A \cup B$ si

- a) A et B sont disjoints b) $|A \cap B| = 3$ c) $|A \cap B| = 10$

1.26 Principe d'inclusion-exclusion pour 2 ensembles

Soient A et B deux ensembles finis. Déterminer une formule permettant de calculer $|A \cup B|$ à partir de $|A|$, $|B|$ et $|A \cap B|$.

1.27 Principe d'inclusion-exclusion pour 3 ensembles

Généraliser le résultat de l'exercice précédent au calcul du cardinal de l'union de trois ensembles finis A , B et C .

1.28 Soient A et B deux ensembles finis. Déterminer une formule permettant de calculer $|A \triangle B|$ à partir de $|A|$, $|B|$ et $|A \cap B|$.

1.29 Généraliser le résultat de l'exercice précédent au calcul du cardinal de la différence symétrique de trois ensembles finis A , B et C .

1.5 Ensemble des parties



Ensemble des parties

La collection de tous les sous-ensembles d'un ensemble A définit l'**ensemble des parties** de A et est notée $\mathcal{P}(A)$:

$$\mathcal{P}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{X \mid X \subseteq A\}.$$



Exemple

L'ensemble des parties de l'ensemble $\{\text{Oui}, \text{Non}\}$ est

$$\mathcal{P}(\{\text{Oui}, \text{Non}\}) = \{\emptyset, \{\text{Oui}\}, \{\text{Non}\}, \{\text{Oui}, \text{Non}\}\}.$$



Théorème

Pour un ensemble fini A on a

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}.$$

1.30 Déterminer l'ensemble des parties des ensembles

- a) $\{0\}$ b) $\{x, y, z\}$ c) $\emptyset$ d) $\mathcal{P}(\{0\})$

1.31 Soit A un ensemble non vide de cardinal n . Combien de sous-ensembles propres et non vides possède l'ensemble A ?

1.32 Dans une classe d'un collège, on compte 17 élèves dont 7 qui portent des lunettes. Combien de groupes non vides et formés uniquement d'élèves de la classe ne portant pas de lunettes peut-on définir ?

1.33 Un club de passionnés de sports aériens compte 25 membres possédant tous une licence de deltaplane, de parapente ou de parachutisme (au moins une parmi les trois). Au total on dénombre 45 licences dans le club pour ces trois sports. On sait également que 8 membres ont au moins leurs licences de deltaplane et de parapente, 10 ont au moins celles de parapente et de parachutisme alors que 7 ont au moins celles de deltaplane et de parachutisme.

- Modéliser la situation et retranscrire les informations fournies à l'aide du langage ensembliste.
- À l'aide de votre modélisation et en détaillant et commentant correctement votre démarche, déterminer combien de groupes d'au moins deux membres du club mais composés uniquement de personnes possédant les 3 licences il est possible de former.

1.34 Pour les ensembles $A = \{0, 1\}$ et $B = \{-1, 1\}$, déterminer

- | | | |
|---------------------|---|---|
| a) $\mathcal{P}(A)$ | c) $\mathcal{P}(A \cup B)$ | e) $\mathcal{P}(A \cap B)$ |
| b) $\mathcal{P}(B)$ | d) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ | f) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ |

1.35 Pour les ensembles $A = \{0, 1\}$ et $B = \{-1, 1\}$, déterminer

- | | |
|--|--|
| a) $\{X \subseteq A \mid X \in \mathcal{P}(B)\}$ | c) $\{X \mid X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)\}$ |
| b) $\{X \in \mathcal{P}(A) \mid X \subseteq B\}$ | d) $\{X \subset B \mid X \notin \mathcal{P}(A)\}$ |

1.36 Pour deux ensembles quelconques A et B , comparer (y a-t-il égalité ? inclusion ?)

- | | |
|--|--|
| a) $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ | b) $\mathcal{P}(A \cap B)$ et $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ |
|--|--|

1.37 Soient A et B deux ensembles finis. Sous quelle condition (la plus générale possible) a-t-on

$$\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \setminus B) ?$$

1.6 Produit cartésien et n -uples



n -uple

Un **n -uple** ou **n -uplet** est une liste *ordonnée* de n éléments. On note un n -uple en entourant la liste de ses **composantes** par des parenthèses : $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

La **taille** d'un n -uple est égale au nombre n de ses composantes.



Couple et triplet

Un **couple** est un 2-uple, c'est-à-dire une paire ordonnée de deux éléments, alors qu'un **triplet** est un 3-uple.



Produit cartésien

Le **produit cartésien** de deux ensembles A et B , noté $A \times B$, est l'ensemble de *tous* les couples (a, b) où la première composante est un élément de A alors que la seconde est un élément de B :

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

**Théorème**

Si A et B sont deux ensembles finis, on a

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Le produit cartésien $A \times B \times C$ de trois ensembles est l'ensemble de tous les triplets (a, b, c) avec $a \in A, b \in B$ et $c \in C$. Plus généralement, le produit cartésien des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ est

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

**Puissance d'un ensemble**

Pour tout entier positif n , le produit cartésien de l'ensemble A avec lui-même n fois définit la **n^{e} puissance** de A :

$$A^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ facteurs}}.$$

1.38 Pour les ensembles $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$ et $C = \{0, 1\}$ calculer

- | | | |
|-----------------|--------------------------|-----------------------------|
| a) $A \times B$ | c) $A \times B \times C$ | e) $C \times \emptyset$ |
| b) $B \times A$ | d) $C^2 \times B$ | f) $C \times \{\emptyset\}$ |

1.39 Soient $S = \{0, 1, 2\}$, $T = \{1\}$ et $U = \{2, 3\}$. Déterminer

- | | | | |
|-------------------|------------|--------------------------------|---|
| a) $ T \times U $ | b) $ S^3 $ | c) $ S \times \mathcal{P}(U) $ | d) $ \mathcal{P}(T) \times \mathcal{P}(U) $ |
|-------------------|------------|--------------------------------|---|

1.40 Sous quelles conditions sur les ensembles A et B a-t-on $A \times B = B \times A$?

1.41 On considère la droite réelle $\mathbb{R}$ et les intervalles fermés $I = [1, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$ et $J = [2, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$. Représenter, dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère, les ensembles

- | | | |
|-----------------|--------------------------|------------------------|
| a) $I \times J$ | b) $I \times \mathbb{R}$ | c) $I^2 \setminus J^2$ |
|-----------------|--------------------------|------------------------|

1.42 Soient $A = \{1, 3, 4, 6\}$ et $B = [2, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$. Représenter, dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère, les ensembles

- | | | |
|-----------------|--------------------------|--------------------------|
| a) $A \times B$ | b) $\mathbb{R} \times A$ | c) $B \times \mathbb{Z}$ |
|-----------------|--------------------------|--------------------------|

1.43 Soient les ensembles

- | | |
|---|---|
| 1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, | 4) $D = \{2, 3, 4\}$, |
| 2) $B = [1, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$, | 5) $E = [2, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$, |
| 3) $C =]1, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$, | 6) $F =]2, 4[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$ |

À l'aide de ces ensembles, **et uniquement de ceux-là**, exprimer chacun des ensembles de la figure 1.2.

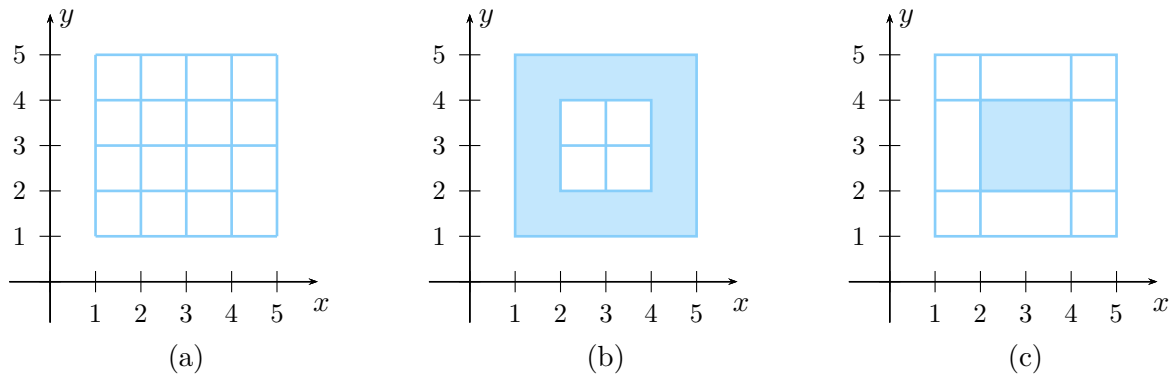


Figure 1.2 – Ensembles de l'exercice 1.43.

1.7 Exercices supplémentaires et récapitulatifs

1.44 Si $A = \{1, 2, 3\}$, déterminer tous les éléments de l'ensemble

$$S = \{X \subseteq A \mid 1 \in X\}.$$

1.45 Si $x \in y$ et $y \in z$, peut-on en déduire que $x \in z$?

1.46 Si $S \subseteq T$ et $T \subseteq U$, peut-on en déduire que $S \subseteq U$?

1.47 Si $S \subseteq T$, peut-on en déduire que $\mathcal{P}(S) \subseteq \mathcal{P}(T)$?

1.48 Décider – en justifiant votre réponse – si l'affirmation suivante est vraie ou fausse.

Si A et B sont deux ensembles finis et disjoints, alors $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$ sont disjoints.

1.49 Pour chacune des affirmations suivantes, décider si elle est vraie ou non.

- | | | |
|--|--|---|
| a) $1 \in \{1, \{1\}, 2, \{2\}\}$ | d) $\mathcal{P}(\{1\}) \subseteq \{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$ | g) $(\emptyset, \emptyset) \in \emptyset^2$ |
| b) $\{1, 2\} \in \{1, \{1\}, 2, \{2\}\}$ | e) $\emptyset \in \mathcal{P}(\{1\})$ | h) $\{0, 1\} \in \mathcal{P}(\{0, 1\})$ |
| c) $\{1, 2\} \subseteq \{1, \{1\}, 2, \{2\}\}$ | f) $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(\{1\})$ | i) $\{0, 1\} \subseteq \mathcal{P}(\{0, 1\})$ |

1.50 Soit l'ensemble $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ des chiffres décimaux. Pour chacune des affirmations suivantes, décider si elle est vraie ou non.

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\{3\} \in A$ | e) $9 \in A$ | i) $\{\{3, 9\}, \{3, 3\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ |
| b) $\{\{0, 2\}, \{4\}\} \in \mathcal{P}(A)$ | f) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(A)$ | j) $\{(5, 5)\} \subseteq A^2$ |
| c) $\{\emptyset\} \subseteq A$ | g) $(7, 7) \in A$ | k) $(1, 5, 9) \in A^3$ |
| d) $(1, 7) \in A^2$ | h) $\{(1, 7)\} \subseteq \mathcal{P}(A^2)$ | l) $\{2, -1, 0\} \subseteq A$ |

1.51 Soit l'ensemble $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Parmi les ensembles A , A^2 , $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(A)^2$ et $\mathcal{P}(A^2)$,

- lesquels admettent $\{4\}$ comme élément ?
- lesquels admettent $\{(2, 6)\}$ comme sous-ensemble ?
- lesquels admettent $(\{8\}, \{8\})$ comme élément ?
- lesquels admettent $\emptyset$ comme sous-ensemble ?
- lesquels admettent $\{\emptyset\}$ comme élément ?
- lesquels admettent $\{\{0, 8\}\}$ comme sous-ensemble ?

1.52 Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Parmi les ensembles A , A^2 , $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(A^2)$, $\mathcal{P}(A)^2$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$,

- lesquels admettent $(3, 5)$ comme élément ?

- b) lesquels admettent $\{\{4, 1\}\}$ comme sous-ensemble ?
- c) lesquels admettent $\{\{3\}, \{5\}\}$ comme élément ?
- d) lesquels admettent $\{(4, 2)\}$ comme sous-ensemble ?
- e) lesquels admettent $\emptyset$ comme élément ?
- f) lesquels admettent $\{1, 3\}$ comme sous-ensemble ?
- g) lesquels admettent $(\{4, 3\}, \{\emptyset\})$ comme élément ?
- h) lesquels admettent $\{\emptyset, \{5\}\}$ comme sous-ensemble ?

1.53 Soit $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ l'ensemble des chiffres impairs. Dans chacun des cas qui suivent, décider si le losange peut être remplacé par une appartenance, une inclusion, les deux ou aucune des deux.

- | | |
|--|---|
| a) $A \diamond \mathcal{P}(A)$ | e) $\mathbb{Z} \diamond \mathbb{R}^2$ |
| b) $\{3, 9\} \diamond A$ | f) $\{\emptyset\} \diamond \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ |
| c) $A \diamond \mathbb{N}$ | g) $\{\{3, 5\}, \{1, 7, 9\}\} \diamond \mathcal{P}(A)$ |
| d) $\emptyset \diamond \mathcal{P}(A)$ | h) $\{(1, 3, 7)\} \diamond A^2$ |

1.54 Une société de développement informatique a passé une annonce pour recruter un nouveau développeur. Afin d'aider le responsable des ressources humaines de la société, les noms des candidat.e.s ont été introduits dans une base de données et les trois listes suivantes ont été créées :

- ▷ une liste A contenant les noms des candidat.e.s ayant déjà fait du développement sous Linux,
- ▷ une liste B contenant les noms des candidat.e.s ayant déjà fait du développement sous MacOS,
- ▷ une liste C contenant les noms des candidat.e.s ayant déjà fait du développement sous Windows.

Formuler à l'aide du langage ensembliste (c.-à-d. à l'aide des opérations sur les ensembles) une requête permettant au responsable des ressources humaines de sélectionner tous les candidat.e.s qui n'ont de l'expérience de développement que sous un seul système d'exploitation.

1.55 Dans une classe, un sondage a montré que les trois activités sportives les plus pratiquées sont l'aïkido (pratiqué par un sous-ensemble A des étudiant.e.s), le *bare foot* (sous-ensemble B) et la chute libre (sous-ensemble C). En utilisant les opérations sur les ensembles, proposer une formule permettant de calculer, à partir des sous-ensembles A , B et C précédents, l'ensemble D des personnes pratiquant exactement deux de ces trois activités sportives.

1.56 Dans chacun des cas suivants, déterminer (et justifier) quelle condition, la plus générale possible, doivent satisfaire les ensembles A et B pour que l'égalité soit vérifiée.

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------|
| a) $A \triangle B = \emptyset$ | b) $A \setminus (A \setminus B) = B$ | c) $ A \cup B = A + B $ |
|--------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------|

1.57 Déterminer les trois parties A , B et C de $\mathbb{N}$ vérifiant

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|
| ▷ $1 \in A$ | ▷ $A \cap B \not\subseteq C$ |
| ▷ $\{2, 4\} \cap B = \emptyset$ | ▷ $B \cup C \not\subseteq A$ |
| ▷ $3 \in A \cap B \cap C$ | ▷ $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$ |
| ▷ $4 \in A \cap C$ | |

- 1.58** Déterminer les éléments de l'univers Ω et ceux de ses trois sous-ensembles A , B et C en sachant que

$$\triangleright \overline{A \cup B \cup C} = \{1, 8, 12\}$$

$$\triangleright A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

$$\triangleright B \cap C = \emptyset$$

$$\triangleright A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 10, 11\}$$

$$\triangleright A \cap C = \{5\}$$

$$\triangleright \overline{B} = \{1, 2, 5, 6, 8, 10, 11, 12\}$$

Détailler clairement chaque étape de votre résolution.

- 1.59** Dans un groupe de 26 personnes, 9 n'ont ni piercings ni tatouages alors que, parmi les 12 personnes tatouées, 4 ont également des piercings. Combien de personnes du groupe ont-elles des piercings (peu importe qu'elles aient également des tatouages ou non) ?

- Modéliser la situation et retranscrire les informations fournies à l'aide du langage ensembliste.
- À l'aide de votre modélisation et en détaillant, expliquant et commentant correctement votre démarche de résolution, déterminer le nombre de personnes du groupe ayant des piercings

- 1.60** Pour les ensembles $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, déterminer le cardinal des ensembles

$$\text{a) } \mathcal{P}(A \cap B) \quad \text{b) } \mathcal{P}(A \cup B) \quad \text{c) } \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \quad \text{d) } \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

INDICATION. Utiliser les résultats des exercices 1.26 et 1.36.

- 1.61** Soient A , B et C trois ensembles (dans un univers Ω), montrer que $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

- à l'aide de diagrammes de Venn,
- à l'aide d'une table d'appartenance,
- en montrant que chaque côté de l'égalité est un sous-ensemble de l'autre.

- 1.62** Soient A , B et C trois ensembles (dans un univers Ω). Décider si l'identité suivante est valide ou non à l'aide d'une table d'appartenance.

$$A \cup (B \triangle C) = (A \triangle B) \cup (A \triangle C).$$

- 1.63** Soient A et B deux ensembles (dans un univers Ω), vérifier l'identité suivante en utilisant les définitions et les propriétés des opérations ensemblistes. Préciser à chaque transformation la définition ou la propriété utilisée.

$$\overline{A} \triangle \overline{B} = A \triangle B.$$

- 1.64** Soient A et B deux ensembles vérifiant

$$|A| = 7, \quad |B| = 6 \quad \text{et} \quad |A \triangle B| = 5.$$

Déterminer, en précisant les étapes intermédiaires de calcul,

$$\text{a) } |A \cap B|, \quad \text{b) } |A^2 \times B|, \quad \text{c) } |\mathcal{P}(B)|, \quad \text{d) } |\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)|.$$

- 1.65** Soient A et B deux ensembles vérifiant

$$|A| = 8, \quad |B| = 10 \quad \text{et} \quad |A \cup B| = 12.$$

Déterminer, en expliquant et en détaillant les étapes intermédiaires de calcul,

- a) $|B \setminus A|$, b) $|A \times B|$, c) $|\mathcal{P}(A)|$, d) $|\mathcal{P}(A) \triangle \mathcal{P}(B)|$.

1.66 Soient les ensembles $I = [0, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$, $J = [2, 3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\}$ et $K = \{0, 2, 4\}$. Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère les ensembles

- a) $I \times K$ b) $K \times \mathbb{R}_+$ c) $I^2 \setminus (\mathbb{R} \times J)$

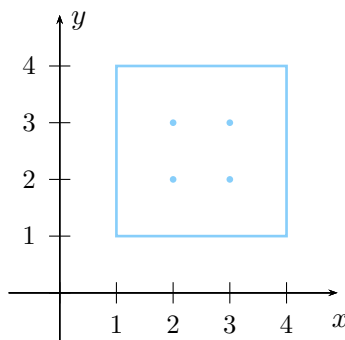
1.67 Soient les ensembles

- 1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 4) $D = \{2, 3\}$,
 2) $B = [1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$, 5) $E = [2, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$,
 3) $C =]1, 4[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$, 6) $F =]2, 3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$.

a) Représenter, dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien, les ensembles

- i) $(C \setminus F) \times D$, ii) $(B \times E) \triangle (E \times B)$.

b) À l'aide des ensembles proposés, et uniquement de ceux-là, exprimer l'ensemble représenté ci-dessous.



1.68 Soient les ensembles

- 1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 4) $D = \{2, 3\}$,
 2) $B = [1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$, 5) $E = [2, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$,
 3) $C =]1, 4[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$, 6) $F =]2, 3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$.

Représenter, dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien, les ensembles

- a) $A \times F$, b) $A^2 \setminus C^2$, c) $(B \triangle E)^2$.

1.69 Pour les quatre ensembles

$$A = \{0, 1\}, \quad B = \{-1, 1\}, \quad C = \{-2, 0, 2\} \quad \text{et} \quad D = \{0, 2, 4\}$$

déterminer

- a) $\mathcal{P}(B)$, c) $(D \setminus C) \times (A \cup B)$,
 b) $A \triangle B \triangle C \triangle D$, d) $\{X \subseteq D \mid X \notin \mathcal{P}(C)\}$.

1.70 Pour A et B deux ensembles finis de cardinal respectif n et m , déterminer le cardinal de

- a) $\mathcal{P}(A \times B)$ b) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ c) $\mathcal{P}(A^k)$, $k \geq 1$

1.71 Paradoxe de Russell

Soit S l'ensemble contenant tous les ensembles X qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes :

$$S = \{X \mid X \notin X\}.$$

a) Pour chacun des ensembles X suivants, décider s'il appartient ou non à S :

$$X = \emptyset, \quad X = \{\text{Oui}, \text{Non}\}, \quad X = \{1, \{1\}\}, \quad X = \mathbb{N}.$$

- b) Montrer que l'affirmation $S \in S$ conduit à une contradiction.
 c) Montrer que l'affirmation $S \notin S$ conduit, également, à une contradiction.
-

1.8 Solutions d'exercices choisis

- 1.1** a) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ c) $C = \emptyset$
 b) $B = \{-3, -1, 1, 3\}$ d) $D = \{-1, 0\}$
- 1.2** a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ c) $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 b) $B = \emptyset$ d) $D = \{-4, 4\}$
- 1.3** a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ c) $C = \{0, 1, 2, 3\}$
 b) $B = \{-3, -1, 1\}$ d) $D = \{0, 3\}$
- 1.4** a) $\{1\} \notin \{0, 1\}$ d) $2 \in \{0, 1, 2\}$ g) $\emptyset \notin \emptyset$
 b) $\{-1\} \in \{\{-1\}, \{1\}\}$ e) $1 \notin \{\{1\}\}$ h) $0 \notin \emptyset$
 c) $\{1, 2\} \notin \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ f) $2 \notin \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ i) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
- 1.5** $A = B = D = \{-1, 0, 1\}$ mais $C = \{0\}$
- 1.6** $A = D = \{0, 3\}$, $B = C = G = H = \{3\}$, $E = \emptyset$ et $F = \{0\}$
- 1.7** a) $\{3, 6\} \subseteq \{3, 4, 5, 6\}$ c) $\{\{2\}\} \subseteq \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ e) $\emptyset \subseteq \mathbb{Z}$
 b) $\{3\} \not\subseteq \{\{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ d) $\{2, 4\} \subseteq \{2, 4\}$ f) $\emptyset \subseteq \emptyset$
- 1.8** a) $\{3, 6\} \subset \{3, 4, 5, 6\}$ d) $\{\{4\}\} \not\subseteq \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ g) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$
 b) $\{3, 4\} \not\subset \{3, 4\}$ e) $\emptyset \not\subset \emptyset$ h) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$
 c) $\{2, 3\} \not\subseteq \{\{2\}, \{3\}\}$ f) $\{\emptyset\} \not\subseteq \emptyset$ i) $\emptyset \subset \mathbb{Z}$
- 1.9** Oui, par exemple $A = \{1\}$ et $B = \{1, \{1\}\}$ ou, plus simplement, $A = \emptyset$ et $B = \{\emptyset\}$.
- 1.12** a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ d) $B \setminus A = \{5, 9\}$ g) $A \setminus C = \{2, 4\}$
 b) $A \cap B = \{1\}$ e) $(A \cup B) \cap C = \{1, 3\}$ h) $(A \setminus C) \setminus B = \{2, 4\}$
 c) $A \setminus B = \{2, 3, 4\}$ f) $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\}$ i) $A \setminus (C \setminus B) = \{1, 2, 4\}$
- 1.13** a) $A \triangle B = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$ c) $C \triangle C = \emptyset$
 b) $B \triangle A = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\} = A \triangle B$ d) $C \triangle \emptyset = C$
- 1.14** a) $A \triangle (B \triangle C) = \{2, 5, 8\}$ d) $(A \cup B) \triangle (A \cup C) = \{8\}$
 b) $(A \triangle B) \triangle C = \{2, 5, 8\}$ e) $A \cap (B \triangle C) = \{1, 3, 4, 6\}$
 c) $A \cup (B \triangle C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ f) $(A \cap B) \triangle (A \cap C) = \{1, 3, 4, 6\}$
- 1.15** a) $B \subseteq A$ c) $A \cap B = \emptyset$ e) $A = B$ g) $A \subseteq B$
 b) $A \subseteq B$ d) Toujours vrai f) $A = B$ h) $B = \emptyset$

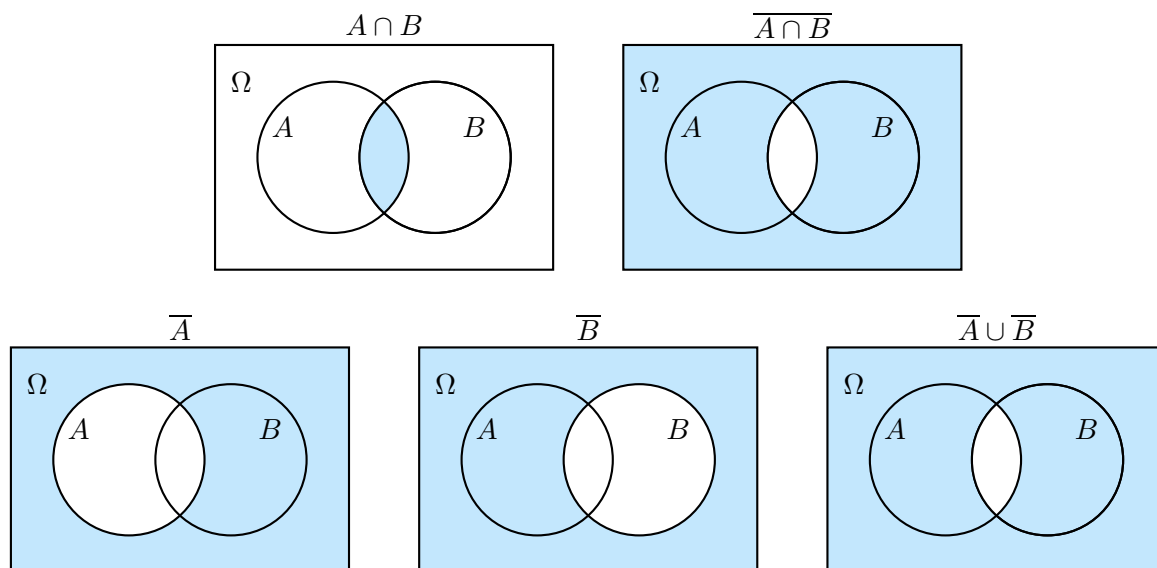
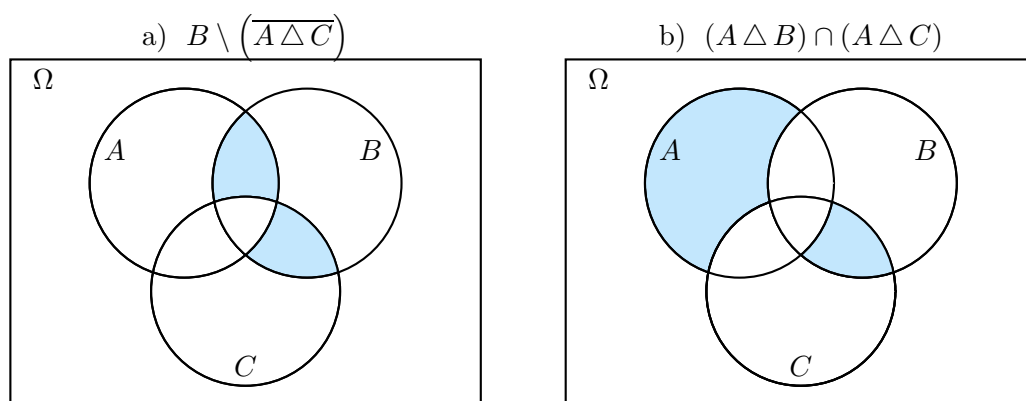


Figure 1.3 – Vérification de la deuxième loi de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ à l'aide de diagrammes de Venn. Les surfaces pleines représentent le résultat des différentes opérations. La validité de la loi résulte de l'égalité des deux diagrammes de droite.

1.16



1.17 a) Voir figure 1.3.

b) L'identité est vraie car les colonnes 4 et 7 de la table d'appartenance qui suit sont identiques.

A	B	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A \cup B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

c) Premièrement, supposons que $x \in \overline{A \cap B}$. Il s'en suit que $x \notin A \cap B$, c'est-à-dire que $x \notin A$ ou $x \notin B$. Dit autrement, $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$. Ainsi $x \in \overline{A \cup B}$ et $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Supposons maintenant que $x \in \overline{A \cup B}$. On doit avoir $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$, c.-à-d. $x \notin A$ ou $x \notin B$. Il s'en suit que $x \notin A \cap B$ et donc $x \in \overline{A \cap B}$. Ceci montre que $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A \cap B}$ et la propriété est vérifiée.

- 1.18** b) L'identité est vraie car les colonnes 5 et 8 de la table d'appartenance qui suit sont identiques.

A	B	C	$B \cup C$	$A \setminus (B \cup C)$	$A \setminus B$	$A \setminus C$	$(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0

- c) L'identité $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ est vraie car on a d'une part

$$\begin{aligned}
 A \setminus (B \cup C) &= A \cap \overline{(B \cup C)} && \text{(définition de la différence : } S \setminus T = S \cap \overline{T} \text{)} \\
 &= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) && \text{(1^{re} loi de De Morgan)} \\
 &= A \cap \overline{B} \cap \overline{C} && \text{(associativité de l'intersection)}
 \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
 (A \setminus B) \cap (A \setminus C) &= (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) && \text{(déf. de la différence)} \\
 &= A \cap \overline{B} \cap A \cap \overline{C} && \text{(associativité de l'intersection)} \\
 &= (A \cap A) \cap \overline{B} \cap \overline{C} && \text{(commutativité et associativité de } \cap \text{)} \\
 &= A \cap \overline{B} \cap \overline{C} && \text{(idempotence : } A \cap A = A \text{)}
 \end{aligned}$$

1.19 a) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap \overline{(A \cap \overline{B})}$ (définition de la différence : $S \setminus T = S \cap \overline{T}$)

$$\begin{aligned}
 &= A \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) && \text{(2^e loi de De Morgan)} \\
 &= A \cap (\overline{A} \cup B) && \text{(involution)} \\
 &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) && \text{(distributivité de } \cap \text{)} \\
 &= \emptyset \cup (A \cap B) && \text{(complémentarité)} \\
 &= A \cap B && \text{(identité)}
 \end{aligned}$$

- b) Premier développement :

$$\begin{aligned}
 (A \setminus B) \triangle B &= (A \cap \overline{B}) \triangle B && \text{(déf. de la différence)} \\
 &= ((A \cap \overline{B}) \setminus B) \cup (B \setminus (A \cap \overline{B})) && \text{(déf. de la différence sym.)} \\
 &= (A \cap \overline{B} \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{(A \cap \overline{B})}) && \text{(déf. de la différence)} \\
 &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{(A \cap \overline{B})}) && \text{(idempotence : } \overline{B} \cap \overline{B} = \overline{B} \text{)} \\
 &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}})) && \text{(De Morgan)} \\
 &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap (\overline{A} \cup B)) && \text{(involution : } \overline{\overline{B}} = B \text{)} \\
 &= (A \cap \overline{B}) \cup B && \text{(absorption)} \\
 &= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) && \text{(distributivité de } \cup \text{)} \\
 &= (A \cup B) \cap \Omega && \text{(complémentarité)} \\
 &= A \cup B && \text{(identité)}
 \end{aligned}$$

Autre développement possible :

$$\begin{aligned}
 (A \setminus B) \triangle B &= (A \cap \overline{B}) \triangle B && \text{(déf. de la différence)} \\
 &= ((A \cap \overline{B}) \setminus B) \cup (B \setminus (A \cap \overline{B})) && \text{(déf. de la diff. sym.)} \\
 &= (A \cap \overline{B} \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{(A \cap \overline{B})}) && \text{(déf. de la différence)} \\
 &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{(A \cap \overline{B})}) && \text{(idempotence)} \\
 &= ((A \cap \overline{B}) \cup B) \cap ((A \cap \overline{B}) \cup \overline{(A \cap \overline{B})}) && \text{(distributivité de } \cup \text{)} \\
 &= ((A \cap \overline{B}) \cup B) \cap \Omega && \text{(complémentarité)} \\
 &= (A \cap \overline{B}) \cup B && \text{(identité)} \\
 &= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) && \text{(distributivité de } \cup \text{)} \\
 &= (A \cup B) \cap \Omega && \text{(complémentarité)} \\
 &= A \cup B && \text{(identité)}
 \end{aligned}$$

1.20 a) Non, la différence de deux ensembles n'est pas une opération commutative. Les points c) et d) de l'exercice 1.12 fournissent un contre-exemple. Plus généralement, selon le point e) de l'exercice 1.14, on a $A \setminus B = B \setminus A$ uniquement dans le cas où les ensembles A et B sont égaux.

b) Non, la différence ensembliste n'est pas associative. Les points h) et i) de l'exercice 1.12 fournissent un contre-exemple.

1.21 a) Oui, la différence symétrique de deux ensembles est une opération commutative. Cela découle de la définition même de l'opération, la construction « soit ... soit ... » étant commutative.

b) Oui, la différence symétrique est une opération associative. Pour trois ensembles, le résultat est formé des éléments appartenant à un seul de ces ensembles ou aux trois. **Plus généralement, pour k ensembles, leur différence symétrique est formée des éléments appartenant à un nombre impair de ces ensembles et uniquement à un nombre impair.**

1.22 La différence ne se distribue pas, à gauche, sur l'union comme le montre la table d'appartenance qui suit dont les colonnes 5 et 8 ne sont pas identiques.

A	B	C	$B \cup C$	$A \setminus (B \cup C)$	$A \setminus B$	$A \setminus C$	$(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0

En revanche la différence se distribue, à droite, sur l'union comme le montre la table d'appartenance qui suit dont les colonnes 5 et 8 sont identiques.

A	B	C	$A \cup B$	$(A \cup B) \setminus C$	$A \setminus C$	$B \setminus C$	$(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0

- 1.23** a) A est fini ($A = \emptyset$) et $|A| = 0$
 b) B est fini et $|B| = 26$
 c) C est infini ($C =]0, 1[$)
 d) D est infini ($D = \{x \mid x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$)
- 1.24** a) $|\{4\}| = 1$ e) $|\emptyset| = 0$
 b) $|\{\{4\}\}| = 1$ f) $|\{\emptyset\}| = 1$
 c) $|\{4, \{4\}\}| = 2$ g) $|\{\emptyset, \{4\}\}| = 2$
 d) $|\{4, \{4\}, \{4, 4\}\}| = 2$ h) $|\{4, \{4\}, \{4, \{4\}\}\}| = 3$
- 1.25** a) 32 b) 29 c) Données incohérentes
- 1.26** $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- 1.27** $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
- 1.28** $|A \triangle B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$
- 1.29** $|A \triangle B \triangle C| = |A| + |B| + |C| - 2|A \cap B| - 2|A \cap C| - 2|B \cap C| + 4|A \cap B \cap C|$
- 1.30** a) $\mathcal{P}(\{0\}) = \{\emptyset, \{0\}\}$
 b) $\mathcal{P}(\{x, y, z\}) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$
 c) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
 d) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0\})) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{0\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \{\emptyset, \{0\}\}\}$
- 1.31** L'ensemble A possède $2^n - 2$ sous-ensembles propres et non vides.
- 1.32** Il est possible de former 1023 groupes non vides ne comprenant que des élèves ne portant pas de lunettes.
- 1.33** Il existe 26 groupes de cardinal au moins égal à deux et composés uniquement de membres du club possédant les 3 licences.
- 1.34** a) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$
 b) $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{-1\}, \{1\}, \{-1, 1\}\}$
 c) $\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, \{-1, 0, 1\}\}$
 d) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}\}$
 e) $\mathcal{P}(A \cap B) = \{\emptyset, \{1\}\}$
 f) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}\}$
- 1.35** a) $\{X \subseteq A \mid X \in \mathcal{P}(B)\} = \{\emptyset, \{1\}\}$
 b) C'est le même ensemble qu'au point a)
 c) C'est le même ensemble qu'aux points a) et b)
 d) $\{X \subset B \mid X \notin \mathcal{P}(A)\} = \{\{-1\}\}$
- 1.36** a) Quels que soient les ensembles A et B on a toujours

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$$

car on a la suite d'équivalences et d'implications

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) &\iff X \in \mathcal{P}(A) \text{ ou } X \in \mathcal{P}(B) &\iff X \subseteq A \text{ ou } X \subseteq B \\ &\implies X \subseteq A \cup B &\iff X \in \mathcal{P}(A \cup B). \end{aligned}$$

Mais il n'y a pas égalité en général (voir les points c) et d) de l'exercice 1.34 pour un contre-exemple). En fait il y a égalité si et seulement si l'un des deux ensembles est inclus dans l'autre car s'il existe $a \in A \setminus B$ et $b \in B \setminus A$, la paire $\{a, b\}$ est un élément de $\mathcal{P}(A \cup B)$ mais pas de $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

b) Quels que soient les ensembles A et B on a toujours

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$$

car on a la suite d'équivalences

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) &\iff X \in \mathcal{P}(A) \text{ et } X \in \mathcal{P}(B) \iff X \subseteq A \text{ et } X \subseteq B \\ &\iff X \subseteq A \cap B \iff X \in \mathcal{P}(A \cap B). \end{aligned}$$

1.37 Il n'y a jamais égalité car, quels que soient les ensembles A et B , l'ensemble vide est toujours élément de $\mathcal{P}(A \setminus B)$ mais n'est jamais élément de $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

1.38 a) $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$

b) $B \times A = \{(x, a), (y, a), (x, b), (y, b), (x, c), (y, c)\}$

c) $A \times B \times C = \{(a, x, 0), (a, x, 1), (a, y, 0), (a, y, 1), (b, x, 0), (b, x, 1), (b, y, 0), (b, y, 1), (c, x, 0), (c, x, 1), (c, y, 0), (c, y, 1)\}$

d) $C^2 \times B = C \times C \times B = \{(0, 0, x), (0, 0, y), (0, 1, x), (0, 1, y), (1, 0, x), (1, 0, y), (1, 1, x), (1, 1, y)\}$

e) $C \times \emptyset = \emptyset$

f) $C \times \{\emptyset\} = \{(0, \emptyset), (1, \emptyset)\}$

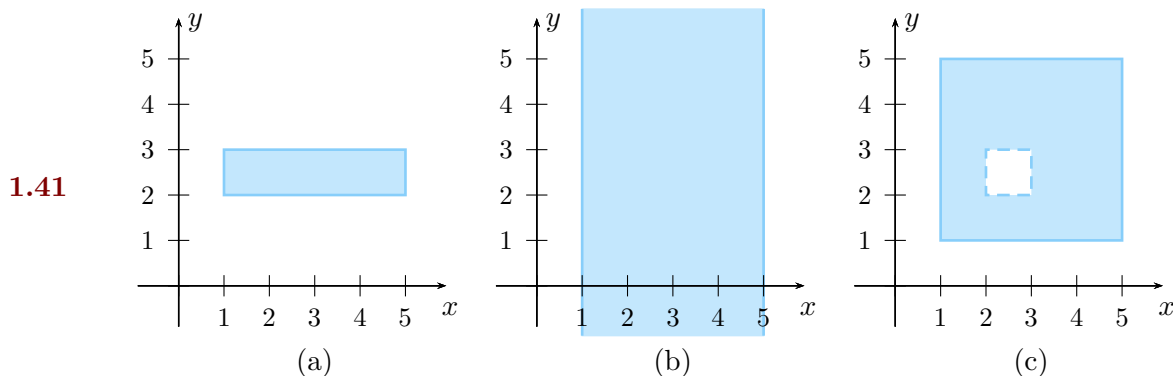
1.39 a) $|T \times U| = |T| \cdot |U| = 1 \cdot 2 = 2$

b) $|S^3| = |S|^3 = 3^3 = 27$

c) $|S \times \mathcal{P}(U)| = |S| \cdot |\mathcal{P}(U)| = |S| \cdot 2^{|U|} = 3 \cdot 2^2 = 12$

d) $|\mathcal{P}(T) \times \mathcal{P}(U)| = |\mathcal{P}(T)| \cdot |\mathcal{P}(U)| = 2^{|T|} \cdot 2^{|U|} = 2^1 \cdot 2^2 = 8$

1.40 Si les deux ensembles sont égaux ou si l'un des deux ensembles (au moins) est vide.



1.43 a) $(A \times B) \cup (B \times A)$

b) $(B^2 \setminus F^2) \cup (D \times E) \cup (E \times D)$

c) $((A \setminus F) \times B) \cup (B \times (A \setminus F)) \cup E^2$

1.44 $S = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

1.45 Non, contre-exemple : $x = 1$, $y = \{1\}$ et $z = \{\{1\}\}$, on a bien $x \in y$ et $y \in z$ mais $x \notin z$.

1.46 Oui, la relation d'inclusion est transitive : si tout élément de S est également élément de T et que simultanément tout élément de T est également élément de U alors tout élément de S est élément de U .

1.47 Oui, $X \in \mathcal{P}(S)$ si et seulement $X \subseteq S$ ainsi si $S \subseteq T$ on en déduit immédiatement, par transitivité de l'inclusion (voir l'exercice précédent), que $X \subseteq T$ autrement dit que $X \in \mathcal{P}(T)$.

1.48 L'affirmation est fausse. Deux ensembles des parties ne sont jamais disjoints car ils ont au minimum l'ensemble vide en commun.

- 1.49** a) $1 \in \{1, \{1\}, 2, \{2\}\}$ d) $\mathcal{P}(\{1\}) \not\subseteq \{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$ g) $(\emptyset, \emptyset) \notin \emptyset^2$
 b) $\{1, 2\} \notin \{1, \{1\}, 2, \{2\}\}$ e) $\emptyset \in \mathcal{P}(\{1\})$ h) $\{0, 1\} \in \mathcal{P}(\{0, 1\})$
 c) $\{1, 2\} \subseteq \{1, \{1\}, 2, \{2\}\}$ f) $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(\{1\})$ i) $\{0, 1\} \not\subseteq \mathcal{P}(\{0, 1\})$
- 1.50** a) $\{3\} \notin A$ e) $9 \in A$ i) $\{\{3, 9\}, \{3, 3\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$
 b) $\{\{0, 2\}, \{4\}\} \notin \mathcal{P}(A)$ f) $\{\emptyset\} \notin \mathcal{P}(A)$ j) $\{(5, 5)\} \subseteq A^2$
 c) $\{\emptyset\} \not\subseteq A$ g) $(7, 7) \notin A$ k) $(1, 5, 9) \in A^3$
 d) $(1, 7) \in A^2$ h) $\{(1, 7)\} \not\subseteq \mathcal{P}(A^2)$ l) $\{2, -1, 0\} \not\subseteq A$
- 1.51** a) $\mathcal{P}(A)$ c) $\mathcal{P}(A)^2$ e) Aucun
 b) A^2 d) Tous f) $\mathcal{P}(A)$
- 1.52** a) A^2 e) $\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(A^2)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$
 b) $\mathcal{P}(A)$ f) A
 c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ g) Aucun
 d) A^2 h) $\mathcal{P}(A)$
- 1.53** a) Appartenance uniquement e) Ni l'une ni l'autre
 b) Inclusion uniquement f) Appartenance et inclusion
 c) Inclusion uniquement g) Inclusion uniquement
 d) Appartenance et inclusion h) Ni l'une ni l'autre
- 1.54** $(A \triangle B \triangle C) \setminus (A \cap B \cap C)$ ou $(A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B))$ ou ...
- 1.55** $(A \cup B \cup C) \setminus (A \triangle B \triangle C)$ ou $((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C)$ ou ...
- 1.56** a) $A = B$ b) $B \subseteq A$ c) $A \cap B = \emptyset$
- 1.57** $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{1, 3\}$ et $C = \{2, 3, 4\}$
- 1.58** 1) $\Omega = B \cup \overline{B} = A \cup B) \cup \overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
 2) $B = \Omega \setminus \overline{B} = \{3, 4, 7, 9\}$
 3) $B \setminus (A \cup C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C) = \{7, 9\}$
 4) $B \setminus A = B \setminus (A \cup C) = \{7, 9\}$ car $B \cap C = \emptyset$
 5) $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A) = \{2, 3, 4, 5\}$
 6) $C \setminus A = (A \cup C) \setminus A = \{6, 10, 11\}$
 7) $C = (C \setminus A) \cup (A \cap C) = \{5, 6, 10, 11\}$
- 1.59** a) On définit les ensembles
- ▷ Ω égal au groupe de 26 personnes (l'univers du problème),
 - ▷ P égal à l'ensemble des personnes de Ω possédant des piercings,
 - ▷ T égal à l'ensemble des personnes de Ω possédant des tatouages.
- De l'énoncé on obtient
- ▷ $|\Omega| = 26$ (26 personnes dans le groupe),
 - ▷ $|\overline{P \cup T}| = 9$ (9 personnes n'ont ni piercings ni tatouages),
 - ▷ $|T| = 12$ (12 personnes sont tatouées)
 - ▷ $|P \cap T| = 4$ (4 personnes ont des tatouages et des piercings).

b) On cherche le nombre de personnes ayant des piercings, c.-à-d. le cardinal de P .

▷ On obtient facilement le cardinal de $P \cup T$:

$$|P \cup T| = |\Omega| - |\overline{P \cup T}| = 26 - 9 = 17.$$

▷ La formule d'inclusion-exclusion permet ensuite d'obtenir la valeur cherchée :

$$|P| = |P \cup T| + |P \cap T| - |T| = 17 + 4 - 12 = 9.$$

Le groupe compte donc 9 personnes avec des piercings.

1.60 a) $|\mathcal{P}(A \cap B)| = 2^{|A \cap B|}$ (thm. page 8)

$$= 2^3 = 8 \quad (A \cap B = \{0, 2, 4\})$$

b) $|\mathcal{P}(A \cup B)| = 2^{|A \cup B|}$ (thm. page 8)

$$= 2^8 = 256 \quad (A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\})$$

c) $|\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)| = |\mathcal{P}(A \cap B)|$ (ex. 1.36)

$$= 2^3 = 8 \quad (\text{point a})$$

d) $|\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)| = |\mathcal{P}(A)| + |\mathcal{P}(B)| - |\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)|$ (ex. 1.26)

$$= |\mathcal{P}(A)| + |\mathcal{P}(B)| - |\mathcal{P}(A \cap B)| \quad (\text{ex. 1.36})$$

$$= 2^{|A|} + 2^{|B|} - 2^{|A \cap B|} = 2^6 + 2^5 - 2^3$$

$$= 64 + 32 - 8 = 88$$

1.62 L'identité n'est pas valide comme le montre la table d'appartenance qui suit dont les colonnes 5 et 8 ne sont pas identiques.

A	B	C	$B \triangle C$	$A \cup (B \triangle C)$	$A \triangle B$	$A \triangle C$	$(A \triangle B) \cup (A \triangle C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0

1.64 a) On sait que $|A \triangle B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$ (ex. 1.28). Ainsi

$$|A \cap B| = \frac{|A| + |B| - |A \triangle B|}{2} = \frac{7 + 6 - 5}{2} = 4$$

b) $|A^2 \times B| = |A^2| \cdot |B| = |A|^2 \cdot |B| = 7^2 \cdot 6 = 49 \cdot 6 = 294$

c) $|\mathcal{P}(B)| = 2^{|B|} = 2^6 = 64$

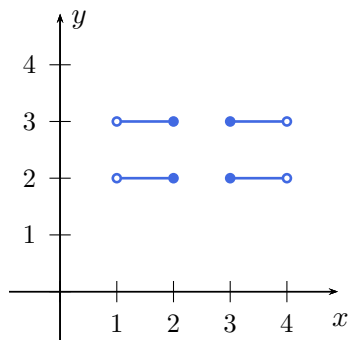
d) $|\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)| = |\mathcal{P}(A)| + |\mathcal{P}(B)| - |\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)|$ (ex. 1.26)

$$= |\mathcal{P}(A)| + |\mathcal{P}(B)| - |\mathcal{P}(A \cap B)| \quad (\text{ex. 1.36})$$

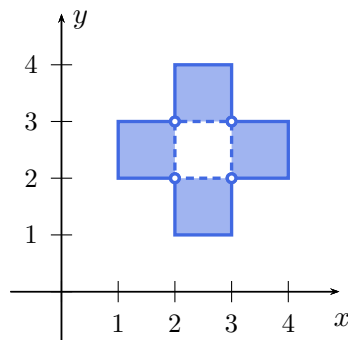
$$= 2^{|A|} + 2^{|B|} - 2^{|A \cap B|} = 2^7 + 2^6 - 2^4$$

$$= 128 + 64 - 16 = 176$$

1.67 a)



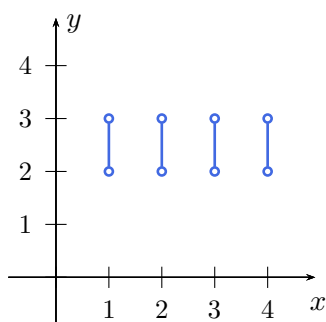
(i)



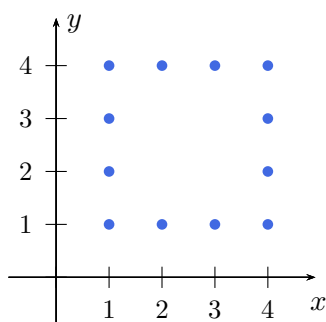
(ii)

 b) $(B^2 \setminus C^2) \cup D^2$

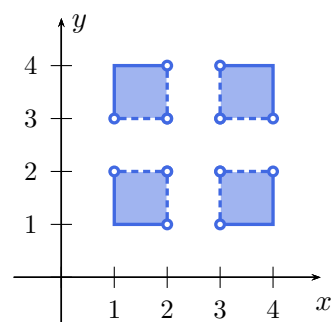
1.68



(a)



(b)



(c)

 1.69 a) $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{-1\}, \{1\}, \{-1, 1\}\}$

 b) $A \triangle B \triangle C \triangle D = \{-2, -1, 0, 4\}$ (ensemble des éléments appartenant à 1 ou 3 des 4 ensembles)

 c) $(D \setminus C) \times (A \cup B) = \{(4, -1), (4, 0), (4, 1)\}$

 d) $\{X \subseteq D \mid X \notin \mathcal{P}(C)\} = \{X \subseteq D \mid X \not\subseteq C\} = \{\{4\}, \{0, 4\}, \{2, 4\}, \{0, 2, 4\}\}$

 1.70 a) 2^{nm}

 b) $2^{(n+m)}$

 c) 2^{n^k} , $k \geq 1$

Relations



Relation de A vers B

Une **relation de l'ensemble A vers l'ensemble B** est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$.

Si R est une relation de A vers B et si $(a, b) \in R$, a est dit *en relation avec b* ou *lié à b* . On notera également $a R b$ si $(a, b) \in R$ et $a \not R b$ si $(a, b) \notin R$.



Relation sur A

Une **relation sur l'ensemble A** est une relation de l'ensemble A vers lui-même, c.-à-d. un sous-ensemble de $A^2 = A \times A$.

REMARQUE. Les relations étudiées ici sont en fait des relations *binaires* modélisant des propriétés entre les éléments de *deux* ensembles. Il existe également des relations ternaires, et plus généralement n -aires, représentant des liens entre les éléments de plus de deux ensembles.

2.1 Soient $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $B = \{-1, 0, 1\}$, pour chacune des relations suivantes de A vers B donner la liste complète des couples formant la relation.

- a) $R_1 = \{(a, b) \in A \times B \mid |a + 2b| \geq 2\}$
 - b) $R_2 = \{(a, b) \in A \times B \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a - b = 3k\}$
-

2.1 Graphe représentatif et matrice d'une relation



Graphe d'une relation de A vers B

Si A et B sont deux ensembles *finis*, on associe à la relation R de A vers B un *graphe orienté biparti* appelé le **graphe représentatif de R** :

- ▷ Chaque élément de A et de B est représenté par un point distinct (ce sont les **sommets** du graphe).
- ▷ Chaque couple (a, b) de R est représenté par une flèche reliant le sommet correspondant à a à celui correspondant à b (ce sont les **arcs** du graphe).

REMARQUE. L'adjectif biparti tient au fait que les sommets du graphe peuvent être répartis en deux sous-ensembles (le premier correspondant aux éléments de A et le second à ceux de B) tels que tous les arcs du graphe relient deux sommets appartenant à des sous-ensembles différents (voir figure 2.1).



Matrice d'une relation

Si A et B sont deux ensembles *finis*, on associe également à la relation R de A vers B une **matrice** $M(R)$ dont

- ▷ chaque ligne est associée à un élément de A ,
- ▷ chaque colonne est associée à un élément de B ,
- ▷ l'entrée à l'intersection de la ligne associée à l'élément $a \in A$ et de la colonne associée à l'élément $b \in B$ est égale à 1 si $(a, b) \in R$ et 0 sinon.

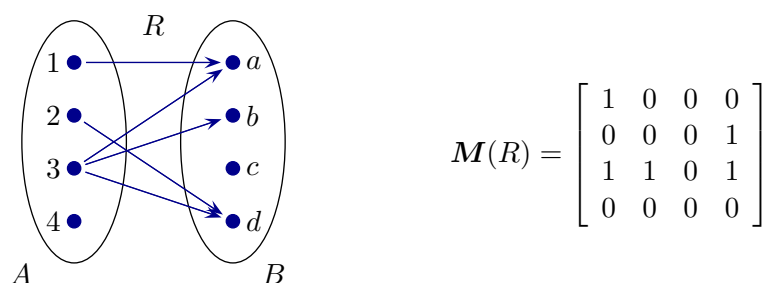


Figure 2.1 – Graphe représentatif (à gauche) et matrice $M(R)$ (à droite) de la relation $R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$ de l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$ vers l'ensemble $B = \{a, b, c, d\}$.

2.2 Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{x, y, z\}$, pour chacune des relations suivantes de A vers B donner sa matrice ainsi que son graphe représentatif.

- a) $R_1 = \{(1, y), (1, z), (3, y), (4, x), (4, z)\}$
- b) $R_2 = \{(1, x), (2, y), (3, z), (4, x), (4, y), (4, z)\}$



Graphe d'une relation sur A

Si R est une relation sur un ensemble A *fini*, le graphe biparti défini précédemment contient deux sommets pour chaque élément de A . On préférera associer à une telle relation un **graphe représentatif** où chaque élément de A est représenté par un seul sommet et où deux sommets sont reliés par un arc lorsque les éléments correspondant de A sont en relation.

REMARQUE. Le graphe représentatif d'une relation R sur un ensemble A s'obtient en fusionnant les deux sommets associés à chaque élément de A dans la représentation bipartie. À chaque fois qu'un élément est en relation avec lui-même on obtient alors un arc reliant un sommet à lui-même. Un tel arc est appelé une **boucle** (voir la figure 2.2 pour un exemple).

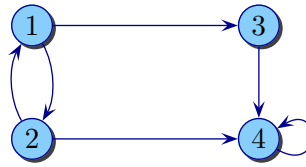


Figure 2.2 – Graphe de la relation $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$ sur l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

2.3 Pour chacune des relations suivantes sur l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$, donner sa matrice ainsi que son graphe représentatif.

a) $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ b) $R_2 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$

2.4 Sur l'ensemble $A = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$ on considère les deux relations R et S données par les matrices ci-dessous. Pour chacune d'elles, donner la liste des couples formant la relation ainsi que le graphe associé.

a) $M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $M(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2.2 Opérations sur les relations

Une relation étant un ensemble (de couples), on peut effectuer sur des relations les mêmes opérations que sur des ensembles quelconques. Ainsi, si R et S sont deux relations de A vers B , on peut définir de nouvelles relations de A vers B en prenant l'union $R \cup S$, l'intersection $R \cap S$, la différence $R \setminus S$ ou, encore, la différence symétrique $R \triangle S$ de R et S .

Outre les transformations précédentes, il existe des opérations plus spécifiques aux relations, comme le passage aux relations complémentaire ou inverse, présenté ci-dessous, ou la composition de relations, objet du prochain paragraphe.



Relation complémentaire

Si R est une relation de A vers B , la **relation complémentaire de R** , notée $\overline{R}$, est la relation de A vers B formée de l'ensemble des couples $(a, b) \in A \times B$ n'appartenant pas à R :

$$\overline{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \in A \times B \mid (a, b) \notin R\} = (A \times B) \setminus R.$$



Relation inverse

Si R est une relation de A vers B , on définit la **relation inverse de R** , notée R^{-1} , comme la relation de B vers A formée de tous couples $(b, a) \in B \times A$ pour lesquels a est en relation avec b par R :

$$R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}.$$

- 2.5** Déterminer la relation complémentaire $\overline{R}$ et la relation inverse R^{-1} de la relation « plus petit que » sur $\mathbb{N}$, c.-à-d. de la relation

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < y\}.$$

- 2.6** Pour chacune des relations de l'exercice 2.2, donner la relation complémentaire ainsi que son graphe représentatif et la matrice associée.
- 2.7** Si R est une relation de A vers B , quelle transformation permet de passer de la matrice $M(R)$ à la matrice $M(\overline{R})$?
- 2.8** Pour chacune des relations de l'exercice 2.2, donner la relation inverse ainsi que son graphe représentatif et la matrice associée.
- 2.9** Si R est une relation de A vers B , quelle transformation permet de passer de la matrice $M(R)$ à la matrice $M(R^{-1})$?

Compositions de relations



Relation composée

Si R une relation de A vers B et S une relation de B vers C , la **composition** de R par S , notée $S \circ R$, est la relation de A vers C formée des couples $(a, c) \in A \times C$ pour lesquels il existe (au moins) un élément $b \in B$ avec $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in S$:

$$S \circ R \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ avec } (a, b) \in R \text{ et } (b, c) \in S\}.$$



Exemple

Soient les ensembles $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ et $C = \{x, y, z\}$ ainsi que les relations $R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$ de A vers B et $S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$ de B vers C . La composition de R et S est la relation de A vers C égale à

$$S \circ R = \{(2, z), (3, x), (3, z)\}.$$

La figure 2.3 illustre le calcul de $S \circ R$ à l'aide des graphes représentatifs de R et S .

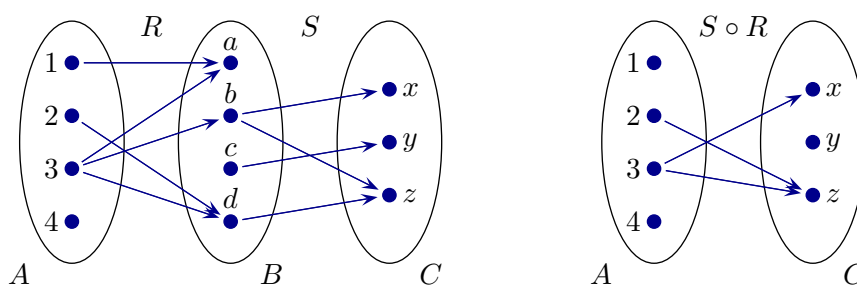


Figure 2.3 – Calcul de la composition de deux relations à l'aide de leur graphe représentatif.

★ Calcul de la matrice d'une composition

Si les ensembles A , B et C sont *finis*, la matrice $M(S \circ R)$ de la composition de R et S s'obtient en calculant le produit matriciel $M(R) \cdot M(S)$ des matrices des deux relations et en remplaçant dans ce produit les éléments supérieurs à 1 par 1.

✿ Exemple

Les matrices des relations R et S de l'exemple précédent sont

$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le produit matriciel $M(R) \cdot M(S)$ est

$$M(R) \cdot M(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et la matrice de la relation composée $S \circ R$ est

$$M(S \circ R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut composer plus de deux relations. Ainsi, si R est une relation de A vers B , S une relation de B vers C et T une relation de C vers D , la composition de R , S et T est la relation $T \circ S \circ R$ de A vers D obtenue en calculant, indifféremment,

$$(T \circ S) \circ R \quad \text{ou} \quad T \circ (S \circ R)$$

car la composition de relations est associative (mais pas commutative en général).

🔪 Puissance d'une relation

Si on compose une relation R sur un ensemble A avec elle-même, une ou plusieurs fois, on définit les **puissances de R** :

$$R^1 \stackrel{\text{def}}{=} R, \quad R^2 \stackrel{\text{def}}{=} R \circ R, \quad R^n \stackrel{\text{def}}{=} R^{n-1} \circ R = R \circ R^{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

2.10 En reprenant les relations de l'exercice 2.3, déterminer, à l'aide des graphes représentatifs bipartis, les relations

a) $R_2 \circ R_1$

b) $R_1 \circ R_2$

c) $(R_2)^2 = R_2 \circ R_2$

2.11 En reprenant les matrices des relations R et S de l'exercice 2.4, déterminer les matrices des relations

a) $S \circ R$

b) $R \circ S$

c) $R^2 = R \circ R$

2.12 Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers on considère la relation R formée de tous les couples (x, y) vérifiant

$$x + y \geq 0.$$

Déterminer

- a) la relation complémentaire $\overline{R}$,
- b) la relation inverse R^{-1} ,
- c) la relation composée $R^2 = R \circ R$.

2.13 On considère les quatre ensembles

$$A = \{a, b, c, d\}, \quad B = \{x, y, z\}, \quad C = \{i, j, k\}, \quad D = \{r, s, t, u, v\},$$

et les quatre relations entre les ensembles précédents

$$R = \{(a, z), (b, x), (b, y), (d, y)\}, \quad T = \{(x, j), (x, k), (y, i), (z, i), (z, k)\},$$

$$S = \{(a, t), (c, r), (c, v), (d, s), (d, t)\}, \quad U = \{(r, j), (s, i), (t, i), (v, j), (v, k)\}.$$

Pour chacune des compositions qui suivent, calculer la relation composée ou expliquer pourquoi elle n'existe pas.

- a) $U \circ S$ b) $\overline{R} \circ T$ c) $T \circ S \circ R^{-1}$ d) $T^{-1} \circ \overline{T}$

2.3 Propriétés des relations sur un ensemble

On classe les relations sur un ensemble à partir de quatre propriétés de base : la *réflexivité*, la *symétrie*, l'*antisymétrie* et la *transitivité*.



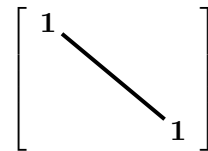
Réflexivité

Une relation R sur l'ensemble A est **réflexive** si chaque élément de A est en relation avec lui-même, c'est-à-dire si $(a, a) \in R$ pour tout élément $a \in A$.



Propriété. Si l'ensemble A est fini, une relation R sur A est réflexive si et seulement si la diagonale principale de la matrice $M(R)$ de la relation ne contient que des 1.

Par rapport au graphe représentatif de la relation, cela revient à dire que R est réflexive si et seulement si une boucle relie chaque sommet du graphe à lui-même.

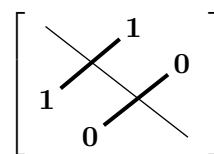


Symétrie

Une relation R sur l'ensemble A est **symétrique** si à chaque fois qu'un élément a est en relation avec un élément b on a aussi b en relation avec a , c'est-à-dire si $(a, b) \in R$ implique $(b, a) \in R$ quels que soient a et b dans A .

★ **Propriété.** Si l'ensemble A est fini, une relation R sur A est symétrique si et seulement si la matrice $M(R)$ de la relation est symétrique par rapport à sa diagonale principale.

Par rapport au graphe représentatif de la relation, cela revient à dire que R est symétrique si et seulement si entre deux sommets distincts il y a soit un arc dans chaque direction soit aucun arc (la présence ou l'absence de boucles sur les sommets n'a pas d'importance).



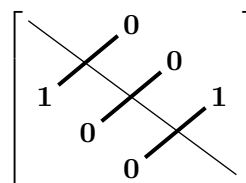
★ **Propriété.** Une relation R sur un ensemble A est symétrique si et seulement si $R = R^{-1}$.

Antisymétrie

Une relation R sur l'ensemble A est **antisymétrique** si pour toute paire d'éléments a et b distincts on n'a jamais a en relation avec b et b en relation avec a , c'est-à-dire si $(a, b) \in R$ et $a \neq b$ implique $(b, a) \notin R$ quels que soient a et b dans A .

★ **Propriété.** Si l'ensemble A est fini, une relation R sur A est antisymétrique si et seulement si, dans la matrice $M(R)$ de la relation, il n'existe pas deux 1 en symétrie par rapport à la diagonale principale :

Par rapport au graphe représentatif de la relation, cela revient à dire que R est antisymétrique si et seulement si il y a *au plus* un arc entre toute paire de sommets distincts (la présence ou l'absence de boucles sur les sommets n'a pas d'importance).



⚠ La symétrie et l'antisymétrie ne sont pas des propriétés opposées ! Il existe des relations à la fois symétriques et antisymétriques ainsi que des relations qui ne sont ni symétriques ni antisymétriques. Il n'est donc pas possible de conclure qu'une relation symétrique n'est pas antisymétrique et, encore moins, qu'une relation est automatiquement antisymétrique si elle n'est pas symétrique.

Transitivité

Une relation R sur l'ensemble A est **transitive** si à chaque fois qu'un élément a est en relation avec un élément b , lui-même en relation avec un élément c , on a aussi a en relation avec c , c'est-à-dire si $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in R$ implique $(a, c) \in R$ quels que soient a , b et c dans A .

★ Théorème

| Une relation R sur un ensemble A est transitive si et seulement si $R^2 \subseteq R$.

2.14 Pour chacune des relations R et S définies par les matrices de l'exercice 2.4, déterminer – en justifiant vos réponses – si elle est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.

- 2.15** Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers on considère la relation R formée de tous les couples (x, y) vérifiant

$$x + y \geq 0.$$

Déterminer – en justifiant vos réponses – si elle est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.

- 2.16** Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Pour chacune des relations suivantes sur A , déterminer – en justifiant vos réponses – si elle est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.

a) $R_1 = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$ c) $R_3 = \{(2, 4), (4, 2)\}$

b) $R_2 = \{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$ d) $R_4 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

- 2.17** Soient A un ensemble non vide et R une relation sur A . Décider, sans oublier d'argumenter votre réponse, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : Si la relation R est réflexive alors $R \subseteq R^2$.

2.4 Relations d'ordre



Relation d'ordre

Une relation R sur l'ensemble A est une **relation d'ordre** si elle est simultanément réflexive, antisymétrique et transitive.



Éléments comparables

Si R est une relation d'ordre sur A , deux éléments a et b de A sont dits **comparables** si a est en relation avec b ou si b est en relation avec a (voire les deux dans le cas particulier où $a = b$).



Ordre partiel et ordre total

Une relation d'ordre R sur l'ensemble A est

- ▷ un **ordre partiel** s'il existe au moins deux éléments de A non comparables,
- ▷ un **ordre total** ou **linéaire** si toute paire d'éléments de A est comparable.



Diagramme de Hasse

Si R est une relation d'ordre sur un ensemble fini A , le **diagramme de Hasse** de R est une simplification de son graphe représentatif obtenue

- ▷ en supprimant toutes les boucles (elles se déduisent de la réflexivité de la relation) ;
- ▷ en supprimant tous les arcs se déduisant par transitivité ;
- ▷ en positionnant les sommets du graphe de manière à ce que tous les arcs restants soient dirigés vers le haut ;
- ▷ en supprimant l'orientation des arcs (on parle alors d'*arêtes*), le sens de la relation étant toujours du sommet situé en bas vers celui situé en haut.

2.18 Pour chacune des relations sur l'ensemble $A = \{v, w, x, y, z\}$ données par les matrices ci-dessous, déterminer – en justifiant vos réponses – s'il s'agit d'une relation d'ordre. Dans l'affirmative, décider s'il s'agit d'un ordre partiel ou total et donner son diagramme de Hasse.

$$\text{a) } M(R_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } M(R_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } M(R_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } M(R_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.19 Comment se présente le diagramme de Hasse d'un ordre total ?

2.20 Déterminer les matrices M_1 et M_2 des relations d'ordre R_1 et R_2 définies par les diagrammes de Hasse suivants.

Diagramme de Hasse de R_1

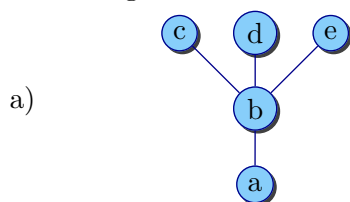
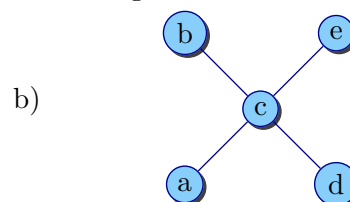


Diagramme de Hasse de R_2



2.21 Donner le diagramme de Hasse de la relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(\{x, y, z\})$.

2.22 Relation de divisibilité sur $\mathbb{N}^*$

L'entier n divise l'entier m si n est non nul et s'il existe un entier k tel que $m = kn$. Si n divise m , on note $n \mid m$.

- Montrer que la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}^*$ est une relation d'ordre.
- S'agit-il d'un ordre partiel ou total ?

2.23 Déterminer le diagramme de Hasse de la relation de divisibilité sur $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$.

2.24 Ordre lexicographique dans le plan $\mathbb{R}^2$

Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de nombres réels, on définit la relation R par

$$(a, b) R (c, d) \iff (a < c) \text{ ou } (a = c \text{ et } b \leq d).$$

Vérifier qu'il s'agit d'un ordre total sur $\mathbb{R}^2$.

INDICATION. Commencer par représenter graphiquement l'ensemble des points (a, b) vérifiant $(a, b) R (0, 0)$ puis l'ensemble des points (c, d) vérifiant $(0, 0) R (c, d)$.

2.25 Trier dans l'ordre lexicographique décroissant les triplets qui suivent en utilisant l'ordre naturel décroissant de chaque composante.

(1995, 22 février, Vaud)

(1995, 3 septembre, Jura)

(1994, 1^{er} mars, Fribourg)

(1996, 31 août, Neuchâtel)

(1995, 3 septembre, Vaud)

(1994, 17 mai, Genève)

(1996, 30 août, Vaud)

(1995, 1^{er} mars, Fribourg)

(1995, 22 février, Valais)

(1994, 10 décembre, Valais)

2.5 Relations d'équivalence



Relation d'équivalence

Une relation R sur l'ensemble A est une **relation d'équivalence** si elle est simultanément réflexive, symétrique et transitive.



Éléments équivalents

Si R est une relation d'équivalence sur l'ensemble A et si a et b sont deux éléments de A en relation (on a forcément a en relation avec b et b en relation avec a par symétrie de R), a et b sont dits **équivalents** pour la relation R .



Classe d'équivalence

Le sous-ensemble de A formé de tous les éléments équivalents à $a \in A$, pour la relation R , est appelé la **classe d'équivalence de a** et est noté $[a]_R$ ou, simplement, $[a]$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur la relation R .



Propriété

Deux classes d'équivalence $[a]$ et $[b]$ sont ou bien égales ou bien disjointes.



Partition

Une **partition** d'un ensemble A est une décomposition de A en sous-ensemble disjoints. Plus précisément, la collection $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ de sous-ensembles de A est une partition de A si et seulement si

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{si } i \neq j$$

et

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A.$$



Théorème.

Si R est une relation d'équivalence sur A , l'ensemble des classes d'équivalence de R forme une partition de A .

2.26 Parmi les relations suivantes sur l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes du département ce semestre, lesquelles sont des relations d'équivalence ?

- a) $R_1 = \{(a, b) \mid a \text{ et } b \text{ possèdent un ordinateur de la même marque}\}$
- b) $R_2 = \{(a, b) \mid a \text{ et } b \text{ ont le même groupe sanguin}\}$
- c) $R_3 = \{(a, b) \mid a \text{ et } b \text{ sont frères}\}$
- d) $R_4 = \{(a, b) \mid a \text{ et } b \text{ possèdent la même nationalité}\}$

2.27 Pour chacune des relations sur l'ensemble $A = \{v, w, x, y, z\}$ données par les matrices ci-dessous, déterminer – en justifiant vos réponses – s'il s'agit d'une relation d'équivalence. Dans l'affirmative, donner ses classes d'équivalence.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } M(R_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{c) } M(R_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \text{b) } M(R_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{d) } M(R_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

2.28 Relation de congruence modulo 5

Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ on considère la relation R définie par

$$a R b \iff a - b \text{ est un multiple de } 5.$$

- Montrer que R est une relation d'équivalence.
- Déterminer les classes d'équivalence de R .

2.29 Soit R la relation sur $\mathbb{N}^2$ définie par

$$(a, b) R (c, d) \iff a + d = b + c.$$

Vérifier que la relation R définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$. Donner ensuite les classes d'équivalence de $(0, 0)$, $(1, 2)$ et $(0, 1)$.

INDICATION. On peut aussi définir la relation R par : $(a, b) R (c, d) \iff a - b = c - d$.

2.6 Exercices supplémentaires et récapitulatifs

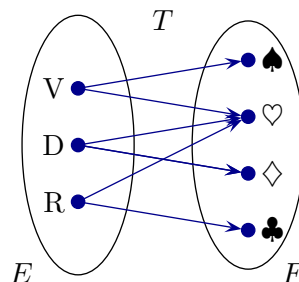
2.30 On considère les ensembles

$$E = \{V, D, R\} \quad \text{et} \quad F = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$$

ainsi que la relation S de E vers F

$$S = \{(V, \spadesuit), (D, \heartsuit), (D, \diamondsuit), (R, \spadesuit), (R, \clubsuit)\}$$

et la relation T , elle aussi de E vers F , de graphe



- Donner les matrices des relations S et T .
- Donner les matrices des relations $\overline{S}$ et T^{-1} .
- Calculer, à l'aide des matrices précédentes, la matrice de la relation $U = \overline{S} \circ T^{-1}$.
- Donner le graphe de la relation U .

- 2.31** On considère les ensembles $A = \{x, y\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ et $C = \{a, b, c\}$ ainsi que les relations R de A vers B et S de B vers C définies par

$$R = \{(x, 1), (x, 2), (y, 2), (y, 3), (y, 4)\}$$

et

$$S = \{(1, b), (1, c), (2, a), (2, c), (3, a), (3, c), (4, c)\}.$$

- a) Donner les graphes représentatifs de R et S .
 b) Donner les matrices associées à R et S .
 c) Calculer la matrice de la relation $S \circ R$ à l'aide des matrices de R et de S .
- 2.32** Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers, on considère la relation « plus grand que », c'est-à-dire la relation

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x > y\}.$$

Déterminer

- a) la relation complémentaire $\overline{R}$,
 b) la relation inverse R^{-1} ,
 c) la relation composée $R^2 = R \circ R$,
 d) la relation composée $R \circ R^{-1}$.
- 2.33** Soit R la relation sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x - y \leq 3\}.$$

Déterminer – en justifiant vos réponses – si la relation R est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.

- 2.34** Pour chacune des relations suivantes sur $\mathbb{Z}$, déterminer – en justifiant vos réponses – si elle est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.

- a) $R_1 = \{(x, y) \mid x \neq y\}$
 b) $R_2 = \{(x, y) \mid xy \geq 1\}$
 c) $R_3 = \{(x, y) \mid x \leq 2y\}$
 d) $R_4 = \{(x, y) \mid x = y + 1 \text{ ou } x = y - 1\}$
 e) $R_5 = \{(x, y) \mid x = y \text{ ou } x = -y\}$
 f) $R_6 = \{(x, y) \mid x + y = 4\}.$

- 2.35** Soient A et B deux ensembles finis et non vides avec $|A| = n$ et $|B| = m$. Combien existe-t-il de relations de A vers B ?

- 2.36** Soit A un ensemble non vide de cardinal égal à n . Déterminer

- a) le nombre de relations sur A ,
 b) le nombre de relations symétriques sur A .

- 2.37** Trouver l'erreur dans la « démonstration » suivante qu'une relation R à la fois symétrique et transitive est également réflexive.

Supposons la relation R symétrique et transitive. Alors $x R y \Rightarrow y R x$ par symétrie. De plus, puisqu'on a $x R y$ et $y R x$, on a aussi $x R x$ par transitivité. Ainsi R est réflexive.

- 2.38** Soient $A = \{a, b, c, d\}$ et R la relation sur A donnée par

$$R = \{(a, a), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}.$$

- a) Donner la matrice $\mathbf{M}(R)$ de la relation R .
 b) Calculer la matrice $\mathbf{M}(R^2)$ de la relation $R^2 = R \circ R$.
 c) La relation R est-elle transitive ? Justifier votre réponse.

Table 2.1 – Données pour l'exercice 2.39

Prénom	Domicile	Couleur des yeux	Taille (en cm)	Année de naissance
Aline	Lausanne	bleu	167	1994
Bastien	Yverdon	brun	180	1991
Claudia	Yverdon	vert	175	1996
David	Lausanne	bleu	183	1995
Élodie	Yverdon	brun	171	1994
Frank	Lausanne	bleu	175	1997

d) La relation R est-elle une relation d'ordre ? Justifier votre réponse et, dans l'affirmative, décider s'il s'agit d'un ordre partiel ou total.

2.39 On considère les données de la table 2.1.

a) Sur l'ensemble E des personnes apparaissant dans cette table, on définit la relation R par

$$R = \{(x, y) \in E^2 \mid x \text{ et } y \text{ ont au plus 5 centimètres de différence de taille}\}.$$

1. Étudier les propriétés de la relation R (réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité).
2. La relation R définit-elle une relation d'ordre sur l'ensemble E ? Dans l'affirmative, décider s'il s'agit d'un ordre partiel ou total.
3. La relation R définit-elle une relation d'équivalence sur l'ensemble E ? Dans l'affirmative, donner ses classes d'équivalence.

b) Mêmes questions pour la relation S définie par

$$S = \{(x, y) \in E^2 \mid x \text{ et } y \text{ habitent la même localité et ont la même couleur d'yeux}\}.$$

2.40 Soient A l'ensemble formé de MM. Breguet (GMB), Cuisenaire (OCE), Hanna (FHA), Rubinstein Scharf (ARS) et Taillard (ETD) et B l'ensemble des étudiants et étudiantes du département TIC suivant, ce semestre, le cours PRG1.

On considère la relation R de A vers B formée de tous les couples (a, b) où a enseigne PRG1 à b .

- a) Que représente la relation $S = R \circ R^{-1}$?
- b) La relation S est-elle une relation d'ordre ? Si oui, s'agit-il d'un ordre partiel ou total ?
- c) La relation S est-elle une relation d'équivalence ? Si oui, que représentent ses classes d'équivalence ?

2.41 On a demandé à quatre experts en informatique de noter cinq langages de programmation en fonction de leurs préférences. Les notes attribuées sont résumées en table 2.2, la note 5 correspondant au langage préféré.

Sur l'ensemble formé des cinq langages de programmation, on définit la relation R par :

« Le langage a est en relation avec le langage b s'il s'agit du même langage ($a = b$) ou si le nombre d'experts préférant le langage a au langage b est plus grand que le nombre d'experts préférant le langage b au langage a . »

a) Donner le graphe de la relation R ainsi que la matrice de R .

INDICATION. Commencer par construire la table dont les lignes et les colonnes sont associées aux cinq langages et dont l'élément en ligne i et colonne j correspond au nombre d'experts préférant le langage i au langage j .

Table 2.2 – Données pour l'exercice 2.41

Langage	Experts			
	1	2	3	4
C	1	4	3	2
C++	2	5	1	4
Java	5	1	5	5
PHP	3	2	4	1
Python	4	3	2	3

- b) Quelles sont les propriétés (réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité) de la relation R ? Justifier brièvement chaque réponse.
- c) La relation R définit-elle une relation d'ordre (Justifier brièvement)? Si oui, donner son diagramme de Hasse et préciser s'il s'agit d'un ordre partiel ou total (Justifier brièvement).
- d) La relation R définit-elle une relation d'équivalence (Justifier brièvement)? Si oui, donner ses classes d'équivalence.

2.42 Lors d'une compétition sportive, n équipes disputent un tournoi complet (chaque équipe affronte une fois chacun de ses adversaires).

À l'issue des rencontres on définit sur l'ensemble $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ des n équipes la relation R de la manière suivante : l'équipe e_i est en relation avec l'équipe e_j si $e_i = e_j$ ou si le nombre de victoires de e_i est supérieur au nombre de victoires de e_j ou si, à nombre égal de victoires, e_i a battu e_j (dans le sport en question il n'y a jamais de match nul).

La relation R est réflexive par construction. Elle est également antisymétrique car pour avoir deux équipes en relation l'une avec l'autre il faudrait qu'elles aient le même nombre de victoires et qu'elles aient toutes les deux remporté leur match direct ce qui n'est pas possible.

Lors de la dernière édition de la compétition, 4 équipes s'affrontèrent et le tableau des résultats fut le suivant :

	e_1	e_2	e_3	e_4	Total
e_1		0	0	1	1
e_2	1		1	0	2
e_3	1	0		1	2
e_4	0	1	0		1

- a) Donner la matrice de la relation R correspondant à la table de résultats précédente.
- b) En utilisant la matrice de R , vérifier que la relation est transitive. Préciser les résultats intermédiaires.
- c) Donner le diagramme de Hasse de la relation R et préciser s'il s'agit d'un ordre partiel ou total.
- d) La relation R définit-elle toujours un ordre total, quels que soient le nombre d'équipes et les résultats des matchs? Justifier.

2.43 On considère les ensembles $C = \{3, 4, \infty\}$ et $F = \{\blacksquare, \triangle, \diamond, \bullet, \square, \blacktriangleleft\}$ ainsi que la relation R de C vers F définie par

$$R = \{(c, f) \in C \times F \mid c \text{ est le nombre de côtés de la figure } f\}.$$

- a) Donner le graphe et la matrice de la relation R .
- b) Donner le graphe de la relation $S = R \circ R^{-1}$.

- c) En français, quelle propriété/condition vérifient les couples de la relation S ?
- d) Quelles sont les propriétés de la relation S ? (Justifier, brièvement, chaque réponse)
- e) La relation S définit-elle un ordre (si oui, donner son diagramme de Hasse) ? Une relation d'équivalence (si oui, donner ses classes d'équivalence) ?

2.44 Soient $L = \{\text{allemand, français, italien, romanche}\}$ l'ensemble des quatre langues nationales, H un sous-ensemble (non vide) de personnes vivantes et R la relation de H vers L formée de tous les couples (h, l) où la personne h parle couramment la langue l .

À partir de ces données on construit la relation $S = R^{-1} \circ R$.

- a) En une phrase, que représente la relation S .
 - b) Pour chacune des affirmations qui suivent décider si elle est vraie ou fausse. Argumenter brièvement chaque réponse.
 - (1) La relation S est toujours réflexive.
 - (2) La relation S est toujours symétrique.
 - (3) La relation S est toujours antisymétrique.
 - (4) La relation S est toujours transitive.
- 2.45** Soient A un ensemble non vide et R et S deux relations sur A . Pour chacune des affirmations suivantes, décider si elle est vraie ou non. Argumenter chaque réponse.
- a) Si la relation R est non vide alors la relation composée $R^{-1} \circ R$ est réflexive.
 - b) Si les relations R et S sont réflexives alors la relation composée $S \circ R$ l'est aussi.
 - c) Si les relations R et S sont symétriques alors la relation composée $S \circ R$ l'est aussi.
 - d) Si la relation S est antisymétrique alors la relation complémentaire $\overline{S}$ l'est aussi.
- 2.46** Soient A un ensemble non vide et R et S deux relations sur A . Pour chacune des affirmations suivantes, décider si elle est vraie ou fausse. Argumenter chaque réponse.
- a) La relation $T = R^{-1} \circ R$ est réflexive quelle que soit la relation R sur A .
 - b) La relation $T = R^{-1} \circ R$ est symétrique quelle que soit la relation R sur A .
 - c) La relation $T = R^{-1} \circ R$ est transitive quelle que soit la relation R sur A .
 - d) Si R et S sont deux relations d'équivalence sur A , alors la relation $T = R \cap S$ est également une relation d'équivalence sur A .

2.47 Sur l'ensemble de groupes sanguins

$$G = \{O-, O+, A-, A+, B-, B+, AB-, AB+\}$$

on définit la relation R formée de tous les couples (g_1, g_2) où une personne du groupe g_1 peut être transfusée sans risque avec du sang d'une personne du groupe g_2 .

- a) La relation R est-elle (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive ?
- b) La relation R définit-elle une relation d'ordre sur G ? (justifier) Dans l'affirmative, préciser s'il s'agit d'un ordre partiel ou total (justifier) et donner son diagramme de Hasse.
- c) La relation R définit-elle une relation d'équivalence sur G ? (justifier) Dans l'affirmative, donner ses classes d'équivalence.

2.48 Donner le diagramme de Hasse de la relation de divisibilité sur l'ensemble

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

2.49 Soit R la relation sur $\mathbb{Z}^2$ définie par

$$(a, b) R (c, d) \iff |a| + |b| = |c| + |d|.$$

- Déterminer – en justifiant brièvement chaque réponse – si R est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.
- La relation R définit-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}^2$? (justifier) Dans l'affirmative, préciser s'il s'agit d'un ordre partiel ou total. (justifier)
- La relation R définit-elle une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}^2$? (justifier) Dans l'affirmative, décrire ou représenter graphiquement les classes d'équivalence des couples $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(-2, 1)$.

2.50 Sur l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ des couples d'entiers on considère la relation R définie par

$$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \iff |x_1 - y_1| = |x_2 - y_2|$$

- Déterminer – en justifiant brièvement chaque réponse – si R est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.
- La relation R définit-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}^2$? (justifier) Dans l'affirmative, préciser s'il s'agit d'un ordre partiel ou total. (justifier)
- La relation R définit-elle une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}^2$? (justifier) Dans l'affirmative, décrire ou représenter graphiquement la classe d'équivalence du couple $(1, 0)$.

2.51 Sur l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ des couples d'entiers on considère la relation R définie par

$$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \iff |x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|$$

- Déterminer – en justifiant brièvement chaque réponse – si R est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.
- La relation R définit-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}^2$? (justifier) Dans l'affirmative, préciser s'il s'agit d'un ordre partiel ou total. (justifier)
- La relation R définit-elle une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}^2$? (justifier) Dans l'affirmative, décrire ou représenter graphiquement la classe d'équivalence du couple $(1, 0)$.

2.52 Sur l'ensemble des couples d'entiers strictement positifs (c.-à-d. sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$), on considère la relation R définie par

$$(a, b) R (c, d) \iff ad = bc.$$

- La relation R est-elle une relation d'ordre? Si oui, s'agit-il d'un ordre partiel ou total?
- La relation R est-elle une relation d'équivalence? Si oui, quelles sont ses classes d'équivalence?

INDICATION. On a aussi $(a, b) R (c, d) \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

2.53 Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers on considère la relation R définie par

$$x R y \iff |x| \geq y$$

- Déterminer – en justifiant brièvement chaque réponse – si R est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.
- La relation R définit-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$? (justifier) Dans l'affirmative, préciser s'il s'agit d'un ordre partiel ou total. (justifier)

- c) La relation R définit-elle une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$? (justifier) Dans l'affirmative, donner les classes d'équivalences de 0 et de 5.

2.54 Soient $E = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ l'ensemble des chiffres décimaux et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. Sur ce dernier ensemble on considère la relation R formée de tous les couples (A, B) de sous-ensembles disjoints de E :

$$(A, B) \in R \iff A \cap B = \emptyset.$$

- a) Déterminer – en justifiant chaque réponse – si R est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.
b) Déterminer la relation $R^2 = R \circ R$.

2.55 Sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers strictement positifs on considère la relation R définie par

$$(a, b) \in R \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } b = a^n.$$

- a) Déterminer – en justifiant chaque réponse – si R est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.
b) La relation R définit-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$? (Justifier) Dans l'affirmative, préciser s'il s'agit d'un ordre partiel ou total. (Justifier)
c) La relation R définit-elle une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^*$? (Justifier) Dans l'affirmative, donner la classe d'équivalence de l'entier 2.

2.56 Soient $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et R la relation sur A donnée par la matrice

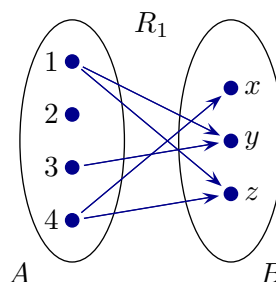
$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Donner le graphe de la relation R .
b) Déterminer – en justifiant brièvement vos réponses – si R est (1) réflexive, (2) symétrique, (3) antisymétrique, (4) transitive.
c) La relation R définit-elle une relation d'ordre sur A ? (justifier) Dans l'affirmative, donner son diagramme de Hasse et préciser s'il s'agit d'un ordre partiel ou total. (justifier)
d) La relation R définit-elle une relation d'équivalence sur A ? (justifier) Dans l'affirmative, donner la partition de A définie par les classes d'équivalence de R .

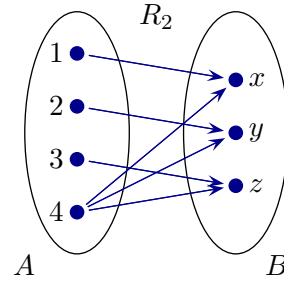
2.7 Solutions d'exercices choisis

- 2.1** a) $R_1 = \{(-2, -1), (-2, 0), (-1, -1), (0, -1), (0, 1), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$
b) $R_2 = \{(-2, 1), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, -1)\}$

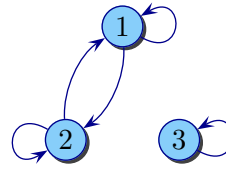
2.2 a) $M(R_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



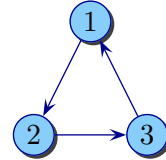
$$\text{b) } \mathbf{M}(R_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



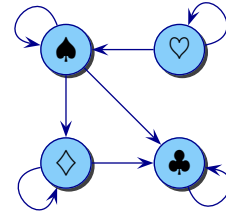
$$\text{2.3 a) } \mathbf{M}(R_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



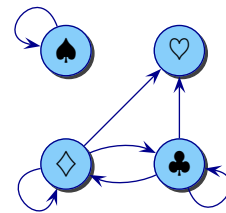
$$\text{b) } \mathbf{M}(R_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\text{2.4 a) } R = \{(\spadesuit, \spadesuit), (\spadesuit, \diamondsuit), (\spadesuit, \clubsuit), (\heartsuit, \spadesuit), (\heartsuit, \heartsuit), (\diamondsuit, \diamondsuit), (\diamondsuit, \clubsuit), (\clubsuit, \clubsuit)\}$$



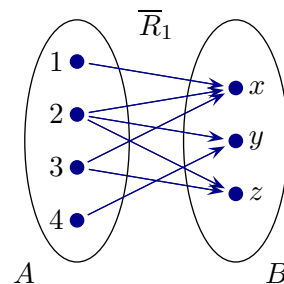
$$\text{b) } S = \{(\spadesuit, \spadesuit), (\diamondsuit, \heartsuit), (\diamondsuit, \diamondsuit), (\diamondsuit, \clubsuit), (\clubsuit, \heartsuit), (\clubsuit, \diamondsuit), (\clubsuit, \clubsuit)\}$$



2.5 La relation complémentaire $\overline{R}$ est la relation « plus grand ou égal à » ($\geq$) sur $\mathbb{N}$ alors que la relation inverse R^{-1} est la relation « plus grand que » ($>$) sur $\mathbb{N}$.

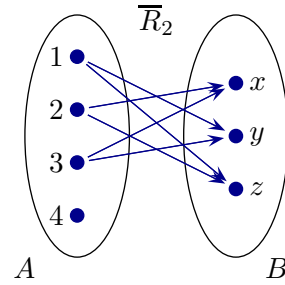
$$\text{2.6 a) } \overline{R}_1 = \{(1, x), (2, x), (2, y), (2, z), (3, x), (3, z), (4, y)\}$$

$$\mathbf{M}(\overline{R}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\text{b) } \overline{R}_2 = \{(1, y), (1, z), (2, x), (2, z), (3, x), (3, y)\}$$

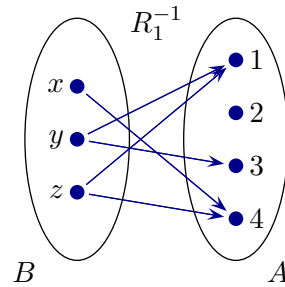
$$M(\overline{R}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



2.7 Le passage de la matrice $M(R)$ à la matrice $M(\overline{R})$ se fait en remplaçant les 1 par des 0 et les 0 par des 1.

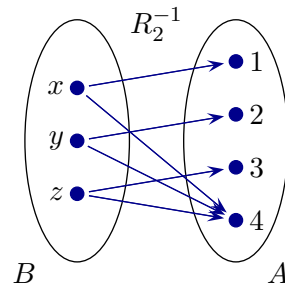
$$\text{2.8 a) } R_1^{-1} = \{(y, 1), (z, 1), (y, 3), (x, 4), (z, 4)\}$$

$$M(R_1^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



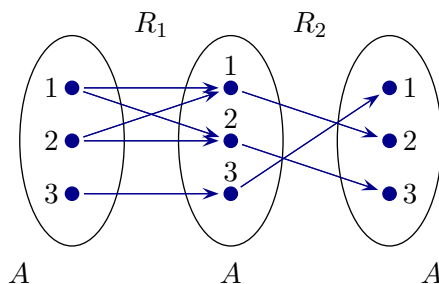
$$\text{b) } R_2^{-1} = \{(x, 1), (x, 4), (y, 2), (y, 4), (z, 3), (z, 4)\}$$

$$M(R_2^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

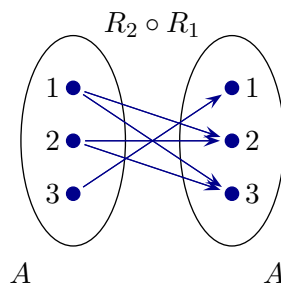


2.9 Le passage de la matrice $M(R)$ à la matrice $M(R^{-1})$ se fait en transposant la matrice $M(R)$, c.-à-d. en échangeant ses lignes et ses colonnes.

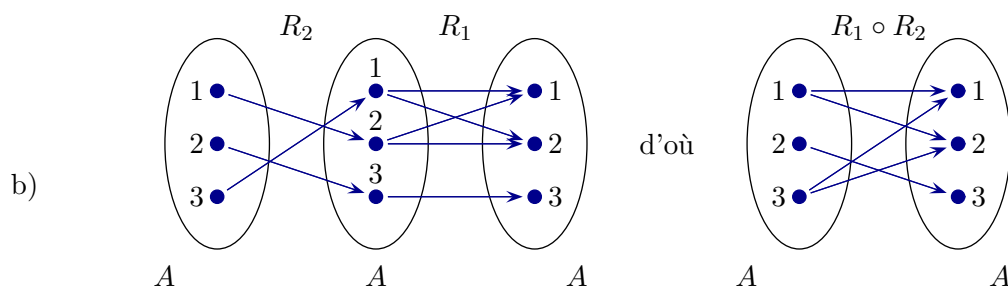
2.10 a)



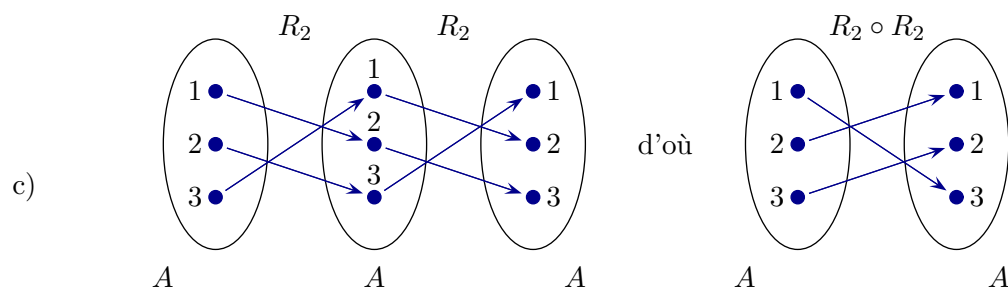
d'où



$$\text{et } R_2 \circ R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$



$$\text{et } R_1 \circ R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$$



$$\text{et } (R_2)^2 = R_2 \circ R_2 = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$

2.11 a) $M(R) \cdot M(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ainsi $M(S \circ R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $M(S) \cdot M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Ainsi $M(R \circ S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $M(R)^2 = M(R) \cdot M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ainsi $M(R^2) = M(R \circ R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- 2.12** a) $\overline{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y < 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y \leq -1\}$
 b) $R^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y \geq 0\} = R$
 c) $R^2 = \mathbb{Z}^2$, c.-à-d. $R \circ R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ car, quel que soit le couple (x, z) d'entiers, en prenant $y = |x| + |z|$ on a $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in R$ et donc $(x, z) \in R^2$.

- 2.13** a) $U \circ S = \{(a, i), (c, j), (c, k), (d, i)\}$
 b) $\overline{R} \circ T$ n'existe pas car l'ensemble d'arrivée de $T (= C)$ n'est pas contenu dans l'ensemble de départ de $\overline{R} (= A)$
 c) $T \circ S \circ R^{-1}$ n'existe pas car l'ensemble d'arrivée de $S (= D)$ n'est pas contenu dans l'ensemble de départ de $T (= B)$
 d) $T^{-1} \circ \overline{T} = \{(x, y), (x, z), (y, x), (y, z), (z, x)\}$

- 2.14** a) (1) R est réflexive car la matrice $\mathbf{M}(R)$ ne contient que des 1 dans sa diagonale principale.
 (2) R n'est pas symétrique car l'élément $(2, 1)$ de $\mathbf{M}(R)$ est égal à 1 alors que l'élément symétrique $(1, 2)$ est nul (on a donc $(\heartsuit, \spadesuit) \in R$ mais $(\spadesuit, \heartsuit) \notin R$).
 (3) R est antisymétrique car il n'existe pas deux 1 symétriques dans $\mathbf{M}(R)$.
 (4) R n'est pas transitive car $R^2 \not\subseteq R$. En effet on a calculé au point c) de l'exercice 2.11 la matrice de R^2 et obtenu

$$\mathbf{M}(R^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et les couples $(\heartsuit, \diamondsuit)$ et $(\heartsuit, \clubsuit)$ appartiennent à R^2 mais pas à R .

- b) (1) S n'est pas réflexive car l'élément $(2, 2)$ de $\mathbf{M}(S)$ n'est pas égal à 1 ($\heartsuit$ n'est pas en relation avec lui-même).
 (2) S n'est pas symétrique car l'élément $(3, 2)$ de $\mathbf{M}(S)$ est égal à 1 alors que l'élément symétrique $(2, 3)$ est nul (on a donc $(\diamondsuit, \heartsuit) \in S$ mais $(\heartsuit, \diamondsuit) \notin S$).
 (3) S n'est pas antisymétrique car les éléments $(3, 4)$ et $(4, 3)$ de $\mathbf{M}(S)$ sont tous deux égaux à 1 (on a donc $(\diamondsuit, \clubsuit) \in S$ et $(\clubsuit, \diamondsuit) \in S$ alors que $\diamondsuit \neq \clubsuit$).
 (4) S est transitive car en élevant au carré $\mathbf{M}(S)$ on obtient

$$(\mathbf{M}(S))^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{M}(S^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}(S)$$

et $S^2 \subseteq S$ (puisque en fait $S^2 = S$).

- 2.15** (1) La relation R n'est pas réflexive. On a en effet $(-1, -1) \notin R$ (et plus généralement $(k, k) \notin R$ pour tout entier k négatif).
- (2) La relation R est symétrique car l'addition est commutative :

$$(x, y) \in R \iff x + y \geq 0 \iff y + x \geq 0 \iff (y, x) \in R.$$

On peut aussi argumenter en observant que $R^{-1} = R$ (voir l'exercice 2.12) et qu'une relation est symétrique si et seulement si elle est égale à sa relation inverse.

- (3) La relation R n'est pas antisymétrique. On a par exemple $(1, 2) \in R$ et $(2, 1) \in R$ mais $1 \neq 2$.
- (4) La relation R n'est pas transitive. On a par exemple $(-1, 3) \in R$ et $(3, -2) \in R$ mais $(-1, -2) \notin R$. En fait on a $R^2 = \mathbb{Z}^2$ (voir l'exercice 2.12) et $R^2 \not\subseteq R$.

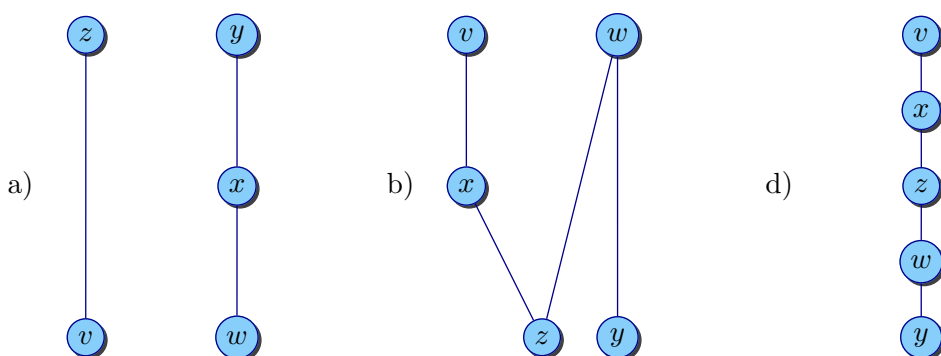
- 2.16** a) (1) R_1 n'est pas réflexive car $(1, 1) \notin R_1$ (ou $(4, 4) \notin R_1$).
- (2) R_1 n'est pas symétrique car si $(2, 4) \in R_1$ mais $(4, 2) \notin R_1$.
- (3) R_1 n'est pas antisymétrique car $(2, 3) \in R_1$ et $(3, 2) \in R_1$ alors que 2 et 3 sont deux éléments différents de A .
- (4) R_1 est transitive car $(R_1)^2 = R_1$. En effet en élevant la matrice de R_1 au carré on obtient

$$(M(R_1))^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M(R_1^2) = M(R_1)$$

- b) R_2 est réflexive, symétrique et transitive mais n'est pas antisymétrique.
- c) (1) R_3 n'est pas réflexive car $(1, 1) \notin R_3$ (et, plus généralement, $(x, x) \notin R_3$ quel que soit $x \in A$).
- (2) R_3 est symétrique car $(2, 4) \in R_3$ et $(4, 2) \in R_3$ et qu'il s'agit des deux seuls couples de la relation.
- (3) R_3 n'est pas antisymétrique car $(2, 4) \in R_3$ et $(4, 2) \in R_3$ alors que 2 et 4 sont deux éléments différents de A .
- (4) R_3 n'est pas transitive car $(2, 4) \in R_3$ et $(4, 2) \in R_3$ mais $(2, 2) \notin R_3$.
- d) R_4 est antisymétrique mais n'est ni réflexive, ni symétrique, ni transitive.

- 2.18** a) Ordre partiel b) Ordre partiel c) Pas un ordre d) Ordre total

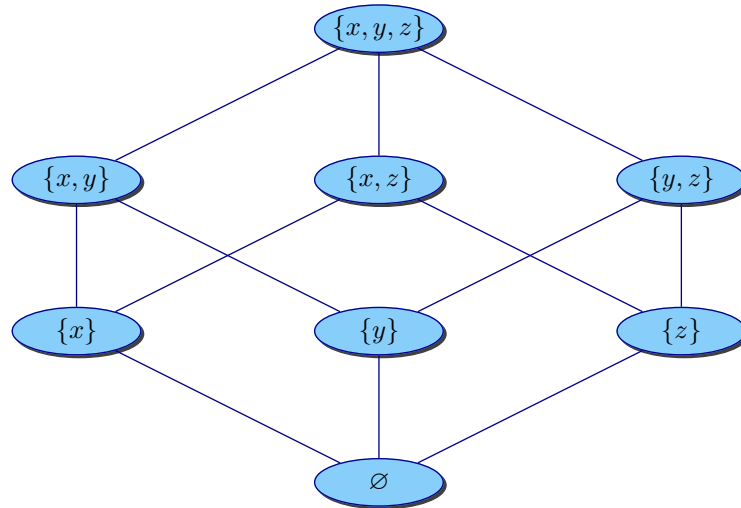
Diagrammes de Hasse :



- 2.19** Le diagramme de Hasse d'un ordre total est une chaîne verticale unique.

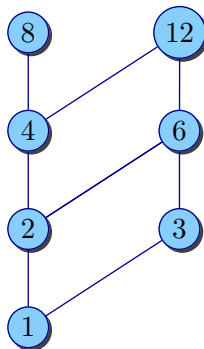
$$2.20 \quad a) \quad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b) \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.21



- 2.22 a) (1) La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}^*$ est réflexive car tout entier positif n se divise lui-même ($n = 1 \cdot n$).
- (2) La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}^*$ est antisymétrique. En effet, si $n \mid m$, il existe un entier positif k avec $m = kn$ mais, alors, $n = (1/k)m$. Ainsi on aura également $m \mid n$ si et seulement si $1/k$ est entier ce qui n'est possible que si $k = 1$ (k est positif). On en conclut donc que $n \mid m$ et $m \mid n$ si et seulement si $n = m$.
- (3) La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}^*$ est transitive. En effet, si $n \mid m$ et $m \mid p$, il existe deux entiers positifs k et l tels que $m = kn$ et $p = lm$ mais alors $p = lm = l(kn) = (lk)n$ est $n \mid p$ (car lk est un entier).
- La relation de divisibilité étant réflexive, antisymétrique et transitive, il s'agit bien d'une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
- b) La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}^*$ est un ordre partiel. Il existe, en effet, de nombreuses paires d'entiers positifs $\{a, b\}$ où a ne divise pas b et b ne divise pas a (par exemple, $a = 2$ et $b = 3$).

2.23



- 2.24 1) **Réflexivité** : Soit (a, b) un couple quelconque de $\mathbb{R}^2$. Ce couple est en relation avec lui-même car la condition $(a = c \text{ et } b \leq d)$ est clairement vérifiée si on remplace c par a et d par b .
- 2) **Antisymétrie** : Soient (a, b) et (c, d) deux couples de $\mathbb{R}^2$.

- ▷ Si $a < c$ alors (a, b) est en relation avec (c, d) mais (c, d) ne peut pas être en relation avec (a, b) car $a < c$ interdit d'avoir $c < a$ ou $c = a$.
- ▷ Si $a = c$, pour avoir (a, b) en relation avec (c, d) et (c, d) en relation avec (a, b) , b et d doivent vérifier $b \leq d$ et $d \leq b$ ce qui n'est possible que si $b = d$. Ainsi le lien entre les deux couples n'est possible, dans les deux sens, que si $a = c$ et $b = d$ c'est-à-dire que s'il s'agit d'un seul et même couple. La relation R est donc antisymétrique.
- 3) **Transitivité** : Soient (a, b) , (c, d) et (e, f) trois couples de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $(a, b) R (c, d)$ et $(c, d) R (e, f)$. De la première hypothèse on déduit que $a \leq c$ (car on a soit $a < c$ soit $a = c$) et de la deuxième on déduit que $c \leq e$.
- Maintenant, si a , c et e ne sont pas égaux on doit avoir $a < c \leq e$ ou $a \leq c < e$. Dans les deux cas on a $a < e$ et le couple (a, b) est en relation avec le couple (e, f) .
- Finalement, si a , c et e sont égaux, le lien entre les deux premiers couples implique que $b \leq d$ et celui entre les deux derniers implique que $d \leq f$ mais on a alors $a = e$ et $b \leq d \leq f$ et le couple (a, b) est en relation avec le couple (e, f) .
- Dans tous les cas, le premier couple est en relation avec le troisième et la relation R est bien transitive.

La relation R étant réflexive, antisymétrique et transitive, il s'agit bien d'une relation d'ordre. Afin de montrer qu'il s'agit d'un ordre total prenons deux couples (a, b) et (c, d) quelconques de $\mathbb{R}^2$. Si $a \neq c$, on a soit $a < c$ soit $c < a$ et un des deux couples est en relation avec l'autre. Si $a = c$ on a soit $b \leq d$ soit $d \leq b$ (voire les deux) et, ici aussi, un des deux couples est en relation avec l'autre. Toute paire de couples est donc comparable et l'ordre est total.

- 2.25**
- | | |
|---|--|
| 1) (1996, 31 août, Neuchâtel) | 6) (1995, 22 février, Vaud) |
| 2) (1996, 30 août, Vaud) | 7) (1995, 22 février, Valais) |
| 3) (1995, 3 septembre, Vaud) | 8) (1994, 10 décembre, Valais) |
| 4) (1995, 3 septembre, Jura) | 9) (1994, 17 mai, Genève) |
| 5) (1995, 1 ^{er} mars, Fribourg) | 10) (1994, 1 ^{er} mars, Fribourg) |

2.26 Seule R_2 est une relation d'équivalence. R_1 et R_4 ne sont pas transitives alors que R_3 n'est pas réflexive.

2.27 R_1 , R_3 et R_4 sont des relations d'équivalence. R_2 n'est pas symétrique et n'est donc pas une relation d'équivalence.

Classes d'équivalence :

$$R_1 : [v] = [w] = \{v, w\}, [x] = [z] = \{x, z\}, [y] = \{y\}$$

$$R_3 : [v] = [x] = \{v, x\}, [w] = [y] = [z] = \{w, y, z\}$$

$$R_4 : [v] = \{v\}, [w] = \{w\}, [x] = \{x\}, [y] = \{y\}, [z] = \{z\}$$

2.29 i) La relation R est réflexive car

$$(a, b) R (a, b) \iff a + b = b + a$$

ce qui est toujours vrai car l'addition est commutative.

ii) La relation R est symétrique car

$$(a, b) R (c, d) \iff a + d = b + c \iff c + b = d + a \iff (c, d) R (a, b).$$

iii) La relation R est transitive car

$$\begin{aligned} & (a, b) R (c, d) \quad \text{et} \quad (c, d) R (e, f) \\ \iff & a + d = b + c \quad \text{et} \quad c + f = d + e \\ \implies & a + d + c + f = b + c + d + e \\ \iff & a + f = b + e \\ \iff & (a, b) R (e, f). \end{aligned}$$

La relation R étant réflexive, symétrique et transitive, elle définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$.

1) La classe d'équivalence de $(0, 0)$ est

$$\begin{aligned} [(0, 0)] &= \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a - b = 0\} = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid b = a\} \\ &= \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots\}. \end{aligned}$$

2) La classe d'équivalence de $(1, 2)$ est

$$\begin{aligned} [(1, 2)] &= \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a - b = -1\} = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid b = a + 1\} \\ &= \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), \dots\}. \end{aligned}$$

3) La classe d'équivalence de $(0, 1)$ est la même que celle de $(1, 2)$: $[(0, 1)] = [(1, 2)]$.

2.30 a) $M(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $M(\overline{S}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $M(T^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

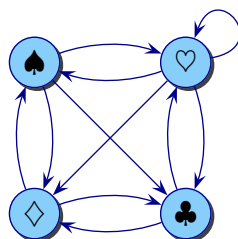
c) Pour calculer la matrice de la relation $U = \overline{S} \circ T^{-1}$ on commence par calculer le produit

$$M(T^{-1}) \cdot M(\overline{S}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

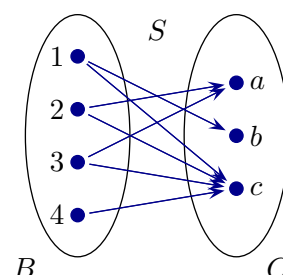
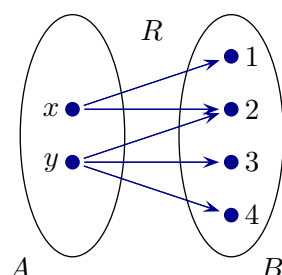
puis on y remplace les éléments supérieurs à 1 par des 1 afin d'obtenir

$$M(U) = M(\overline{S} \circ T^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) La relation U est une relation sur l'ensemble F et son graphe représentatif est



2.31 a)



$$\begin{aligned}
\text{b) } \mathbf{M}(R) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{M}(S) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\text{c) Du produit } \mathbf{M}(R) \cdot \mathbf{M}(S) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\
\text{on déduit la matrice de la } S \circ R : \mathbf{M}(S \circ R) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2.32 a) $\overline{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y\}$ (relation « plus petit ou égal à »)

b) $R^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x < y\}$ (relation « plus petit que »)

c) $R^2 = R \circ R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x > y + 1\}$

d) $R \circ R^{-1} = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (relation « totale » ou « complète »)

2.33 La relation R est uniquement réflexive.

2.34 a) (1) R_1 n'est pas réflexive car $(0, 0) \notin R_1$ (et, plus généralement, $(x, x) \notin R_1$ quel que soit l'entier x).

(2) R_1 est symétrique car si $(x, y) \in R_1$ on a $x \neq y$ mais également $y \neq x$ et donc $(y, x) \in R_1$.

(3) R_1 n'est pas antisymétrique car on a, par exemple, $(1, 2) \in R_1$ et $(2, 1) \in R_1$ alors que 1 et 2 sont deux éléments différents de $\mathbb{Z}$.

(4) R_1 n'est pas transitive car, par exemple, $(1, 2) \in R_1$ et $(2, 1) \in R_1$ mais $(1, 1) \notin R_1$.

b) (1) R_2 n'est pas réflexive car $(0, 0) \notin R_2$ ($0^2 \not\geq 1$).

(2) R_2 est symétrique car $xy = yx$ ainsi si $xy \geq 1$, on a aussi $yx \geq 1$.

(3) R_2 n'est pas antisymétrique car on a, par exemple, $(1, 2) \in R_2$ et $(2, 1) \in R_2$ alors que 1 et 2 sont deux entiers différents.

(4) R_2 est transitive. En effet, si $xy \geq 1$ alors x et y sont tous deux de même signe (soit tous deux positifs soit tous deux négatifs). De même si $yz \geq 1$, y et z sont de même signe et on en déduit que x et z sont de même signe ou, encore, que $xz \geq 1$, c.-à-d. que $(x, z) \in R_2$.

c) (1) R_3 n'est pas réflexive car $(-1, -1) \notin R_3$ ($-1 \not\leq 2(-1) = -2$) et, plus généralement, $(x, x) \notin R_3$, quel que soit l'entier négatif x .

(2) R_3 n'est pas symétrique car $(1, 3) \in R_3$ ($1 \leq 2 \cdot 3$) mais $(3, 1) \notin R_3$ ($3 \not\leq 2 \cdot 1$).

(3) R_3 n'est pas antisymétrique car on a, par exemple, $(1, 2) \in R_3$ ($1 \leq 2 \cdot 2$) et $(2, 1) \in R_3$ ($2 \leq 2 \cdot 1$) alors que 1 et 2 sont deux entiers différents.

(4) R_3 n'est pas transitive car on a, par exemple, $(3, 2) \in R_3$ ($3 \leq 2 \cdot 2$) et $(2, 1) \in R_3$ ($2 \leq 2 \cdot 1$) mais $(3, 1) \notin R_3$ car $3 \not\leq 2 \cdot 1$.

d) Notons premièrement que

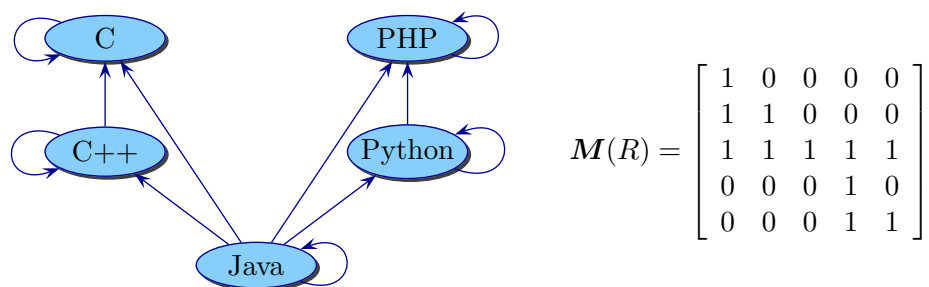
$$(x = y + 1 \text{ ou } x = y - 1) \iff x - y = \pm 1 \iff |x - y| = 1$$

(1) La relation n'est pas réflexive car $(0, 0) \notin R_4$.

(2) La relation est symétrique car $(x, y) \in R_4 \iff |x - y| = 1 \iff |y - x| = 1 \iff (y, x) \in R_4$.

(3) La relation n'est pas antisymétrique car $(0, 1) \in R_4$ et $(1, 0) \in R_4$ mais $0 \neq 1$.

(4) La relation n'est pas transitive car $(0, 1) \in R_4$ et $(1, 2) \in R_4$ mais $(0, 2) \notin R_4$.

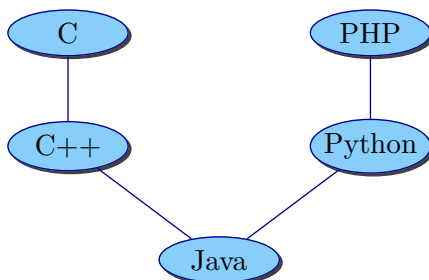


- b) 1. La relation R est réflexive : la diagonale principale de $M(R)$ ne contient que des 1.
 2. La relation R n'est pas symétrique : on a, par exemple, Java en relation avec C++ mais C++ n'est pas en relation avec Java.
 3. La relation R est antisymétrique : la matrice $M(R)$ ne contient pas deux 1 en symétrie en dehors de sa diagonale principale et le graphe de R ne contient pas deux arcs de sens opposés.
 4. La relation R est transitive. En effet, si on calcule le carré de $M(R)$ on obtient

$$M(R) \cdot M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

et, en remplaçant tous les termes positifs par des 1, on a $M(R^2) = M(R)$ ce qui prouve que R^2 est un sous-ensemble de R .

- c) La relation R est une relation d'ordre car elle est réflexive, antisymétrique et transitive. Son diagramme de Hasse est donné ci-dessous. L'ordre n'est que partiel (les langages C et PHP, par exemple, ne sont pas comparables).

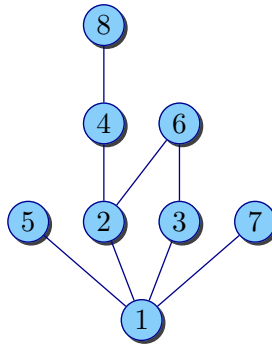


- d) La relation R n'étant pas symétrique, elle ne définit pas une relation d'équivalence.

2.44 a) La relation S est formée de tous les couples $(h_1, h_2) \in H^2$ où h_1 et h_2 parlent au moins une même langue nationale suisse.

- b) (1) S n'est pas réflexive en général car H peut contenir des personnes ne parlant aucune langue nationale suisse.
 (2) S est toujours symétrique car si h_1 parle une même langue nationale suisse que h_2 , il en est de même dans l'autre sens : $(h_1, h_2) \in S$ si et seulement si $(h_2, h_1) \in S$.
 (3) S n'est pas antisymétrique en général car dès que S contient un couple (h_1, h_2) avec $h_1 \neq h_2$ alors S contient aussi le couple (h_2, h_1) par symétrie et n'est donc pas antisymétrique.
 (4) S n'est pas transitive en général car H peut contenir une personne h_1 parlant uniquement français, une personne h_2 parlant français et allemand et une personne h_3 ne parlant qu'allemand. On a alors $(h_1, h_2) \in S$ et $(h_2, h_3) \in S$ mais $(h_1, h_3) \notin S$.

2.48


 2.49 a) i) La relation R est réflexive car

$$(a, b) R (a, b) \iff |a| + |b| = |a| + |b|$$

ce qui est toujours vrai.

 ii) La relation R est symétrique car

$$(a, b) R (c, d) \iff |a| + |b| = |c| + |d| \iff |c| + |d| = |a| + |b| \iff (c, d) R (a, b).$$

 iii) La relation R n'est pas antisymétrique car $(1, 2) R (2, 1)$ et $(2, 1) R (1, 2)$ mais $(1, 2) \neq (2, 1)$.

 iv) La relation R est transitive car

$$\begin{aligned} & (a, b) R (c, d) \text{ et } (c, d) R (e, f) \\ \iff & |a| + |b| = |c| + |d| \text{ et } |c| + |d| = |e| + |f| \\ \implies & |a| + |b| = |e| + |f| \\ \iff & (a, b) R (e, f). \end{aligned}$$

 b) La relation R n'étant pas antisymétrique, elle ne définit pas un ordre sur $\mathbb{Z}^2$.

 c) La relation R étant réflexive, symétrique et transitive, elle définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}^2$.

 1) La classe d'équivalence de $(0, 0)$ est

$$[(0, 0)] = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid |a| + |b| = 0\} = \{(0, 0)\}.$$

 2) La classe d'équivalence de $(1, 1)$ est

$$\begin{aligned} [(1, 1)] &= \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid |a| + |b| = 2\} \\ &= \{(2, 0), (0, 2), (-2, 0), (0, -2), (1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)\}. \end{aligned}$$

 3) La classe d'équivalence de $(-2, 1)$ est

$$\begin{aligned} [(-2, 1)] &= \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid |a| + |b| = 3\} \\ &= \{(3, 0), (2, 1), (2, -1), (1, 2), (1, -2), (0, 3), (0, -3), (-1, 2), (-1, -2), \\ &\quad (-2, 1), (-2, -1), (-3, 0)\}. \end{aligned}$$

 2.51 a) (1) R est réflexive car quel que soit $(x_1, y_1) \in \mathbb{Z}^2$ on a $|x_1 - x_1| = |y_1 - y_1| = 0$ ce qui montre que $(x_1, y_1) R (x_1, y_1)$.

 (2) R est symétrique car quels que soient les couples (x_1, y_1) et $(x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ on a $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ et $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ ainsi $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| \iff |x_2 - x_1| = |y_2 - y_1|$ et $(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \iff (x_2, y_2) R (x_1, y_1)$.

 (3) R n'est pas antisymétrique car $(1, 0) R (0, 1)$ et $(0, 1) R (1, 0)$ mais $(1, 0) \neq (0, 1)$.

- (4) R n'est pas transitive car $(1, 0) R (0, 1)$ et $(0, 1) R (-1, 0)$ mais $(1, 0) \not R (-1, 0)$.
- b) La relation R ne définit pas un ordre car elle n'est ni antisymétrique ni transitive.
- c) La relation R ne définit pas une relation d'équivalence car elle n'est pas transitive.

2.53 La relation R est uniquement réflexive. Elle ne définit donc ni un ordre ni une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

2.54 a) (1) La relation R n'est pas réflexive car pour toute partie A non vide de E (il y en a quand même 1023) on a $(A, A) \notin R$. Par exemple $(E, E) \notin R$.

(2) La relation R est symétrique car l'intersection est une opération commutative :

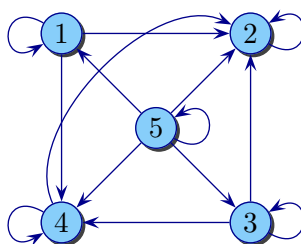
$$(A, B) \in R \iff A \cap B = \emptyset \iff B \cap A = \emptyset \iff (B, A) \in R.$$

(3) La relation R n'est pas antisymétrique. On a, par exemple, $(E, \emptyset) \in R$ ainsi que $(\emptyset, E) \in R$ mais $E \neq \emptyset$.

(4) La relation R n'est pas transitive. Pour toute partie A non vide de E on a $(A, \emptyset) \in R$ et $(\emptyset, A) \in R$ mais $(A, A) \notin R$.

b) La relation R^2 est la relation « totale » (ou « complète ») : $R^2 = \mathcal{P}(E)^2$ (il suffit de prendre l'ensemble vide comme « intermédiaire »).

2.56 a) Le graphe représentatif de la relation R est

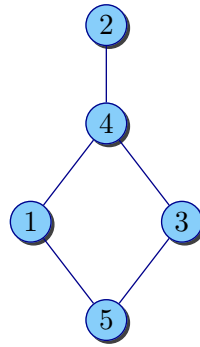


- b) (1) R est réflexive car la diagonale principale de $M(R)$ ne contient que des 1.
- (2) R n'est pas symétrique. On a par exemple $(1, 2) \in R$ mais $(2, 1) \notin R$ (l'élément $(1, 2)$ de la matrice de R vaut 1 alors que l'élément $(2, 1)$ vaut 0).
- (3) R est antisymétrique la matrice de R ne contient pas deux 1 en symétrie par rapport à sa diagonale principale (hors de cette diagonale).
- (4) R est transitive. En effet on a

$$M(R)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

et si on remplace tous les éléments supérieurs à 1 par des 1 on obtient que $M(R^2) = M(R)$. Ainsi $R^2 = R$ et la relation est transitive.

c) La relation R est un ordre car elle réflexive, antisymétrique et transitive. Il s'agit d'un ordre partiel uniquement car les éléments 1 et 3 de A ne sont pas comparables (les éléments $(1, 3)$ et $(3, 1)$ de la matrice de R sont tous les deux nuls). Son diagramme de Hasse est



d) La relation R ne définit pas une relation d'équivalence car elle n'est pas symétrique.

Fonctions



Fonction

Une **fonction** ou **application de l'ensemble A dans l'ensemble B** est une affectation d'un *unique* élément de B à chaque élément de A . L'ensemble de départ A est appelé le **domaine (de définition)** de la fonction alors que l'ensemble d'arrivée B est appelé le **codomaine** ou le **but** de la fonction.

Classiquement, les fonctions sont désignées à l'aide de lettres minuscules ($f, g, \dots$) et si f est une fonction de A dans B on note

$$f: A \longrightarrow B.$$

REMARQUES. Comme il est d'usage en mathématiques discrètes nous ne ferons ici aucune distinction entre fonction et application. Notons cependant que dans d'autres branches des mathématiques certains préfèrent faire une distinction entre une fonction, affectation qui associe au plus une valeur à chaque élément de son domaine et une application, affectation qui associe une et une seule valeur à chaque élément de son domaine (voir aussi la section 3.2.1).

3.1 Images et préimages



Images et préimages

Si f est une fonction de A dans B et si a est un élément de A , l'unique élément de B affecté à a est noté **$f(a)$** et est appelé **l'image de a par f** ou la **valeur de f en a** .

Réciproquement, si $b = f(a)$, l'élément a est appelé une **préimage** ou un **antécédent de b par f** . Notons qu'un élément b du codomaine peut avoir zéro, une ou plusieurs préimages selon les cas.

L'ensemble de toutes les images forme un sous-ensemble de B appelé **l'image** ou la **portée de la fonction f** et est noté **$\text{Im}(f)$** ou **$f(A)$** .

Plus généralement, pour tout sous-ensemble S de A , **l'image de S par f** , notée **$f(S)$** , est le sous-ensemble de B formé de toutes les images des éléments de S :

$$f(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(s) \mid s \in S\}.$$

Réciproquement, pour tout sous-ensemble T de B , **l'image réciproque de T par f** , notée **$f^{-1}(T)$** , est le sous-ensemble de A formé de toutes les préimages des éléments de T :

$$f^{-1}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid f(a) \in T\}.$$

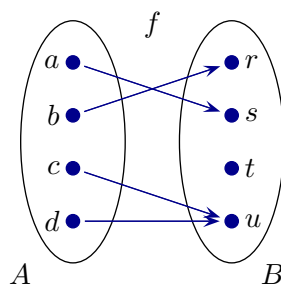


Figure 3.1 – Représentation d’une fonction entre deux ensembles finis à l’aide d’un graphe biparti.

Une fonction peut être définie de diverses manières. Dans les cas les plus simples (par exemple lorsque les ensembles A et B sont finis et petits), il suffit de donner explicitement la valeur prise par chaque élément de A . Il est également fréquent en mathématiques appliquées et en informatique de spécifier une fonction à l’aide d’un algorithme ou d’un programme. Le cas le plus courant correspond cependant aux situations où la valeur d’un élément est donnée par une expression mathématique ou logique. Ainsi, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui fait correspondre à chaque nombre réel son carré peut être décrite par

$$x \mapsto f(x) = x^2 \quad \text{ou} \quad f(x) = x^2 \quad \text{ou même simplement} \quad y = x^2.$$

Dans ces expressions, f est le symbole désignant la fonction, x est la *variable indépendante* et y est la *variable dépendante* représentant la valeur de la fonction en x .

✿ Exemple

La fonction f de $A = \{a, b, c, d\}$ dans $B = \{r, s, t, u\}$ définie par l’affectation

$$f(a) = s, \quad f(b) = r, \quad f(c) = u, \quad f(d) = u$$

est illustrée graphiquement en figure 3.1. L’image de f est l’ensemble $\text{Im}(f) = \{r, s, u\}$. L’élément t du codomaine B n’appartient pas à cette image car il ne possède aucune préimage. L’élément u possède, lui, deux préimages : c et d .

3.1 Pour chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$\text{a) } f(x) = x + |x| \quad \text{b) } g(x) = 1 \quad \text{c) } h(x) = 2^{-x} \quad \text{d) } m(x) = x^3 - 3x$$

calculer

- 1) l’image des ensembles $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $F =]-1, 3[$ et $G = \mathbb{R}_+$,
- 2) l’image de la fonction,
- 3) l’image réciproque des ensembles $S = \{2\}$, $T = [0, 2]$ et $U = \mathbb{R}_+$.

3.2 Fonctions et relations

Plutôt que de recourir à la notion d’affectation pour définir une fonction, on peut aussi adopter un point de vue basé sur la notion de relation d’un ensemble vers un autre. En effet,

toute fonction f de A dans B donne lieu à une relation de A vers B , appelée le **graphe de f** , composée de tous les couples (a, b) où a est un élément de A et b est l'image de a par f :

$$\text{Graphe de } f \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b = f(a)\}.$$

En tant que sous-ensemble de $A \times B$, le graphe de f définit bien une relation de A vers B . Cette relation possède cependant la propriété que chaque élément a de A appartient à *un et un seul* couple (a, b) de la relation. Réciproquement toute relation f de A vers B possédant cette propriété donne lieu à une fonction $f : A \rightarrow B$ où $f(a) = b$ si et seulement si le couple (a, b) appartient à f . Cette approche aboutit à la définition suivante d'une fonction, en tout point équivalente à celle donnée en début de chapitre.



Fonction

Une **fonction f** de l'ensemble A dans l'ensemble B est une relation f de A vers B (c.-à-d. un sous-ensemble de $A \times B$) où chaque élément de A appartient à un et un seul couple de la relation.



Exemple

Parmi les trois relations de $A = \{a, b, c, d\}$ vers $B = \{x, y, z\}$ illustrées graphiquement dans la figure 3.2 et données par les ensembles de couples

$$f = \{(a, x), (b, y), (c, x), (c, z), (d, y)\},$$

$$g = \{(a, x), (b, x), (c, z), (d, z)\},$$

$$h = \{(a, z), (c, x), (d, z)\},$$

seule la deuxième définit une fonction de A dans B . En effet, la première relation n'est pas une fonction car l'élément c est en relation avec x et z . Quant à la troisième, elle n'est pas une fonction car l'élément b n'appartient à aucun couple de la relation.

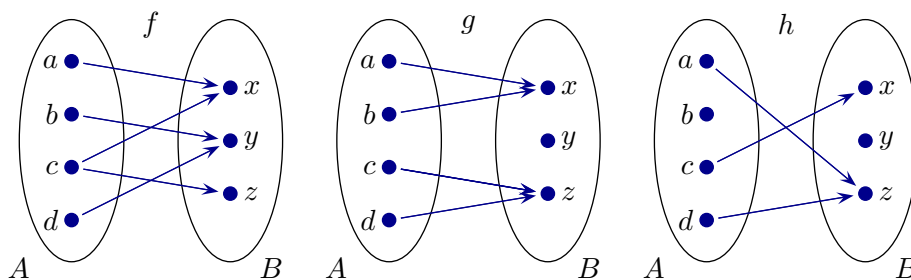


Figure 3.2 – Représentation de trois relations de $A = \{a, b, c, d\}$ vers $B = \{x, y, z\}$.
Seule la relation g correspond à une fonction de A dans B .

3.2 Dans chacun des cas suivants, expliquer pourquoi l'expression proposée ne définit pas une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \ln(|x|)$

b) $f(x) = \sqrt{x^3}$

c) $f(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

3.3 Pour chacune des relations suivantes de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$, décider si elle définit ou non une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

a) $a R b \iff a + b < 4$

e) $a R b \iff a^3 = b$

b) $a R b \iff a + b = 6$

f) $a R b \iff a = b^3$

c) $a R b \iff a^2 = b$

g) $a R b \iff b = 3$

d) $a R b \iff a = b^2$

h) $a R b \iff |a| = |b|$

3.2.1 Représentation graphique d'une fonction

Vue comme une relation, une fonction n'est pas distinguable de son graphe, c'est-à-dire de l'ensemble des couples la définissant. Cet ensemble étant une relation, il peut être illustré graphiquement en utilisant les mêmes conventions que celles introduites au chapitre 2 (et déjà utilisées dans les exemples qui précèdent), cette **représentation graphique** étant souvent appelée, elle aussi, le *graphe de la fonction*.

Un cas particulièrement fréquent apparaît lorsque le domaine et le codomaine d'une fonction f sont tous deux égaux à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On parle alors d'une fonction *réelle* (car prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$) *d'une variable réelle* (car définie sur $\mathbb{R}$). Le graphe d'une telle fonction (de cardinalité infinie) est représenté en interprétant les différents couples (a, b) le formant comme les coordonnées d'autant de points du plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien Oxy (voir figure 3.3). La condition à la base de la définition d'une fonction, exigeant que chaque élément du domaine de définition appartienne à exactement un couple du graphe de la fonction, correspond alors à la condition géométrique demandant que chaque droite verticale intersecte le graphe de la fonction en un et un seul point.

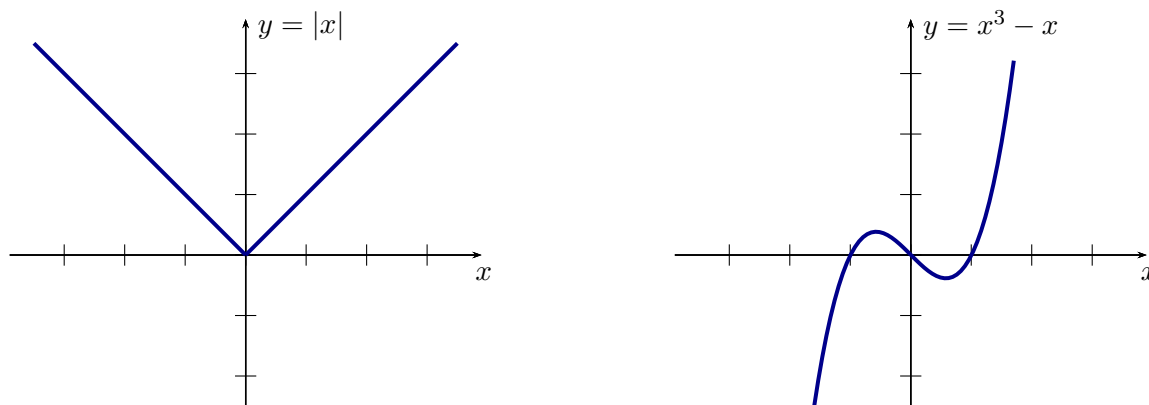


Figure 3.3 – Représentations graphiques de la fonction valeur absolue ($y = |x|$) et de la fonction $y = x^3 - x$.

Notons encore que la notion de fonction réelle s'étend à des fonctions définies sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ (et même sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$). Il est alors d'usage, sauf mention explicite contraire, d'assumer que le domaine de la fonction est égal au plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dans lequel la valeur de la fonction est bien définie. Ainsi la fonction réelle qui, à tout nombre, associe sa racine carrée doit être comprise comme une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ alors que celle associant, à tout nombre, son inverse doit être comprise comme une fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$.

3.4 Représenter le graphe et déterminer l'image de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{2}{x^2 + 2}$$

3.5 Représenter le graphe et déterminer l'image de la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{|x|}{x}$$

3.3 Compositions de fonctions



Fonction composée

Soit f une fonction A dans B et g une fonction de B dans C , la **composition de f par g** , notée $g \circ f$, est la fonction de A dans C définie par

$$(g \circ f)(a) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(a)) \quad \forall a \in A.$$

Cette définition de la composition n'est pas différente de celle introduite en section 2.2 pour des relations générales. En particulier, elle peut être étendue à plus de deux fonctions donnant alors lieu à une opération associative (mais pas commutative). Notons cependant que la composition de deux fonctions ou plus fournit toujours une fonction, c'est-à-dire une affectation d'une seule valeur à chaque élément de l'ensemble de départ.

3.6 On considère les deux fonctions

$$f : \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_-$$

$$x \longmapsto f(x) = \sqrt{-x} \quad \quad \quad x \longmapsto g(x) = -x^2.$$

Déterminer les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$. Préciser à chaque fois le domaine et le codomaine et donner une formule aussi simplifiée que possible.

3.4 Propriétés des fonctions

Les fonctions peuvent être classifiées à partir de deux propriétés de base : l'*injectivité* et la *surjectivité*. La vérification simultanée de ces deux propriétés aboutit à la notion de fonctions *bijjectives* pour lesquelles il est possible de définir une fonction *reciproque*, aussi appelée fonction *inverse*.



Injectivité

Une fonction f de A dans B est dite **injective** si et seulement si elle ne prend jamais deux fois la même valeur. Une fonction injective est appelée une **injection**.

Dit autrement, une fonction f de A dans B est injective si et seulement si des éléments distincts de A ont toujours des images distinctes :

$$\forall x, y \in A, \quad x \neq y \implies f(x) \neq f(y).$$

Passant à la contraposée, on a aussi qu'une fonction f de A dans B est injective si et seulement si tout élément de B a *au plus* une préimage :

$$\forall x, y \in A, \quad f(x) = f(y) \implies x = y.$$



Surjectivité

Une fonction f de A dans B est dite **surjective** si et seulement si chaque élément de B est l'image d'au moins un élément de A , c'est-à-dire si et seulement si chaque élément de B a *au moins* une préimage. Une fonction surjective est appelée une **surjection**.



Propriété

Une fonction f de A dans B est surjective si et seulement si l'image de f est égal au codomaine tout entier :

$$f \text{ est surjective} \iff \text{Im}(f) = B.$$



Bijektivité

Une fonction f de A dans B est dite **bijjective** si et seulement si elle est injective et surjective. Une fonction bijective est appelée une **bijection**.



Fonction réciproque

Si f est une bijection de A dans B , chaque élément de B possède *une et une seule* préimage. On peut alors définir la **fonction réciproque** ou **inverse de f** , notée f^{-1} , comme la fonction de B dans A qui associe à chaque élément de B son unique préimage :

$$f^{-1}(b) = a \iff b = f(a).$$



Propriété

Pour une bijection f de A dans B on a

$$f^{-1} \circ f = id_A \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = id_B$$

où id_S est la **fonction identité** sur l'ensemble S , c.-à-d. la fonction de S dans S définie par $id_S(x) = x$ pour tout $x \in S$.



Exemple

Les trois fonctions, dont les graphes sont présentés en figure 3.4, ont les propriétés suivantes.

- a) La fonction f est bijective car chaque élément de B est l'image d'exactly un élément de A . Sa fonction réciproque de B dans A est

$$f^{-1} = \{(r, a), (s, d), (t, b), (u, c)\}.$$

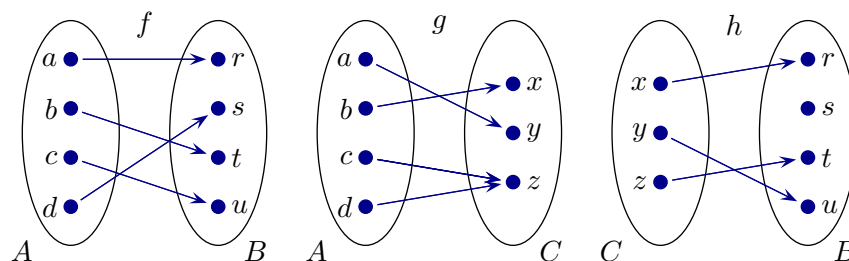


Figure 3.4 – Représentations graphiques de trois fonctions : la fonction f est bijective et possède une fonction réciproque, la fonction g est surjective mais pas injective alors que la fonction h est injective mais pas surjective.

- b) La fonction g est surjective car $g(A) = C$ (chaque élément de C est l'image d'au moins un élément de A) mais elle n'est pas injective car z est l'image de deux éléments distincts de A : c et d .
 c) La fonction h est injective car les trois éléments de C ont des images différentes mais n'est pas surjective car $h(C) = \{r, t, u\} \neq B$ (l'élément s ne possède pas de préimage).

REMARQUES.

- Seules les fonctions bijectives possèdent une fonction réciproque. Or, lors de la définition d'une fonction f , le choix du domaine de définition A et du codomaine B influencent les propriétés de f . Ainsi, la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui, à tout nombre réel x , associe son carré $y = x^2$ n'est ni injective (la fonction est paire et on a, par exemple, $f(2) = f(-2) = 4$) ni surjective (le carré d'un nombre étant non négatif, on a $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$). La fonction f n'est donc pas bijective et ne possède pas de fonction réciproque. En revanche, la fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui associe à tout nombre réel non négatif x son carré $y = x^2$ est, elle, injective et surjective. Elle possède donc une fonction réciproque $g^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ associant à tout nombre réel non négatif y sa racine carrée $x = \sqrt{y}$.
- Rappelons que quelles que soient les propriétés d'une fonction $f : A \rightarrow B$, il est toujours possible de calculer l'ensemble des préimages d'un sous-ensemble T de B . Cet ensemble, appelé *image réciproque de T* , est noté $f^{-1}(T)$ et est défini par

$$f^{-1}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid f(a) \in T\}.$$

Ainsi, pour la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y = x^2$ on a $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$ alors que $f^{-1}(4)$ n'existe pas car f n'est pas bijective.

3.7 Déterminer si la fonction de l'exercice 3.4 est (a) injective, (b) surjective. En déduire si elle est (c) bijective et, dans l'affirmative, donner une expression pour sa réciproque.

3.8 Même question que l'exercice précédent mais pour la fonction de l'exercice 3.5.

3.9 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que peut-on dire de l'injectivité de f si f est (a) paire, (b) impaire.

3.10 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que peut-on dire de la surjectivité de f si f est (a) paire, (b) impaire.

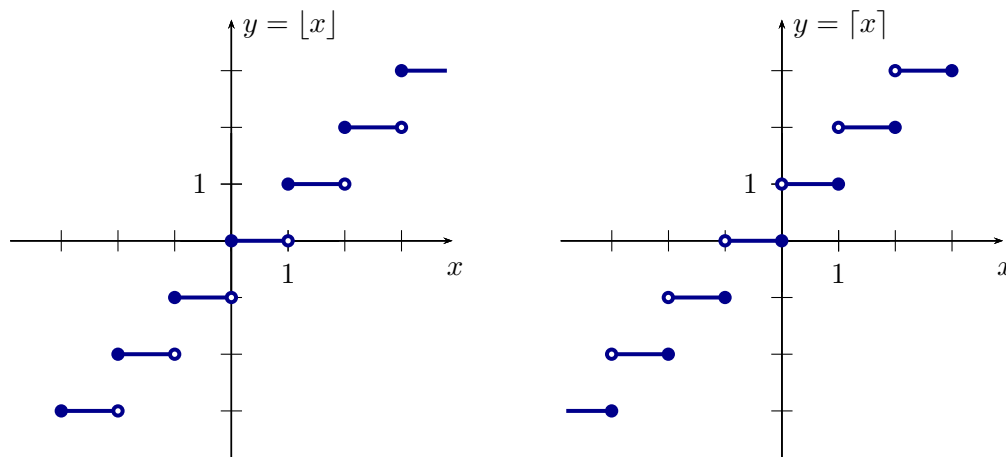


Figure 3.5 – Graphes des fonctions $y = [x]$ (partie entière inférieure) et $y = \lceil x \rceil$ (partie entière supérieure).

3.15 Construire deux fonctions permettant d'arrondir un nombre réel à l'entier le plus proche à l'aide des fonctions « parties entières ». La première permettra d'effectuer un arrondi par défaut (la demie est arrondie vers le bas) alors que la seconde permettra d'effectuer un arrondi par excès (la demie est arrondie vers le haut).

3.16 Vérifier que, quels que soient les nombres réels x et y , on a toujours

$$[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$$



Modulo

Soit a un entier et m un entier strictement positif. On note **$a \bmod m$** (lu « a modulo m ») le reste de la division euclidienne de a par m .

Une manière équivalente (et qui se généralise aux modulus m réels et positifs) de définir l'opération modulo est de poser

$$a \bmod m \stackrel{\text{def}}{=} a - m[a/m].$$

3.17 Calculer

- | | | | |
|-------------------|--------------------|------------------|-------------------|
| a) $13 \bmod 3$ | c) $155 \bmod 19$ | e) $28 \bmod 6$ | g) $-7 \bmod 1$ |
| b) $-97 \bmod 11$ | d) $-221 \bmod 23$ | f) $-62 \bmod 9$ | h) $422 \bmod 50$ |

3.18 Soient a et b deux entiers et m un entier strictement positif, montrer que si a' est équivalent à a , modulo m , et si b' est équivalent à b , modulo m , alors

$$(a + b) \bmod m = (a' + b') \bmod m$$

et

$$(a \cdot b) \bmod m = (a' \cdot b') \bmod m.$$

- a) Déterminer l'ensemble de toutes les préimages de 1.
- b) Déterminer l'image de f .
- c) La fonction f est-elle injective? Justifier.
- d) La fonction f est-elle surjective? Justifier.

3.25 On considère la fonction réelle

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor. \end{aligned}$$

- a) Déterminer l'image par f de l'ensemble $A = \{-1, -\frac{1}{2}, \sqrt{2}, 5\}$.
- b) Déterminer l'image de f .
- c) La fonction f est-elle injective?
- d) La fonction f est-elle surjective?

3.26 Soit la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto f(x) = x \cdot \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

- a) Représenter le graphe de f pour x entre -3 et 3 et pour $f(x)$ entre 0 et 9 . Préciser clairement le comportement de la fonction aux points de discontinuité.
- b) La fonction f est-elle injective? (Justifier)
- c) La fonction f est-elle surjective? (Justifier)

3.27 On considère la fonction réelle

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x + (-1)^{\lceil x \rceil}. \end{aligned}$$

- a) Représenter graphiquement la fonction f pour x entre -3 et 3 .
- b) Donner l'image de la fonction f .
- c) Donner l'image de l'intervalle $I = [1/2, 3/2]$.
- d) Donner l'image réciproque de l'intervalle $I = [1/2, 3/2]$.
- e) La fonction f est-elle bijective? Dans la négative, quelles sont les propriétés qui ne sont pas vérifiées? Dans l'affirmative, quelle est la fonction réciproque f^{-1} ?

3.28 On considère la fonction réelle

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = |x| \cdot (-1)^{\lceil x \rceil}. \end{aligned}$$

- a) Représenter graphiquement la fonction f pour x entre -4 et 4 .
- b) Déterminer l'image de l'intervalle $I = [1/2, 3/2]$.
- c) Déterminer l'image réciproque de l'intervalle $I = [1/2, 3/2]$.
- d) La fonction f est-elle injective? Justifier brièvement.
- e) La fonction f est-elle surjective? Justifier brièvement.
- f) La fonction f est-elle bijective? Justifier brièvement. Dans l'affirmative, quelle est sa fonction réciproque?

3.29 On considère la fonction réelle

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \lfloor x \rfloor - 2x \end{aligned}$$

- Représenter graphiquement la fonction f pour x entre -4 et 4 .
- Déterminer l'image de la fonction f .
- Déterminer l'image de l'intervalle $I = [0; 2]$.
- Déterminer l'image réciproque de l'intervalle $J = [-1/2; 3/2]$.
- La fonction f est-elle injective ? (Justifier)
- La fonction f est-elle surjective ? (Justifier)

3.30 On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2 \end{aligned}$$

- Représenter graphiquement la fonction f pour x entre -3 et 3 .
- La fonction f est-elle bijective ? Dans la négative, quelles sont les propriétés qui ne sont pas vérifiées ? Dans l'affirmative, quelle est la fonction réciproque f^{-1} ?

3.31 On considère la fonction réelle

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 2 \lfloor x \rfloor - x. \end{aligned}$$

- Représenter graphiquement la fonction f pour x entre -2 et 3 .
- La fonction f est-elle bijective ? Dans la négative, quelles sont les propriétés qui ne sont pas vérifiées ? Dans l'affirmative, quelle est la fonction réciproque f^{-1} ?

3.32 Soit l'ensemble $\mathbb{Z}_{60} = \{0, 1, 2, \dots, 59\}$ et la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_{60} &\longrightarrow \mathbb{Z}_{60} \\ x &\longmapsto f(x) = (31x + 45) \bmod 60. \end{aligned}$$

Calculer la fonction composée $f \circ f$. Détailler votre calcul et simplifier votre expression finale.

3.33 Soit l'ensemble $\mathbb{Z}_{110} = \{0, 1, 2, \dots, 109\}$ et les deux fonctions

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}_{110} &\longrightarrow \mathbb{Z}_{110} \\ x &\longmapsto f(x) = (13x + 40) \bmod 110 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z}_{110} &\longrightarrow \mathbb{Z}_{110} \\ x &\longmapsto g(x) = (17x + 90) \bmod 110 \end{aligned}$$

- Calculer les fonctions composées $g \circ f$ et $f \circ g$. Donner des expressions aussi simples que possible.
- Quelles propriétés (injectivité, surjectivité, bijectivité) possèdent les fonctions f et g ? Argumenter brièvement.

3.34 On considère les deux fonctions

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} & \text{et} & & g : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto f(x) = \lfloor x/2 \rfloor & & & x &\longmapsto g(x) = 2x. \end{aligned}$$

Déterminer les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$. Donner des formules/expressions simplifiées, ne faisant plus intervenir de parties entières. Esquisser également les graphes des deux compositions pour x entre 0 et 5.

3.7 Solutions d'exercices choisis

3.1 a) 1) $f(E) = \{0, 2, 4, 6\}$, $f(F) = [0, 6[$, $f(G) = \mathbb{R}_+$

2) $\text{Im}(f) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$

3) $f^{-1}(S) = \{1\}$, $f^{-1}(T) =]-\infty, 1]$, $f^{-1}(U) = \mathbb{R}$

b) 1) $g(E) = g(F) = g(G) = \{1\}$

2) $\text{Im}(g) = g(\mathbb{R}) = \{1\}$

3) $g^{-1}(S) = \emptyset$, $g^{-1}(T) = g^{-1}(U) = \mathbb{R}$

c) 1) $h(E) = \{1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$, $h(F) =]1/8, 2[$, $h(G) =]0, 1]$

2) $\text{Im}(h) = h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$

3) $h^{-1}(S) = \{-1\}$, $h^{-1}(T) = [-1, +\infty[$, $h^{-1}(U) = \mathbb{R}$

d) 1) $m(E) = \{-2, 0, 2, 18\}$, $m(F) = [-2, 18[$, $m(G) = [-2, +\infty[$

2) $\text{Im}(m) = m(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

3) $m^{-1}(S) = \{-1, 2\}$, $m^{-1}(T) = [-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, 2]$, $m^{-1}(U) = [-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, +\infty[$

3.2 a) Pour $x = 0$ le logarithme naturel n'est pas défini.

b) Pour $x < 0$, la valeur de $\sqrt{x^3}$ n'est pas définie.

c) Une fonction ne peut prendre (retourner) qu'une seule valeur.

3.3 a) Non

c) Oui

e) Oui

g) Oui

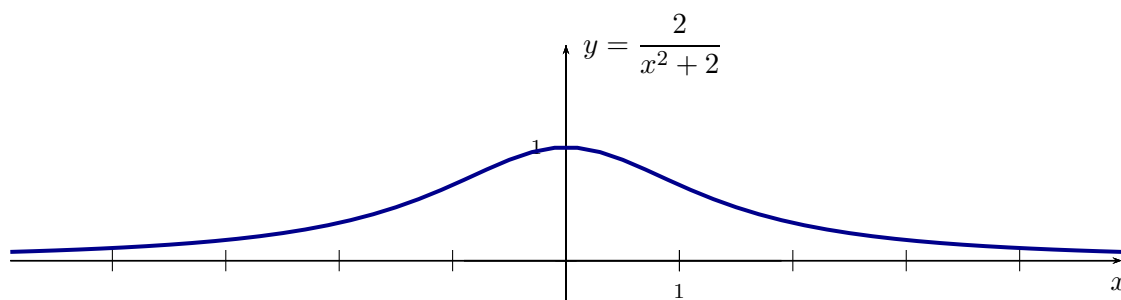
b) Oui

d) Non

f) Non

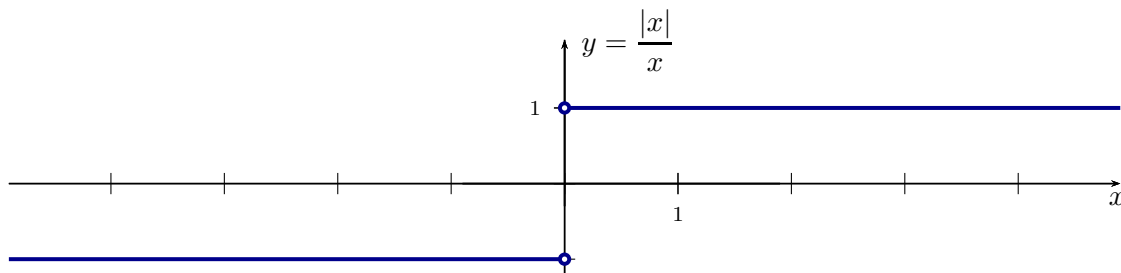
h) Non

3.4 La représentation graphique de la fonction $f(x) = \frac{2}{x^2 + 2}$ est



et son image est $\text{Im}(f) =]0, 1]$.

3.5 La représentation graphique de la fonction $f(x) = \frac{|x|}{x}$ est



et son image est $\text{Im}(f) = \{-1, 1\}$.

3.6 $g \circ f : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_-$ et $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (g \circ f)(x) = x$ $x \mapsto (f \circ g)(x) = |x|$.

- 3.7** (a) On a $f(1) = f(-1) = 2/3$ et la fonction n'est pas injective (en fait on a $f(x) = f(-x)$ quel que soit x car la fonction est paire).
 (b) On a $\text{Im}(f) = f(\mathbb{R}^*) =]0, 1]$, tout nombre hors de cet intervalle n'a pas de préimage et la fonction n'est pas surjective (le codomaine de f n'est pas égal à l'image de f).
 (c) f n'étant ni injective ni surjective, elle n'est pas bijective.

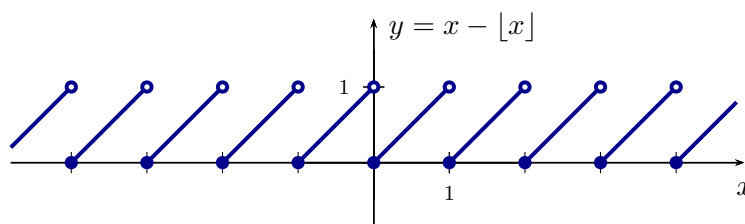
- 3.8** (a) On a $f(1) = f(2) = 1$ et la fonction n'est pas injective (en fait on a $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$, tous les nombres positifs, respectivement négatifs, ont donc la même image).
 (b) On a $\text{Im}(f) = f(\mathbb{R}^*) = \{-1, 1\}$, tout nombre différent de 1 et -1 n'a donc pas de préimage et la fonction n'est pas surjective.
 (c) f n'étant ni injective ni surjective, elle n'est pas bijective.

- 3.9** (a) Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ paire n'est jamais injective.
 (b) Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ impaire peut être injective ou non (on ne peut rien conclure en se basant uniquement sur le fait que la fonction est impaire).

- 3.10** (a) Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ paire peut être surjective ou non (on ne peut rien conclure en se basant uniquement sur le fait que la fonction est paire).
 (b) Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ impaire peut être surjective ou non (on ne peut rien conclure en se basant uniquement sur le fait que la fonction est impaire).

- 3.11** a) Oui : $f^{-1}(y) = (4 - y)/3$ c) Non, f n'est ni injective ni surjective
 b) Non, f n'est ni injective ni surjective d) Oui : $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$

3.14 La représentation graphique de la fonction « partie fractionnaire » $f(x) = x - [x]$ est



3.15 Arrondi par défaut de x : $[x - 1/2]$, arrondi par excès de x : $[x + 1/2]$.

3.16 Observons premièrement que pour tout nombre réel x nous avons $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ où $\{x\}$ est la partie fractionnaire de x (voir l'exercice 3.14). Notons également que pour tout entier n et tout réel x nous avons $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$.

L'encadrement demandé découle directement des deux observations précédentes. En effet

$$\lfloor x + y \rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor + \{x\} + \lfloor y \rfloor + \{y\} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor.$$

Pour conclure il suffit d'observer que $\lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor \in \{0, 1\}$ car une partie fractionnaire appartient toujours à l'intervalle $[0, 1[$ (la somme de deux parties fractionnaires appartient donc à l'intervalle $[0, 2[$).

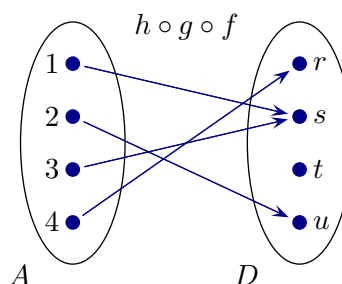
- 3.17**
- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $13 \bmod 3 = 1$ | e) $28 \bmod 6 = 4$ |
| b) $-97 \bmod 11 = 2$ | f) $-62 \bmod 9 = 1$ |
| c) $155 \bmod 19 = 3$ | g) $-7 \bmod 1 = 0$ |
| d) $-221 \bmod 23 = 9$ | h) $422 \bmod 50 = 22$ |

3.19 a) $\frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)! - n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = (n+1)n - n = (n+1-1)n = n^2$

b) $\frac{(n+1)!}{n} - (n-1)! = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{n} - (n-1)! = (n+1) \cdot (n-1)! - (n-1)!$
 $= (n+1-1)(n-1)! = n \cdot (n-1)! = n!$

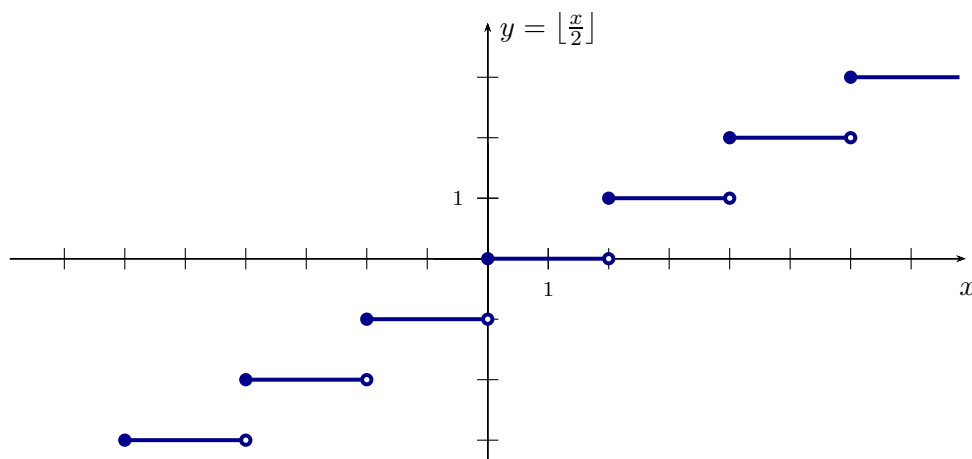
- 3.20**
- | | |
|--|--|
| a) $(n+1) \bmod n = 1$ | f) $(n! - 1) \bmod (n-1) = n-2$ |
| b) $(n^2 - 1) \bmod (n+1) = 0$ | g) $(n-1) \bmod (n+1) = n-1$ |
| c) $(n+1)! \bmod n = 0$ | h) $(n+1) \bmod (n-1) = 2$ sauf si $n = 2$ |
| d) $(n! + 1) \bmod n = 1$ | ou 3 auquel cas $(n+1) \bmod (n-1) = 0$ |
| e) $n^2 \bmod (n-1) = 1$ si $n \geq 3$ et 0 si $n = 2$ | i) $(n^3 + 1) \bmod (n+1) = 0$ |

- 3.21**
- a) Seule la fonction h est injective.
- b) Seule la fonction g est surjective.
- c) Le graphe de la fonction composée $h \circ g \circ f$ est



3.23 $\text{Im}(f) =]-1, 0] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0\}$

3.24 La représentation graphique de la fonction $f(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ est

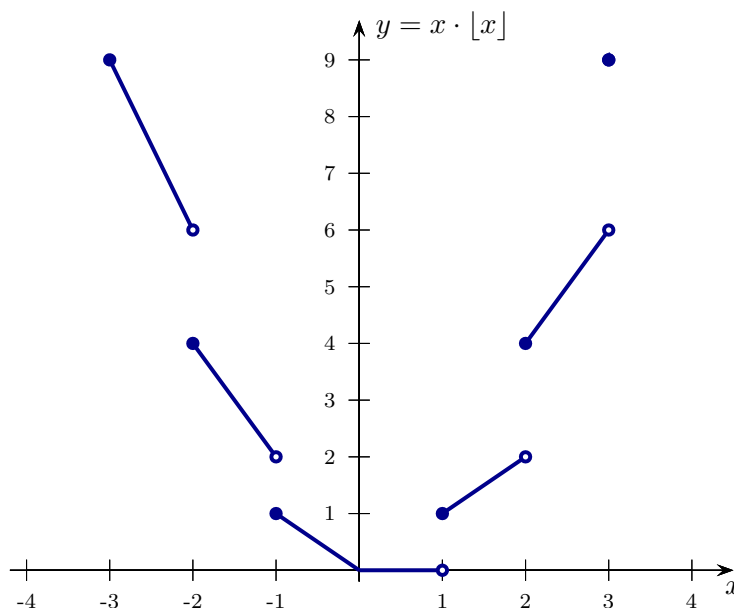


- a) L'ensemble des préimages de 1 est $f^{-1}(\{1\}) = [2, 4[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 4\}$.
- b) L'image de f est $\text{Im}(f) = \mathbb{Z}$ (équivalent à $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$).
- c) Du point a) on a qu'il existe une infinité de nombres réels ayant 1 pour image, ainsi f prend plusieurs fois la même valeur et n'est pas injective.
- d) Du point b) on a $\text{Im}(f) = \mathbb{Z} \neq \mathbb{R}$ et f n'est pas surjective.

3.25 La fonction f est égale à 1 sauf lorsque l'argument est entier auquel cas elle est nulle.

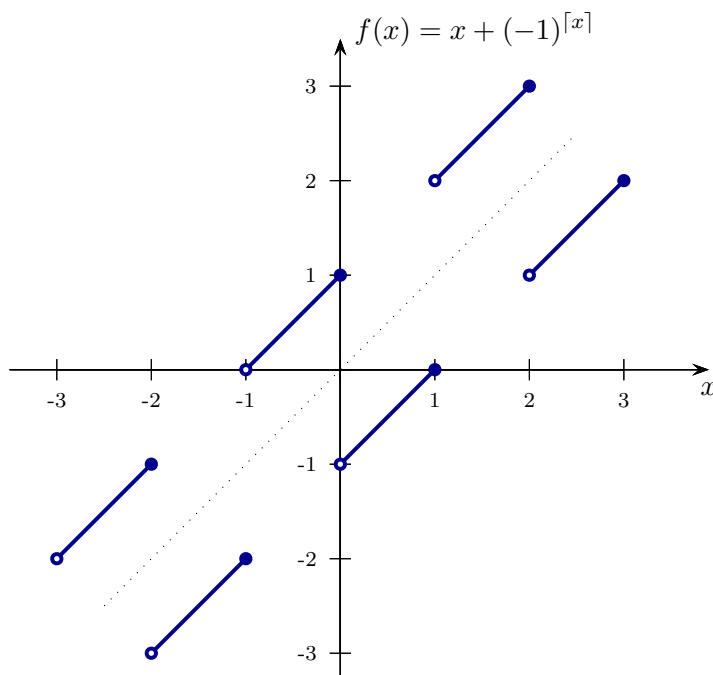
- a) $f(A) = \{0, 1\}$
- b) $\text{Im}(f) = f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$
- c) Non ($f(0) = f(1) = 0$)
- d) Non ($f(\mathbb{R}) = \{0, 1\} \neq \mathbb{R}$)

3.26 a) La représentation graphique de la fonction $f(x) = x \cdot \lfloor x \rfloor$ pour x entre -3 et 3 est

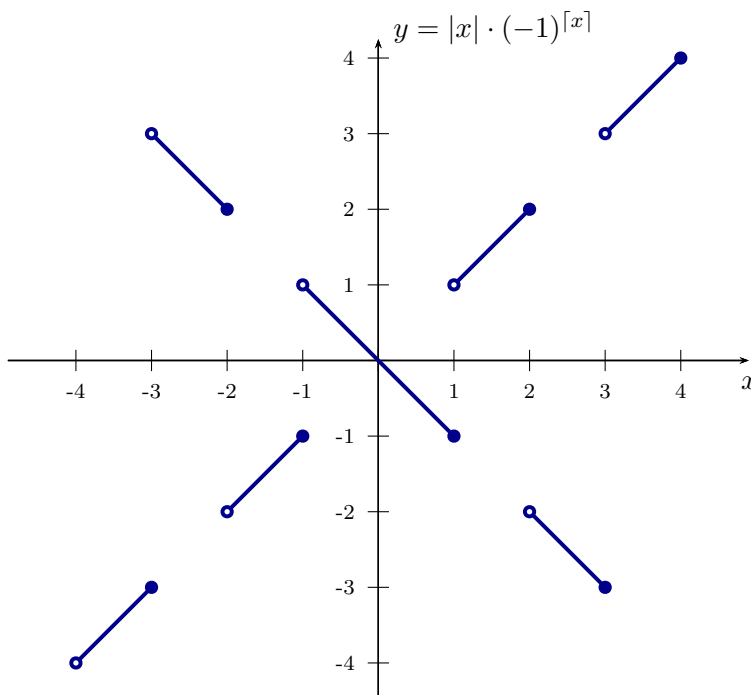


- b) La fonction f n'est pas injective car, par exemple, $f(-1) = f(1) = 1$. Certains éléments du codomaine ont donc plus d'une préimage.
- c) La fonction f n'est pas surjective car, par exemple, 2 n'a aucune préimage. L'image de la fonction n'est donc pas égale au codomaine tout entier.

- 3.27** a) La représentation graphique de la fonction $f(x) = x + (-1)^{\lceil x \rceil}$ pour x entre -3 et 3 est



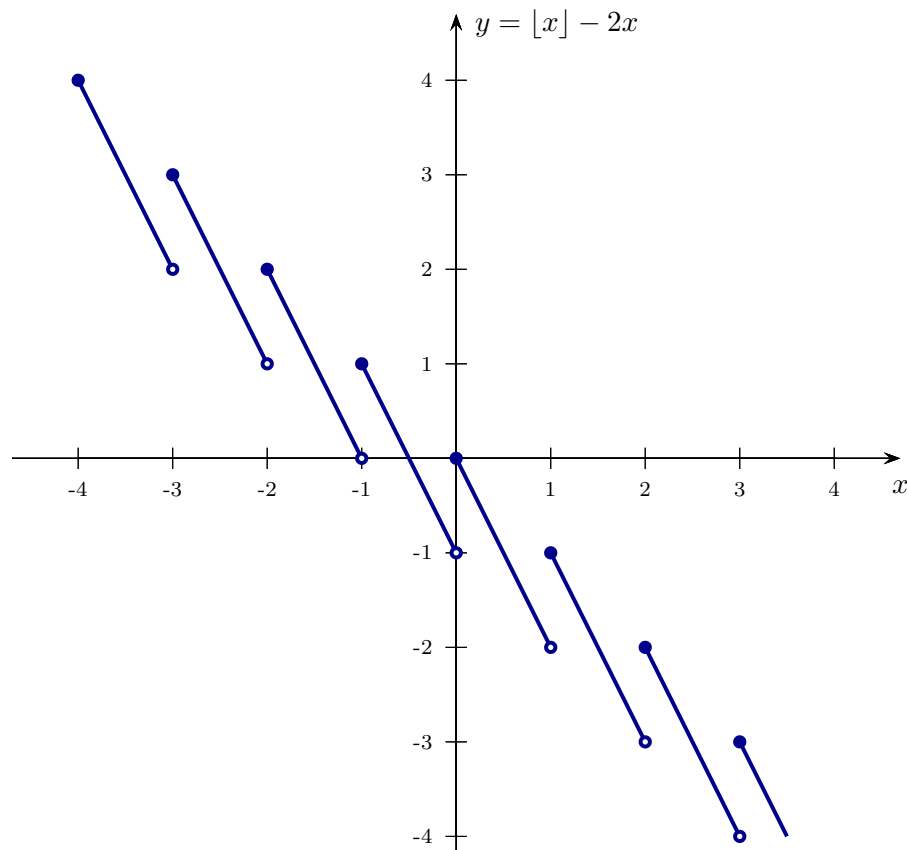
- b) L'image de la fonction f est $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ (ou $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$).
- c) L'image, par f de l'intervalle $I = [1/2, 3/2]$ est $f(I) = [-1/2, 0] \cup [2, 5/2]$.
- d) L'image réciproque, par f de l'intervalle $I = [1/2, 3/2]$ est
- $$f^{-1}(I) = [-1/2, 0] \cup [2, 5/2] = f(I).$$
- e) Le graphe représentatif de f est symétrique par rapport à la bissectrice des quadrants I et III. La fonction étant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc bijective¹ et égale à sa fonction réciproque.
- 3.28** a) La représentation graphique de la fonction $f(x) = |x| \cdot (-1)^{\lceil x \rceil}$ pour x entre -4 et 4 est



1. Comme chaque verticale intersecte le graphe de f en un et un seul point, la symétrie implique que chaque horizontale intersecte le graphe de f en un et un seul point.

- b) L'image de l'intervalle $I = [1/2, 3/2]$ est $f(I) = [-1, -1/2] \cup]1, 3/2]$.
- c) L'image réciproque de l'intervalle $I = [1/2, 3/2]$ est $f^{-1}(I) =]-1, -1/2] \cup]1, 3/2]$.
- d) La fonction f n'est pas injective car 1 et -1 ont la même image ($f(1) = f(-1) = -1$) et, plus généralement, tout entier a la même image que son opposé.
- e) La fonction f n'est pas surjective car 1 n'a pas de préimages et, plus généralement, tous les positifs impairs et tous les négatifs pairs n'ont pas de préimages.
- f) La fonction n'est pas bijective car elle n'est ni injective ni surjective.

3.29 a) La représentation graphique de la fonction $f(x) = \lfloor x \rfloor - 2x$ pour x entre -4 et 4 est

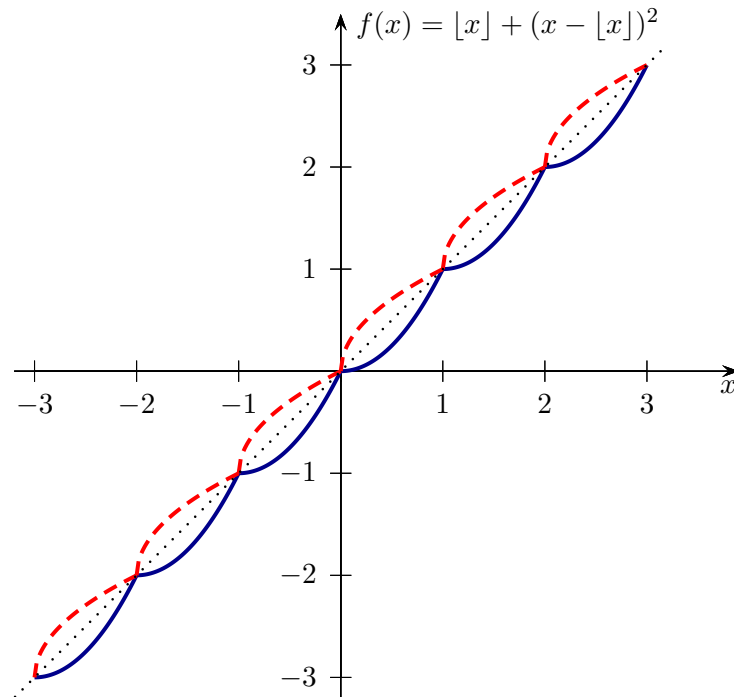


- b) L'image de la fonction f est $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ (ou $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$).
- c) L'image de l'intervalle $I = [0; 2]$ est $f(I) =]-3; 0]$.
- d) L'image réciproque de l'intervalle $J = [-1/2; 3/2]$ est

$$f^{-1}(J) = [-9/4; -2] \cup [-7/4; -1/4] \cup [0; 1/4].$$

- e) La fonction f n'est pas injective car, par exemple, $f(-1/2) = f(0) = 0$. On a donc deux éléments différents du domaine de définition possédant la même image. Plus généralement, tout élément du codomaine possède deux préimages par la fonction f .
- f) La fonction f est surjective car l'image de la fonction est égale à son codomaine tout entier : $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ (voir point a)

- 3.30** a) La représentation graphique de la fonction $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$ pour x entre -3 et 3 est présentée en ligne continue bleue ci-dessous.

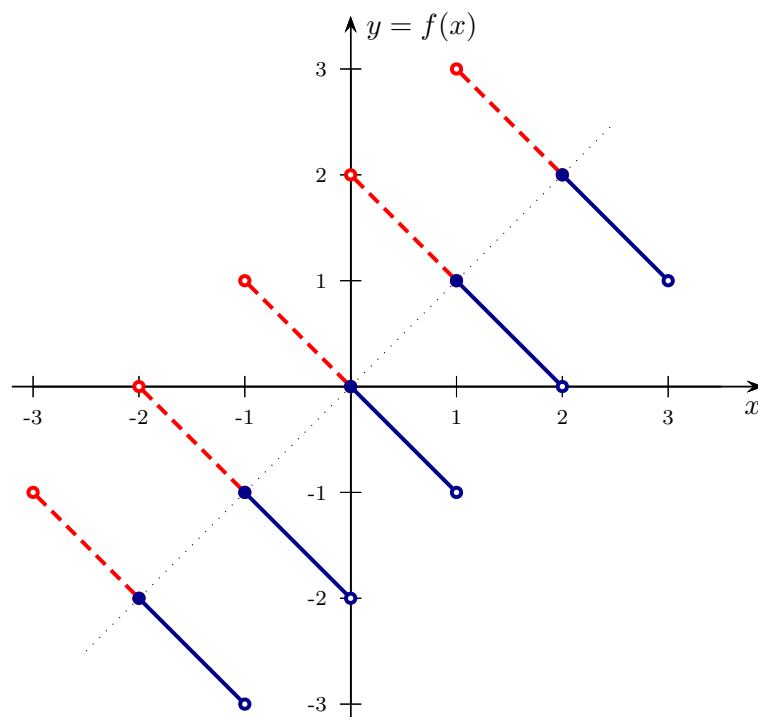


- b) La fonction f est bijective et sa réciproque est la fonction

$$f^{-1}(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}.$$

Le graphe représentatif de cette fonction réciproque s'obtient par symétrie par rapport à la bissectrice des quadrants I et III et est représenté en ligne traitillée rouge ci-dessus.

- 3.31** a) La représentation graphique de la fonction $f(x) = 2\lfloor x \rfloor - x$ pour x entre -2 et 3 est donnée en ligne continue bleue ci-dessous.



b) La fonction f est bijective et sa réciproque est la fonction

$$f^{-1}(x) = 2 \lceil x \rceil - x.$$

Le graphe représentatif de cette fonction inverse s'obtient par symétrie par rapport à la bissectrice des quadrants I et III et est représenté en ligne traitillée rouge ci-dessus.

3.32 La composée $f \circ f$ est égale à l'identité (sur $\mathbb{Z}_{60}$). On a en effet, pour tout $x \in \mathbb{Z}_{60}$,

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f((31x + 45) \bmod 60) \\ &= (31((31x + 45) \bmod 60) + 45) \bmod 60 = (961x + 1395 + 45) \bmod 60 \\ &= (x + 1440) \bmod 60 = x \end{aligned}$$

car $961 = 16 \cdot 60 + 1$ et $1440 = 24 \cdot 60$.

3.33 a) Pour tout $x \in \mathbb{Z}_{110}$ on a d'une part

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g((13x + 40) \bmod 110) \\ &= (17(13x + 40) + 90) \bmod 110 = (221x + 680 + 90) \bmod 110 \\ &= (221x + 770) \bmod 110 = x \end{aligned}$$

car $221 = 2 \cdot 110 + 1$ et $770 = 7 \cdot 110$ et d'autre part

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f((17x + 90) \bmod 110) \\ &= (13(17x + 90) + 40) \bmod 110 = (221x + 1170 + 40) \bmod 110 \\ &= (221x + 1210) \bmod 110 = x \end{aligned}$$

car $1210 = 11 \cdot 110$.

b) Les fonctions f et g sont des fonctions inverses l'une de l'autre car $g \circ f$ et $f \circ g$ sont égales à l'identité. Les fonctions f et g sont donc toutes les deux bijectives et, *a fortiori*, injectives et surjectives.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{3.34} & g \circ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad \qquad \qquad \text{et} \qquad f \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & x \longmapsto (g \circ f)(x) = x - (x \bmod 2) \qquad \qquad \qquad x \longmapsto (f \circ g)(x) = x. \end{array}$$

$$\text{Autre formulation possible pour } g \circ f : (g \circ f)(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ est pair,} \\ x - 1 & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

Suites et séries

4.1 Suites



Suite

Une **suite infinie de nombres réels** est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou de $\mathbb{N}^*$) dans $\mathbb{R}$. Si on note a cette fonction, l'image de l'entier k est appelée le **terme** d'indice k de la suite et est notée a_k . La suite est elle notée $(a_k, k = 0, 1, \dots)$ ou $(a_k, k \geq 0)$, voire simplement (a_k) lorsque le contexte est clair.

Une **suite finie de nombres réels** est une fonction de l'ensemble $\{0, 1, \dots, n-1\}$ (ou de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$) dans $\mathbb{R}$. Le nombre n de termes de la suite est appelée la **longueur** de la suite.

Une suite finie, de longueur n , n'est pas différente d'un n -uplet (et est notée de la même manière). Comme pour celui des composantes d'un n -uplet, l'ordre d'apparition des termes d'une suite est essentiel et respecte toujours l'ordre croissant de leur indice.

On peut définir une suite de nombres réels de deux manières différentes :

- 1) En spécifiant une *formule* explicite ou un algorithme non récursif permettant de calculer directement la valeur d'un terme quelconque de la suite quel que soit son indice.
- 2) À partir d'une *relation de récurrence* liant chaque terme à un ou plusieurs termes le précédant dans la suite et permettant, à partir de valeurs initiales spécifiques, de calculer tous les termes de la suite de proche en proche.



Exemple

Pour décrire la suite (a_k) des entiers positifs pairs, le plus simple est de commencer la numérotation des termes à partir de 1 et d'utiliser la formule directe

$$a_k = 2k, \quad k \geq 1.$$

Toujours en numérotant à partir de 1, on peut aussi décrire cette suite par la relation de récurrence

$$a_k = a_{k-1} + 2, \quad k \geq 2$$

et la valeur initiale $a_1 = 2$.

⌋ Cette dernière information est essentielle pour définir complètement et correctement une suite récurrente. Dans le cas présent, la même relation de récurrence mais avec la valeur initiale $a_1 = 1$ décrirait la suite des entiers positifs impairs, suite sensiblement différente de celle des entiers positifs pairs!

4.1 Donner les cinq premiers termes de la suite $(a_k, k \geq 0)$ si

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a_k = 2^{k+1}, & \text{c) } a_k = \frac{1 + (-1)^k}{2}, & \text{e) } a_k = \cos(k\pi), \\ \text{b) } a_k = 7, & \text{d) } a_k = k \bmod 2, & \text{f) } a_k = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \bmod 2. \end{array}$$

4.2 Pour chacune des suites d'entiers ci-dessous, déterminer une formule explicite permettant de calculer un terme quelconque a_k , avec $k \geq 0$ ou $k \geq 1$ à choix, de la suite.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \dots) & \text{d) } (0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, \dots) \\ \text{b) } (15, 8, 1, -6, -13, -20, -27, \dots) & \text{e) } (1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, \dots) \\ \text{c) } (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots) & \text{f) } (0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots) \end{array}$$

4.3 Donner une formule récurrente pour le terme général de chacune des suites de l'exercice précédent. Ne pas oublier de préciser la ou les valeurs initiales de la suite!



Limite d'une suite

Une suite $(a_k, k \geq 0)$ **converge** vers le nombre réel l , appelé la **limite** de la suite, si au-delà d'un certain indice tous les termes de la suite sont arbitrairement proches de l . On note alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = l.$$

Si un tel nombre réel n'existe pas, la suite **diverge**.

4.4 Calculer, si elle existe, la limite de la suite $(a_k, k \geq 1)$ lorsque

$$\text{a) } a_k = \frac{3k-2}{\lfloor k/2 \rfloor}, \quad \text{b) } a_k = \frac{[2(k-1/3)]^2}{5k^2+1}, \quad \text{c) } a_k = \frac{2k^3-5k^2+3}{3k^3+4k-9}.$$

4.5 Pour chaque suite $(a_k, k \geq 2)$, décider si elle converge vers 0 ou si elle diverge vers $+\infty$.

$$\text{a) } a_k = \frac{2^k}{k^{20}} \quad \text{b) } a_k = \frac{(\ln(k))^{10}}{k} \quad \text{c) } a_k = \frac{\sqrt[8]{k}}{\log_2(k)} \quad \text{d) } a_k = \frac{\sqrt{\ln(k)}}{\ln(\sqrt{k})}$$

4.6 Pour la suite de Fibonacci, définie par la relation de récurrence

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2}, \quad k \geq 2$$

et les valeurs initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, calculer la limite $Q = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{a_{k-1}}$ du quotient de deux termes consécutifs de la suite. (On admettra que cette limite existe)

RAPPEL. Si f est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) = L$ alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k-1) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(k+1) = L \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(k)} = \frac{1}{L} \quad (\text{si } L \neq 0)$$

4.1.1 Suites arithmétiques et géométriques



Suite arithmétique

La suite $(a_k, k \geq 0)$ est dite **arithmétique** si la différence entre deux termes consécutifs quelconques de la suite est constante. Cette différence commune est appelée la **raison** de la suite.

Pour une valeur initiale a_0 donnée, une suite arithmétique de raison r satisfait donc l'équation de récurrence

$$a_k = a_{k-1} + r, \quad k \geq 1$$

et un terme quelconque de la suite peut être calculé par la formule directe

$$a_k = a_0 + k \cdot r, \quad k \geq 0.$$



Suite géométrique

La suite $(a_k, k \geq 0)$ est dite **géométrique** si le rapport entre deux termes consécutifs quelconques de la suite est constant. Ce rapport commun est appelée la **raison** de la suite.

Pour une valeur initiale a_0 donnée, une suite géométrique de raison r satisfait donc l'équation de récurrence

$$a_k = a_{k-1} \cdot r, \quad k \geq 1$$

et un terme quelconque de la suite peut être calculé par la formule directe

$$a_k = a_0 \cdot r^k, \quad k \geq 0.$$

-
- 4.7** Donner une formule directe (et simplifiée) pour le terme général
- d'une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de terme initial $a_0 = -4$;
 - d'une suite arithmétique de raison $r = -2$ et de terme initial $b_1 = 24$;
 - d'une suite géométrique de raison $r = -2$ et de terme initial $u_0 = 1/4$;
 - d'une suite géométrique de raison $r = 1/10$ et de terme initial $v_1 = 10$.
- 4.8** Donner une définition récurrente
- de la suite croissante $(a_k, k \geq 0)$ des multiples de 5, positifs ou nuls;
 - de la suite décroissante $(b_k, k \geq 1)$ des entiers négatifs équivalents à 4 modulo 7.
- 4.9** Si le sixième terme d'une suite arithmétique est égal à 8 alors que le onzième terme est égal à -2 , que valent le terme initial et la raison de la suite ?
- 4.10** On considère une suite géométrique dont le terme initial est $a_1 = 1000$ et dont le sixième terme est $a_6 = 8/25$. Déterminer la raison r de cette suite.
- 4.11**
- On considère une suite arithmétique finie dont on connaît le premier et le dernier terme ainsi que la raison. Expliquer comment obtenir le nombre de termes de la suite.
 - Même question mais pour une suite géométrique finie dont on connaît le premier et le dernier terme ainsi que la raison.
-

4.1.2 Suites arithmético-géométriques



Suite arithmético-géométrique

Une suite $(a_k, k \geq 0)$ est dite **arithmético-géométrique** si elle vérifie la relation de récurrence

$$a_k = r \cdot a_{k-1} + c, \quad k \geq 1$$

où r et c sont deux constantes réelles.

Si $r = 1$ la suite est arithmétique alors que si $c = 0$ la suite est géométrique.

4.12 Chaque matin un patient prend une pilule contenant 20 mg de principe actif. Chaque jour, le corps du patient élimine 80% du médicament (quelle que soit la quantité présente dans son organisme). Déterminer une relation de récurrence pour la quantité de principe actif présente dans le corps du patient chaque matin (après la prise de la pilule quotidienne).

4.13 Le premier janvier de chaque année, Gaston dépose mille francs sur un compte épargne portant des intérêts annuels de 2,5 % (intérêts composés). Si le compte est vide le matin du premier janvier 2000, déterminer une relation de récurrence permettant de calculer le montant a_k sur le compte au matin du premier janvier (avant le dépôt annuel de mille francs) de l'année $2000 + k$, $k \geq 0$.

4.14 Reprenons le contexte de l'exercice 4.12 et notons a_k la quantité (en milligrammes) de principe actif présente dans le corps du patient le matin du k -ième jour de traitement, juste après l'ingestion de la pilule quotidienne. Cette quantité satisfait la relation de récurrence :

$$\begin{cases} a_k &= \frac{1}{5}a_{k-1} + 20 & k \geq 1 \\ a_0 &= 0 \end{cases}$$

a) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$a_k - \lambda = \frac{1}{5}(a_{k-1} - \lambda) \quad k \geq 1.$$

b) On considère la suite $(b_k = a_k - \lambda)_{k \geq 0}$. Donner la relation de récurrence associée à la suite $(b_k)_{k \geq 0}$ et préciser de quel type de suite il s'agit.

c) En utilisant les résultats des points précédents, développer une formule directe pour le calcul de a_k .

d) Si le patient suit son traitement depuis plusieurs années, quelle est la quantité de principe actif présente dans son organisme juste après l'ingestion de sa pilule quotidienne ?

4.15 En vous inspirant de l'exercice précédent, déterminer une formule directe pour la suite arithmético-géométrique donnée par la relation de récurrence

$$a_k = r \cdot a_{k-1} + c, \quad k \geq 1,$$

avec $a_0 \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$ et $c \neq 0$.

4.2 Sommes et produits



Symbole somme – Notation sigma

Introduite par Euler au XVIII^e siècle, la lettre sigma majuscule (Σ) est couramment utilisée en mathématiques pour noter la somme des termes d'une suite. Étant donnée une suite $(a_k, k \geq 1)$, la somme $a_1 + \dots + a_n$ de ses n premiers termes est notée

$$\sum_{k=1}^n a_k.$$

4.16 Développer complètement chacune des sommes qui suivent puis évaluer sa valeur.

a) $\sum_{k=0}^5 k$

b) $\sum_{j=1}^{10} 4$

c) $\sum_{n=-2}^2 n^3$

4.17 Réécrire chacune des sommes suivantes de manière à ce que l'indice de sommation débute à la valeur donnée.

a) $\sum_{k=0}^{30} \frac{1}{(1+k)^2} = \sum_{k=1}^? ?$

d) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)^2 + 1} = \sum_{k=0}^? ?$

b) $\sum_{i=0}^n (i+3)^3 = \sum_{i=3}^? ?$

e) $\sum_{i=0}^9 \frac{i+5}{(i+1)^2} = \sum_{i=1}^? ?$

c) $\sum_{j=-10}^0 (30-2j)^2 = \sum_{j=0}^? ?$

f) $\sum_{k=3}^n e^{\frac{(k-3)^2}{2}} = \sum_{k=0}^? ?$

4.18 Réécrire chacune des sommes suivantes à l'aide du symbole somme.

a) $S_1 = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 - 4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 - 6 \cdot 8 + \dots + 99 \cdot 101$

b) $S_2 = \frac{3}{4} + \frac{7}{9} + \frac{11}{14} + \frac{15}{19} + \frac{19}{24} + \dots + \frac{79}{99}$

4.19 Développer complètement chacune des doubles sommes qui suivent puis évaluer sa valeur.

a) $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 (i+2j)$

b) $\sum_{k=1}^2 \sum_{l=4}^6 (k^2 \cdot l)$

c) $\sum_{k=1}^3 \sum_{l=0}^2 k$

4.20 Sachant que $\sum_{i=1}^{50} a_i = 25$ et $\sum_{j=1}^{30} b_j = 50$, calculer la valeur de la double somme

$$S = \sum_{i=1}^{50} \sum_{j=1}^{30} (a_i + b_j).$$

4.21 Déterminer les nouvelles bornes de sommation de manière à conserver l'égalité dans chacune des expressions qui suivent.

a) $\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=2}^{i+1} a_{ij} = \sum_{j=?}^? \sum_{i=?}^? a_{ij}$

b) $\sum_{i=3}^{n+1} \sum_{j=i-2}^{n-1} a_{ij} = \sum_{j=?}^? \sum_{i=?}^? a_{ij}$

4.22 On considère une matrice carrée $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$ d'ordre $n \geq 1$. Écrire, à l'aide de la notation sigma, la somme $S(n)$ des éléments de l'*antidiagonale* de $\mathbf{A}$, c.-à-d. de la diagonale allant du coin supérieur droit au coin inférieur gauche de $\mathbf{A}$.



Symbole produit

De manière analogue à la notation des sommes, la lettre pi majuscule (Π) est utilisée en mathématiques pour noter le produit des termes d'une suite. Étant donnée une suite $(a_k, k \geq 1)$, le produit $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ de ses n premiers termes est noté

$$\prod_{k=1}^n a_k.$$

4.23 Évaluer chacune des expressions suivantes où n est un entier strictement positif et x un nombre réel.

a) $\prod_{k=1}^n (kx)$

b) $\prod_{j=0}^n (j+1)^2$

c) $\prod_{k=1}^n x^k$

Vos réponses changent-elles si n est un entier non négatif?

4.24 Déterminer la valeur du produit

$$\prod_{k=2}^{111} (k-1)(k+2).$$

4.25 Déterminer la valeur du produit

$$\prod_{k=3}^{100} \frac{k-2}{k+1}.$$

4.26 a) Réécrire l'expression suivante à l'aide du symbole produit.

$$F = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 100}$$

b) Déterminer ensuite sa valeur.

4.3 Séries

4.3.1 Séries télescopiques

4.27 Pour une suite $(a_k, k \geq 0)$ quelconque et un entier $n \geq 1$, simplifier

a) $\sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1})$

b) $\sum_{i=0}^n (a_i - a_{i+1})$

c) $\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_{k-1})$

4.28 Calculer la valeur de la série

$$S(n) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}, \quad n \geq 1.$$

INDICATION. Utiliser l'identité

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

4.29 a) Déterminer la valeur de la série

$$S(n) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}, \quad n \geq 2.$$

b) Déterminer ensuite, si elle existe, la limite de $S(n)$ lorsque n tend vers l'infini.

4.3.2 Séries arithmétiques



Série arithmétique

Une **série arithmétique** est la somme de plusieurs termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Soit $(a_k = a_0 + k \cdot r, k \geq 0)$ une suite arithmétique de raison r et de terme initial a_0 , la somme de ses n premiers termes est

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_0 + k \cdot r) = n \cdot \frac{a_0 + a_{n-1}}{2} \\ &= \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}. \end{aligned}$$



Somme de n premiers entiers positifs

Dans le cas particulier de la suite $(a_k = k, k \geq 1)$ des entiers positifs (suite arithmétique de raison 1), la série associée n'est rien d'autre que la somme des n premiers entiers positifs et on obtient, en spécialisant la formule précédente,

$$S^{[1]}(n) = 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

4.30 Pour chacune des séries arithmétiques qui suivent, donner (a) son terme initial, (b) sa raison, (c) son nombre de termes et (d) sa valeur. (e) Réécrire également chaque série à l'aide du symbole somme.

1) $S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 152 + 153$

2) $S_2 = -10 - 7 - 4 - \cdots + 17 + 20$

3) $S_3 = \log_a 10\,000 + \log_a 1000 + \log_a 100 + \cdots + \log_a 0,001 \quad (a > 0, a \neq 1)$

4.31 Calculer la valeur de chaque somme.

1) $S_1 = \sum_{k=1}^{100} (3k + 2)$

2) $S_2 = \sum_{k=0}^{50} (4k - 1)$

3) $S_3 = \sum_{k=-20}^{20} |7 - \frac{1}{2}k|$

4.32 Déterminer, en fonction des entiers positifs n et m , la valeur de chacune des doubles sommes qui suivent.

a) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (i + 2j)$

b) $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (3i - j)$

c) $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (i \cdot j)$

d) $\sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^m k$

- 4.33** Combien de termes de la suite $(-9, -6, -3, \dots)$ faut-il prendre pour que leur somme soit égale à 66 ?
- 4.34** Le cinquantième terme d'une suite arithmétique de raison $r = 6$ est égal à 250.
- Calculer le terme initial de cette suite.
 - Calculer la somme des 50 premiers termes de cette suite.
- 4.35** Vous devez faire creuser un puits de 40 mètres de profondeur. Vous êtes en contact avec une personne qui est prête à exécuter le travail mais demande 100 francs pour le premier mètre, 120 pour le deuxième, 140 pour le troisième, etc.
- Combien coûte le dernier mètre ?
 - Quel est le coût total d'exécution des travaux ?

4.3.3 Séries géométriques



Série géométrique

Une **série géométrique** est la somme de plusieurs termes consécutifs d'une suite géométrique.

Soit $(a_k = a_0 \cdot r^k, k \geq 0)$ une suite géométrique de raison $r \neq 1$ et de terme initial a_0 , la somme de ses n premiers termes est

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_0 \cdot r^k) = \frac{a_0 - a_n}{1 - r} = \frac{a_0 - r \cdot a_{n-1}}{1 - r} = a_0 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$



Dans l'expression $(a_0 - a_n)/(1 - r)$ le terme a_n n'est pas le dernier terme de la somme (qui est a_{n-1}) mais celui qui lui succède dans la suite géométrique.

En français, la valeur de la somme $S(n)$ de n termes consécutifs d'une suite géométrique se calcule par la formule

$$S(n) = \frac{\text{premier terme} - \text{raison} \times \text{dernier terme}}{1 - \text{raison}}$$

ou par la formule

$$S(n) = \frac{\text{premier terme} \times (1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}})}{1 - \text{raison}}.$$

- 4.36** Pour chacune des séries géométriques qui suivent, donner (a) son terme initial, (b) sa raison, (c) son nombre de termes et (d) sa valeur. (e) Réécrire également chaque série à l'aide du symbole somme.

1) $S_1 = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2048}$

2) $S_2 = \sqrt{2} + 2 + \sqrt{8} + 4 + \dots + \sqrt{2048}$

3) $S_3 = 250 - 100 + 40 - 16 + \dots + \frac{128}{125}$

4.37 On considère une suite géométrique dont le troisième terme est $a_3 = 1000$ et dont le treizième terme est $a_{13} = 125/128$. Déterminer la raison r et le terme initial a_1 de cette suite. Calculer également la valeur S de la série infinie associée.

4.38 Quelle est la valeur des séries infinies suivantes ?

1) $S_1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{15} - \frac{1}{75} - \frac{1}{375} - \dots$

2) $S_2 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} + \frac{2}{27} + \frac{1}{81} + \frac{2}{243} + \frac{1}{729} + \dots$

3) $S_3 = \frac{1}{10} + \frac{1}{50} + \frac{1}{100} + \frac{1}{500} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{5000} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{50000} + \dots$

4) $S_4 = 4 + 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$

(La suite des signes est $+++-++++-++++-\dots$)

4.39 Une personne se déplace en faisant alternativement un pas vers l'avant, puis un pas vers l'arrière. Pour chaque pas, sa longueur vaut la moitié du précédent. Si elle commence par un pas en avant de 1 mètre, à quelle distance D de son point de départ va-t-elle se stabiliser ?

4.40 Une balle en caoutchouc rebondit chaque fois aux trois quarts de la hauteur dont elle tombe. Initialement, elle est lâchée d'une hauteur de 6m. Quelle distance D aura parcourue la balle une fois qu'elle se sera immobilisée ?

4.4 Raisonnement par induction

4.41 Vérifier les formules suivantes à l'aide d'un raisonnement par induction.

a) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1, \quad n \geq 1$

b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}, \quad n \geq 1$

4.42 Vérifier les formules suivantes à l'aide d'un raisonnement par induction.

a) $\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n}{2} n(n+1), \quad n \geq 1$

b) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \quad n \geq 2$

c) $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}, \quad n \geq 1$

4.43 Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$

a) $n^3 + 2n$ est divisible par 3,

c) $n^3 - n$ est divisible par 6,

b) $n^2 + 5n$ est divisible par 2,

d) $5^n - 1$ est divisible par 4.

4.44 Pour tout entier positif k , on définit le k -ième *nombre harmonique* H_k comme la somme des inverses de k premiers entiers positifs :

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}.$$

Montrer à l'aide d'un raisonnement par induction que, pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$H_{2^n} \geq \frac{n}{2} + 1.$$

- 4.45** On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^x$. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$

$$f^{(n)}(x) = (n+x)e^x.$$

- 4.46** Montrer, à l'aide d'un raisonnement par induction, que la somme des cubes de trois entiers positifs consécutifs est divisible par 9.

4.47 Loi de De Morgan

Soit $(A_1, A_2, \dots)$ une suite d'ensembles dans un univers Ω . Vérifier à l'aide d'un raisonnement par induction que, pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}.$$

- 4.48** On considère la suite $(a_k, k \geq 0)$ définie par la relation de récurrence

$$a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2}, \quad k \geq 2$$

et les conditions initiales $a_0 = 1$ et $a_1 = 5$. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par induction, que

$$a_k = 2^{k+1} - (-1)^k, \quad k \geq 0.$$

4.5 Exercices supplémentaires et récapitulatifs

- 4.49** Donner une formule explicite pour le terme général de chacune des suites suivantes.

- a) $(10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, \dots)$,
- b) $(0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, 120, \dots)$,
- c) $(0, 4, 8, 28, 80, 244, 728, 2188, 6560, 19684, \dots)$,

INDICATION. Considérer la suite auxiliaire $(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$.

- 4.50** Donner une formule récurrente pour le terme général de chacune des suites suivantes. Préciser la ou les valeurs initiales nécessaires à votre formulation.

- a) $(20, 25, 35, 50, 70, 95, 125, 160, \dots)$,
- b) $(2, 0, 4, 0, 16, 0, 256, 0, 65536, \dots)$,
- c) $(10, 50, 100, 500, 1000, 5000, 10000, 50000, \dots)$.

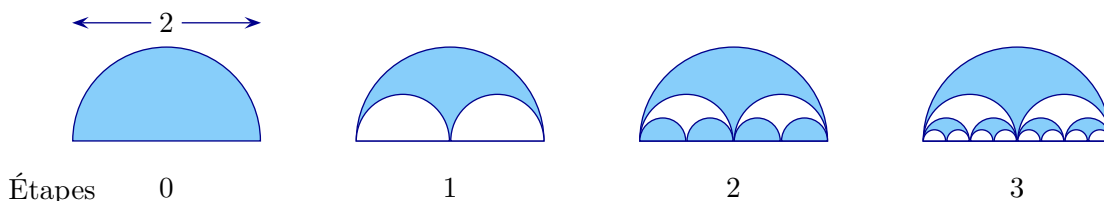
- 4.51** Déterminer les nouvelles bornes de sommation de manière à conserver l'égalité dans chacune des expressions qui suivent.

$$\text{a) } \sum_{j=-10}^0 (30-2j)^2 = \sum_{j=?}^? 4j^2, \quad \text{b) } \sum_{i=1}^n \sum_{j=\max(1, i-2)}^{n-2} a_{ij} = \sum_{j=?}^? \sum_{i=?}^? a_{ij}.$$

- 4.52** En sachant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ calculer les limites suivantes

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}, & \text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \\ \text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, & \text{d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn} \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}. \end{array}$$

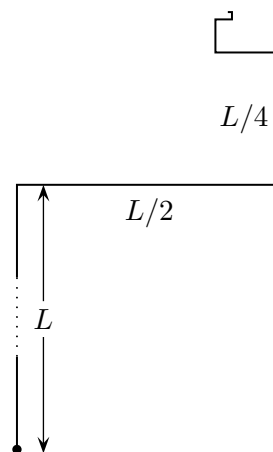
- 4.53** Un montant M est placé sur un compte épargne portant un intérêt annuel de i % (intérêt composé).
- Déterminer une relation de récurrence permettant de calculer le capital $C(t)$ présent sur le compte après t années.
 - Déterminer une formule directe pour $C(t)$.
 - Que deviennent vos formules si les intérêts sont crédités à la fin de chaque semestre ?
 - Même question si les intérêts sont crédités k fois par année ?
 - Que se passe-t-il si k tend vers l'infini ?
- 4.54** Soit $(C_1, C_2, \dots)$ une suite infinie de cubes tels que le volume de C_{k+1} est égal à la moitié du volume de C_k ($k \geq 1$). Déterminer, en fonction de la longueur a de l'arête du premier cube, la hauteur H de la « tour » obtenue en superposant tous les cubes de la suite.
- 4.55** La somme des 13 premiers termes d'une suite arithmétique vaut 130. Si le quatrième, le dixième et le septième terme (dans cet ordre) forment une suite géométrique, déterminer la raison et le premier terme de la suite arithmétique.
- 4.56** Que valent les séries infinies suivantes ?
- $S_1 = 10 - 8 + \frac{1}{10} - \frac{1}{8} + \frac{1}{100} - \frac{1}{64} + \frac{1}{1000} - \frac{1}{512} + \frac{1}{10000} - \frac{1}{4096} + \dots$
 - $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \frac{1}{512} + \dots$
(La suite des signes est $++-++-++- \dots$)
 - $S_3 = 625 - 125 + 25 + 5 - 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots$
(La suite des signes étant $+-++-++-++-++- \dots$)
- 4.57** On considère la figure obtenue en partant d'un demi-disque unité et en effectuant une infinité de retraits et d'ajouts comme illustré dans la figure qui suit.



Calculer l'aire A de la figure finale (après une infinité d'étapes).

- 4.58** L'Inspecteur Gadget vient de dégainer sa matraque à cran d'arrêt. En temps normal cette matraque télescopique se déploie en ligne droite et est formée d'une infinité de segments, chacun d'eux étant deux fois plus court que le précédent. Malheureusement pour lui, l'Inspecteur Gadget l'a utilisée dernièrement comme antenne pour se connecter à des sites peu recommandables et sa matraque est maintenant infectée par un virus informatique. Au lieu de se déployer en ligne droite, chaque segment fait un angle droit avec le précédent. Le premier angle droit est sur la droite, les deux suivants sur la gauche, les deux suivants sur la droite, les deux suivants sur la gauche et ainsi de suite (voir la figure ci-contre).

Si le premier segment a une longueur de L centimètres, calculer la distance D séparant les deux extrémités de la matraque déployée.



4.59 Déterminer la valeur de la série

$$S^{[2]}(n) = \sum_{k=1}^n k^2.$$

INDICATION. Considérer la somme $\sum_{k=1}^n [(k+1)^3 - k^3]$.

4.60 Calculer, en fonction de l'entier $n \geq 1$, la valeur de la série

$$S(n) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \sum_{k=1}^n k(k+1).$$

4.61 Calculer, en fonction de l'entier $n \geq 1$ et sans oublier de simplifier votre réponse, la valeur de la somme

$$S(n) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i, j \geq 0}} (j-i)^2.$$

4.62 Calculer, en fonction de l'entier $n \geq 1$, la valeur de la somme

$$S(n) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i, j \geq 1}} (i \cdot j).$$

4.63 Calculer, en fonction de l'entier $n \geq 1$, la valeur de la somme

$$S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}.$$

4.64 On considère la suite $(a_k, k \geq 0) = (1, 11, 111, 1111, \dots)$.

a) Donner une formule récurrente pour le terme général de cette suite.

b) Donner une formule directe pour le terme général de cette suite.

INDICATION. $1111 = 1 + 10 + 100 + 1000$.

c) Calculer ensuite la somme $S(n)$ des n premiers termes de cette suite.

4.65 Évaluer chacune des expressions qui suivent en fonction des entiers positifs n et m .

a) $\prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k}$

c) $\prod_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^k 3 \right)$

e) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (i-j)^2$

b) $\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^i 2 \right)$

d) $\sum_{k=0}^{20} |2k-17|$

f) $\prod_{k=0}^n \left(\frac{k}{2} + 3 \right)$

4.66 Évaluer chacune des expressions qui suivent en fonction des entiers positifs n et m .

a) $S(n) = \sum_{k=n}^{2n} \prod_{j=0}^k 2$

e) $A(n, m) = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m i \cdot j \right)$

b) $S(n) = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=0}^{k-2} (j+1)$

f) $S(n) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j 1$

c) $P(n) = \prod_{k=2}^n \left(k - \frac{1}{k} \right)$

g) $S(n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^i 2^{i+j}$

d) $S(n) = \sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{k-1}{k} \right)$

h) $S(n) = \sum_{k=0}^n \left(\prod_{j=2}^k 2 \right)$

4.67 Déterminer, en fonction de l'entier $n \geq 2$, la valeur du produit

$$P(n) = \prod_{k=2}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} \right).$$

4.68 Calculer, en fonction de l'entier $n \geq 1$, la valeur de la double somme

$$S(n) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} j.$$

4.69 Calculer, en fonction de l'entier $n \geq 1$, la valeur de la double somme

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j).$$

4.70 Calculer, en fonction de l'entier $n \geq 1$, la valeur de la somme

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (3k + 1).$$

4.71 Calculer, en fonction de l'entier $n \geq 0$ la valeur de la somme

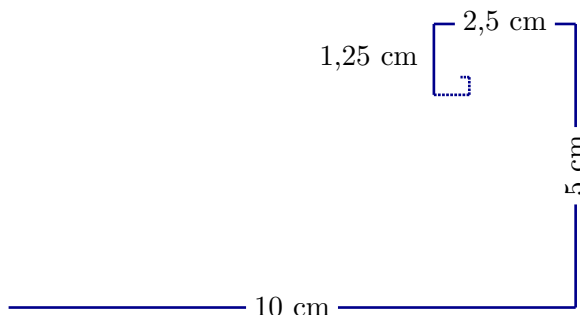
$$S(n) = \sum_{k=0}^n |k^2 - 25|.$$

4.72 Un site de vente en ligne propose des CD musicaux au prix de 24.- le premier, 23,50 le deuxième, 23.- le troisième, 22,50 le quatrième et ainsi de suite jusqu'à un prix minimal de 12.- (qui s'applique alors à tous les CD supplémentaires).

Déterminer une fonction permettant de calculer le montant que doit payer un client de ce site en fonction du nombre n de CD qu'il achète.

4.73 Un ingénieur fraîchement diplômé vient de signer son premier contrat de travail. Il s'agit d'un poste à temps partiel pour lequel il recevra un salaire annuel de 51 000.- la première année et une augmentation annuelle de 2000.- pour les suivantes. Combien d'années de travail aux conditions précédentes sont nécessaires pour atteindre un salaire cumulé de 1 400 000.- ?

4.74 Suite à une erreur de programmation, un logiciel de dessin industriel a un comportement fort étrange. À chaque tentative de dessiner un carré, le résultat obtenu est une spirale dont chaque côté est deux fois plus court que le précédent.



- Calculer la longueur L du trait dessiné par une table traçante si on utilise ce logiciel pour dessiner un carré de 10 centimètres de côté.
- Calculer également la distance D séparant le point de départ et le point de convergence de la spirale.

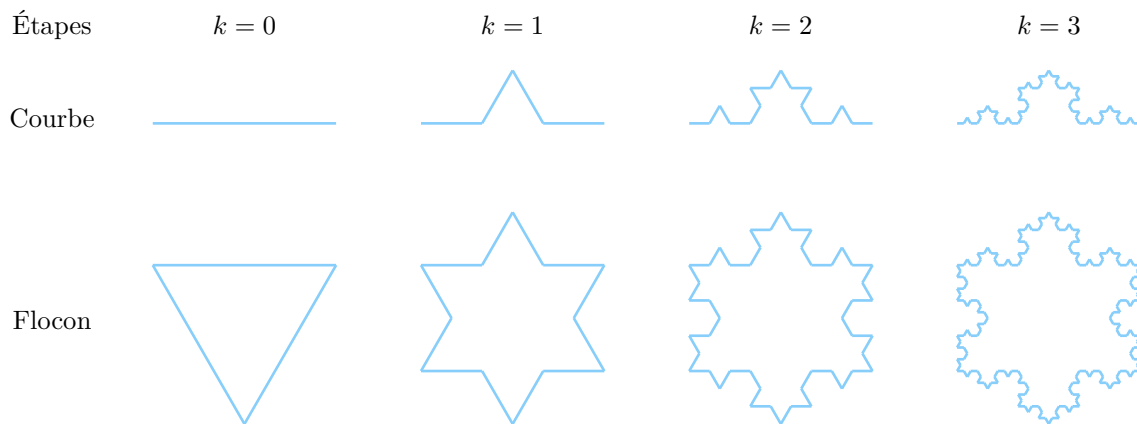


Figure 4.1 – Illustration des trois premières itérations de la construction de la courbe de Koch et du flocon de Koch.

4.75 La *courbe de Koch* est la courbe fractale obtenue en partant d'un segment de droite et en modifiant récursivement, un nombre infini de fois, chaque segment de la courbe actuelle de la façon suivante :

- 1) on divise le segment en trois segments de même longueur ;
- 2) on construit un triangle équilatéral ayant pour base le segment du milieu de la première étape et pointant « vers l'extérieur » ;
- 3) on supprime le segment du milieu, base du triangle équilatéral construit ci-dessus.

Le *flocon de Koch* est obtenu de façon similaire mais en partant d'un triangle équilatéral. Les trois premières itérations de la construction de la courbe de Koch et du flocon de Koch sont présentées en figure 4.1.

- a) Pour $k \geq 1$, on définit T_k comme le nombre de triangles ajoutés au flocon lors de l'itération k (c.-à-d. lors du passage de la courbe de l'étape $k-1$ à celle de l'étape k).

Donner une formule directe pour le terme général de la suite $(T_k, k \geq 1)$.

REMARQUE. Le nombre T_k est égal au nombre de côtés du flocon de l'étape $k-1$.

- b) On note c la longueur d'un côté du triangle équilatéral initial et A_0 son aire. On a évidemment

$$A_0 = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}.$$

Pour $k \geq 1$, on définit A_k comme l'aire d'un des triangles ajoutés lors de l'itération k .

Exprimer A_k en fonction de A_{k-1} puis directement en fonction de A_0 .

- c) Utiliser les résultats précédents pour calculer l'aire du flocon de Koch en fonction de A_0 (ou de c).

4.76 On considère une suite $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de nombres réels (par exemple la suite des notes obtenues à un travail écrit).

- a) Écrire, à l'aide du symbole somme, la formule permettant de calculer la moyenne (arithmétique) $\bar{x}$ de cette suite.

On définit la *variance* σ^2 de la suite $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ par la formule

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2.$$

(La variance est donc égale à la moyenne des carrés des écarts à la moyenne)

b) Montrer que la variance σ^2 peut également être calculée par la formule

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) - \bar{x}^2.$$

4.77 On considère le pseudocode

PROCEDURE AfficherCouples(N : entier ≥ 1)

Début

- (1) Ensemble $\leftarrow \emptyset$
- (2) **Pour** I de 0 à N **faire**
- (3) **Pour** J de $-I$ à I **faire**
- (4) Ensemble $\leftarrow$ Ensemble $\cup \{(I, J)\}$
- (5) **Fin Pour**
- (6) **Fin Pour**
- (7) Afficher Ensemble

Fin

- a) Calculer le cardinal de l'ensemble de couples construit par la procédure.
- b) Inverser les boucles des lignes (2) et (3). Donner le nouveau code de ces deux lignes, tout le reste devant rester inchangé. Il est bien évident que la nouvelle procédure devra générer le **même ensemble** de couples que le code initial.

4.78 Soit x un nombre réel différent de 1 et n un entier positif. On considère la fonction

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}.$$

- a) Calculer la dérivée $f'_n(x)$.
- b) Dédurre du résultat précédent la valeur de la série

$$\sum_{k=1}^n kx^k.$$

- c) Sous quelle condition (sur x) la série précédente converge-t-elle ? Quelle est alors la limite de la série ?

4.79 En utilisant les résultats de l'exercice précédent, calculer

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n k 2^k, \quad \text{b) } \sum_{k=1}^n k(-1)^k, \quad \text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-1}{2^k}.$$

4.80 Un serveur de calcul reçoit des requêtes à la fréquence de λ requêtes par heure. Les requêtes sont traitées les unes après les autres dans leur ordre d'arrivée et la puissance du serveur permet de traiter au maximum μ requêtes par heure. La situation est schématisée en figure 4.2.

- a) Si le *taux* (la fréquence) *d'arrivée* est de λ requêtes par heure, quel est le temps moyen entre deux arrivées successives ?
- b) Si le *taux* (la fréquence) *de service* est de μ requêtes par heure, quel est le temps moyen de traitement d'une requête ?

On définit le *facteur d'utilisation* ρ dans le serveur par le rapport entre les taux d'arrivée et de service :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

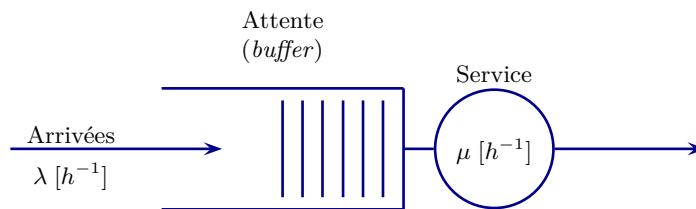


Figure 4.2 – Représentation schématique du serveur de calcul de l'exercice 4.80.

- c) Si le système est en opération pendant une très longue période, quelle condition doit satisfaire le facteur d'utilisation ρ pour que le serveur soit *stable*, c.-à-d. que le nombre de requêtes en attente n'explose pas ?

Sous certaines conditions (en particulier que le serveur soit stable), on peut montrer que la proportion du temps où k requêtes sont présentes dans le système (en traitement ou en attente) est égale à

$$(1 - \rho)\rho^k, \quad k \geq 0.$$

Afin de déterminer le nombre moyen N de requêtes présentes (en traitement ou en attente) à un instant donné, il suffit de calculer la moyenne pondérée

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} k(1 - \rho)\rho^k.$$

- d) Calculer le nombre moyen N de requêtes présentes dans un serveur stable.

Le nombre moyen N_a de requêtes en attente à un instant donné est, lui, égal à la moyenne pondérée

$$N_a = \sum_{k=1}^{\infty} (k - 1)(1 - \rho)\rho^k$$

car pendant la proportion du temps où k requêtes sont présentes (proportion égale à $(1 - \rho)\rho^k$), il y en a $(k - 1)$ en attente.

- e) Calculer le nombre moyen N_a de requêtes en attente dans un serveur stable.

4.6 Solutions d'exercices choisis

- 4.1** a) $a_0 = 2, a_1 = 4, a_2 = 8, a_3 = 16, a_4 = 32$ d) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 0$
 b) $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 7$ e) $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 1$
 c) $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1$ f) $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 0$
- 4.2** a) $a_k = 3 \cdot 2^k, k \geq 0$ (ou $a_k = 3 \cdot 2^{k-1}, k \geq 1$)
 b) $a_k = 15 - 7k, k \geq 0$ (ou $a_k = 22 - 7k, k \geq 1$)
 c) $a_k = \cos(k\frac{\pi}{2}), k \geq 0$ ou $a_k = ((k + 1) \bmod 2)(-1)^{\lfloor k/2 \rfloor}, k \geq 0$
 d) $a_k = 2^k - 1, k \geq 0$ (ou $a_k = 2^{k-1} - 1, k \geq 1$)
 e) $a_k = 2^{k/2} \lfloor (k + 1) \bmod 2 \rfloor, k \geq 0$
 f) $a_k = \lfloor k/2 \rfloor, k \geq 0$

- 4.3** a) $a_k = 2a_{k-1}$, $k \geq 1$ avec $a_0 = 3$
 b) $a_k = a_{k-1} - 7$, $k \geq 1$ avec $a_0 = 15$
 c) $a_k = -a_{k-2}$, $k \geq 2$ avec $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$
 d) $a_k = 2a_{k-1} + 1$, $k \geq 1$ avec $a_0 = 0$ (ou $a_k = a_{k-1} + 2^{k-1}$, $k \geq 1$ avec $a_0 = 0$)
 e) $a_k = 2a_{k-2}$, $k \geq 2$ avec $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$
 f) $a_k = a_{k-2} + 1$, $k \geq 2$ avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 0$

4.4 a)
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{3k-2}{\lfloor k/2 \rfloor} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{6(k/2) - 2}{\lfloor k/2 \rfloor} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{6(\lfloor k/2 \rfloor + \{k/2\}) - 2}{\lfloor k/2 \rfloor}$$

$$= 6 + \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{6\{k/2\} - 2}{\lfloor k/2 \rfloor} = 6$$

RAPPEL. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ dénote la partie fractionnaire de x .

b)
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor 2(k-1/3) \rfloor^2}{5k^2 + 1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor 2k - 2/3 \rfloor^2}{5k^2 + 1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(2k + \lfloor -2/3 \rfloor)^2}{5k^2 + 1}$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4k^2 - 4k + 1}{5k^2 + 1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{4 - 4/k + 1/k^2}{5 + 1/k^2} = \frac{4}{5}$$

c)
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2k^3 - 5k^2 + 3}{3k^3 + 4k - 9} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2 - 5/k + 3/k^3}{3 + 4/k^2 - 9/k^3} = \frac{2}{3}$$

- 4.5** a) Diverge vers $+\infty$ b) Converge vers 0 c) Diverge vers $+\infty$ d) Converge vers 0

4.6 La limite Q doit vérifier

$$Q = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k-1} + a_{k-2}}{a_{k-1}} = 1 + \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k-2}}{a_{k-1}} = 1 + \frac{1}{Q}$$

et en résolvant on obtient $Q = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (l'autre solution est négative).

- 4.7** a) $a_k = 3k - 4$, $k \geq 0$ c) $u_k = (-2)^{k-2}$, $k \geq 0$
 b) $b_k = 26 - 2k$, $k \geq 1$ d) $v_k = 10^{2-k}$, $k \geq 1$

- 4.8** a) $a_k = a_{k-1} + 5$, $k \geq 1$ avec $a_0 = 0$ b) $b_k = b_{k-1} - 7$, $k \geq 2$ avec $b_1 = -3$

4.9 Le k -ième terme d'une suite arithmétique de raison r et de terme initial a_1 se calcule par la formule directe $a_k = a_1 + (k-1)r$, $k \geq 1$. Ainsi,

$$a_{11} - a_6 = a_1 + 10r - (a_1 + 5r) = 5r.$$

De l'énoncé on a $a_{11} - a_6 = -2 - 8 = -10$ et la raison de la suite est $r = -2$. De $a_6 = a_1 + 5r$, on obtient la valeur du terme initial : $a_1 = a_6 - 5r = 8 - 5(-2) = 18$.

4.10 La suite étant géométrique on a $a_6 = a_1 \cdot r^5$. Ainsi

$$r^5 = \frac{a_6}{a_1} = \frac{8}{25 \cdot 1000} = \frac{2^3}{5^2 \cdot 10^3} = \frac{1}{5^5} = \left(\frac{1}{5}\right)^5$$

et la raison cherchée est $r = 1/5$.

4.12 Si a_k dénote la quantité (en milligrammes) de principe actif présente dans le corps du patient le matin du k -ième jour de traitement juste après la prise quotidienne, on a

$$a_k = \frac{1}{5}a_{k-1} + 20, \quad \text{pour } k \geq 1,$$

avec $a_0 = 0$.

4.13 Le montant Si a_k sur le compte au matin du premier janvier (avant le dépôt annuel de mille francs) de l'année $2000 + k$ vérifie la relation de récurrence

$$\begin{cases} a_k &= 1,025a_{k-1} + 1025, & k \geq 1 \\ a_0 &= 0 \end{cases}$$

4.14 a) $\lambda = 25$

b) La suite $(b_k)_{k \geq 0}$ est géométrique de raison $r = \frac{1}{5}$ et de terme initial $b_0 = -\lambda = -25$.

c) Le terme général de la suite $(a_k, k \geq 0)$ est donné par la formule

$$a_k = 25 \left(1 - \left(\frac{1}{5} \right)^k \right), \quad k \geq 0$$

d) La limite de la suite (a_k) est $a_\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} 25 \left(1 - \left(\frac{1}{5} \right)^k \right) = 25$ mg.

4.15 Le terme général d'une suite arithmético-géométrique de relation de récurrence

$$a_k = r \cdot a_{k-1} + c, \quad k \geq 1$$

avec $a_0 \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$ et $c \neq 0$, est

$$a_k = \frac{c}{1-r} + \left(a_0 - \frac{c}{1-r} \right) r^k, \quad k \geq 0.$$

4.16 a) $\sum_{k=0}^5 k = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

b) $\sum_{j=1}^{10} 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 40$

c) $\sum_{n=-2}^2 n^3 = (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3 + 2^3 = 0$

4.17 a) $\sum_{k=0}^{30} \frac{1}{(1+k)^2} = \sum_{k=1}^{31} \frac{1}{k^2}$

d) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)^2 + 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2 + 1}$

b) $\sum_{i=0}^n (i+3)^3 = \sum_{i=3}^{n+3} i^3$

e) $\sum_{i=0}^9 \frac{i+5}{(i+1)^2} = \sum_{i=1}^{10} \frac{i+4}{i^2},$

c) $\sum_{j=-10}^0 (30-2j)^2 = \sum_{j=0}^{10} (50-2j)^2$

f) $\sum_{k=3}^n e^{\frac{(k-3)^2}{2}} = \sum_{k=0}^{n-3} e^{\frac{k^2}{2}}$

REMARQUE. Pour le point c) on a aussi $\sum_{j=-10}^0 (30-2j)^2 = \sum_{j=0}^{10} (30+2j)^2$.

4.18 a) $S_1 = \sum_{k=1}^{99} (-1)^{k+1} k(k+2)$

b) $\sum_{k=0}^{19} S_2 = \frac{3+4k}{4+5k}$ ou $S_2 = \sum_{k=1}^{20} \frac{4k-1}{5k-1}$

$$4.19 \quad a) \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 (i+2j) = (1+2) + (1+4) + (1+6) + (2+2) + (2+4) + (2+6) = 33$$

$$b) \sum_{k=1}^2 \sum_{l=4}^6 (k^2 \cdot l) = (1 \cdot 4) + (1 \cdot 5) + (1 \cdot 6) + (4 \cdot 4) + (4 \cdot 5) + (4 \cdot 6) = 75$$

$$c) \sum_{k=1}^3 \sum_{l=0}^2 k = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 = 18$$

$$4.20 \quad S = \sum_{i=1}^{50} \sum_{j=1}^{30} (a_i + b_j) = \sum_{i=1}^{50} \sum_{j=1}^{30} a_i + \sum_{i=1}^{50} \sum_{j=1}^{30} b_j = 30 \sum_{i=1}^{50} a_i + 50 \sum_{j=1}^{30} b_j = 30 \cdot 25 + 50^2 = 3250$$

$$4.21 \quad a) \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=2}^{i+1} a_{ij} = \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{i=j-1}^{n-2} a_{ij} \quad b) \sum_{i=3}^{n+1} \sum_{j=i-2}^{n-1} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=3}^{j+2} a_{ij}$$

$$4.22 \quad S(n) = a_{1,n} + a_{2,n-1} + a_{3,n-2} + \cdots + a_{n-1,2} + a_{n,1} = \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j \geq 1}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n a_{i,n+1-i}$$

$$4.23 \quad a) \prod_{k=1}^n kx = n! x^n \quad b) \prod_{j=0}^n (j+1)^2 = [(n+1)!]^2 \quad c) \prod_{k=1}^n x^k = x^{\sum_{k=1}^n k} = x^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Les trois réponses restent valables même lorsque n est nul.

$$4.24 \quad \prod_{k=2}^{111} (k-1)(k+2) = \prod_{k=2}^{111} (k-1) \cdot \prod_{k=2}^{111} (k+2) = \prod_{k=1}^{110} k \cdot \prod_{k=4}^{113} k = 110! \cdot \frac{113!}{3!} = (110!)^2 \cdot 37 \cdot 56 \cdot 113$$

$$4.25 \quad \prod_{k=3}^{100} \frac{k-2}{k+1} = \frac{\prod_{k=3}^{100} k-2}{\prod_{k=3}^{100} k+1} = \frac{\prod_{k=1}^{98} k}{\prod_{k=4}^{101} k} = \frac{98! \cdot 3!}{101!} = \frac{6}{99 \cdot 100 \cdot 101} = \frac{1}{33 \cdot 50 \cdot 101}$$

$$4.26 \quad a) F = \prod_{k=1}^{50} \frac{2k-1}{2k} \quad b) F = \frac{\prod_{k=1}^{50} (2k-1)}{\prod_{k=1}^{50} 2k} = \frac{\prod_{k=1}^{100} k}{\left(\prod_{k=1}^{50} 2k\right)^2} = \frac{100!}{2^{100} (50!)^2}$$

$$4.27 \quad a) \sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1}) = \sum_{j=1}^n a_j - \sum_{j=1}^n a_{j-1} = \sum_{j=1}^n a_j - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \\ = \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j + a_n \right) - \left(a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j \right) = a_n - a_0$$

$$b) \sum_{i=0}^n (a_i - a_{i+1}) = \sum_{i=0}^n a_i - \sum_{i=0}^n a_{i+1} = \sum_{i=0}^n a_i - \sum_{i=1}^{n+1} a_i \\ = \left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i + a_{n+1} \right) = a_0 - a_{n+1}$$

$$c) \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^n a_{k+1} - \sum_{k=1}^n a_{k-1} = \sum_{k=2}^{n+1} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ = a_n + a_{n+1} - (a_0 + a_1)$$

$$4.28 \quad S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

$$4.29 \quad \text{a) } \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \quad \text{b) } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{3}{4}$$

4.30 1) (a) terme initial $a_1 = 1$, (b) raison $r = 1$, (c) nombre de termes $n = 153$,

$$(d) S_1 = 153 \cdot \frac{1+153}{2} = 153 \cdot 77 = 11\,781, (e) S_1 = \sum_{k=1}^{153} k \text{ ou } S_1 = \sum_{k=0}^{152} (k+1).$$

2) (a) terme initial $a_0 = -10$, (b) raison $r = 3$, (c) nombre de termes $n = 11$,

$$(d) S_2 = 11 \cdot \frac{-10+20}{2} = 55, (e) S_2 = \sum_{k=0}^{10} (3k-10) \text{ ou } S_2 = \sum_{k=1}^{11} (3k-13).$$

3) (a) terme initial $a_0 = \log_a 10\,000 = 4 \log_a 10$, (b) raison $r = -\log_a 10$,

$$(c) \text{ nombre de termes } n = 8, (d) S_3 = 8 \cdot \frac{4 \log_a 10 - 3 \log_a 10}{2} = 4 \log_a 10,$$

$$(e) S_3 = \sum_{k=0}^7 (4-k) \log_a 10.$$

4.31 1) Il s'agit d'une série arithmétique de raison 3, de terme initial 5 et comptant 100 termes.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{100} (3k+2) = 100 \cdot \frac{(5+302)}{2} = 15\,350.$$

On a aussi (mais le développement est inutilement long)

$$S_1 = 3 \sum_{k=1}^{100} k + 2 \sum_{k=1}^{100} 1 = 3 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2} + 200 = 3 \cdot 50 \cdot 101 + 200 = 15\,150 + 200 = 15\,350.$$

2) Il s'agit d'une série arithmétique de raison 4, de terme initial -1 et comptant 51 termes.

$$S_2 = \sum_{k=0}^{50} (4k-1) = 51 \cdot \frac{(-1+199)}{2} = 51 \cdot 99 = 5049.$$

3) Il **ne s'agit pas** d'une série arithmétique mais de la somme de deux séries arithmétiques. En effet

$$7 - \frac{1}{2}k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k = 14 \quad \Longrightarrow \quad |7 - \frac{1}{2}k| = \begin{cases} 7 - \frac{1}{2}k & \text{si } k \leq 14 \\ \frac{1}{2}k - 7 & \text{si } k > 14 \end{cases}$$

et la somme s'écrit alors

$$S_3 = \sum_{k=-20}^{20} |7 - \frac{1}{2}k| = \sum_{k=-20}^{14} (7 - \frac{1}{2}k) + \sum_{k=15}^{20} (\frac{1}{2}k - 7) = 35 \cdot \frac{17+0}{2} + 6 \cdot \frac{\frac{1}{2} + 3}{2} = 308.$$

$$4.32 \quad \text{a) } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (i+2j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m 2j = m \sum_{i=1}^n i + 2n \sum_{j=1}^m j$$

$$= m \frac{n(n+1)}{2} + 2n \frac{m(m+1)}{2} = \frac{nm(n+2m+3)}{2}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (3i - j) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m 3i - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m j = 3(m+1) \sum_{i=0}^n i - (n+1) \sum_{j=0}^m j \\
&= 3(m+1) \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \frac{m(m+1)}{2} = \frac{(n+1)(m+1)(3n-m)}{2} \\
\text{c) } \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (i \cdot j) &= \left(\sum_{i=0}^n i \right) \left(\sum_{j=0}^m j \right) = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{m(m+1)}{2} = \frac{n(n+1)m(m+1)}{4} \\
\text{d) } \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^m k &= \left(\sum_{k=1}^n k \right) \left(\sum_{l=0}^m 1 \right) = \frac{n(n+1)}{2} \cdot (m+1)
\end{aligned}$$

4.33 Il faut sommer les 11 premiers termes de la suite.

4.34 a) Si on note $(a_k, k \geq 0)$ la suite, on a

$$a_k = a_0 + k \cdot r, \quad k \geq 0.$$

De l'énoncé on tire

$$r = 6 \quad \text{et} \quad a_{49} = 250.$$

Le terme initial s'obtient alors facilement :

$$a_{49} = a_0 + 49r \iff a_0 = a_{49} - 49r \implies a_0 = 250 - 49 \cdot 6 = 250 - 294 = -44.$$

b) La somme des 50 premiers termes de la suite est

$$S(50) = 50 \cdot \frac{a_0 + a_{49}}{2} = 50 \cdot \frac{-44 + 250}{2} = 50 \cdot 103 = 5150.$$

4.35 a) Le dernier mètre coûte 880.– b) Le coût des travaux est de 19 600.–

4.36 1) (a) $a_1 = 2$, (b) $r = -1/2$, (c) $n = 13$,

$$\text{(d) } S_1 = \frac{2 - (-1/2)(1/2048)}{1 - (-1/2)} = \frac{2^{13} + 1}{3 \cdot 2^{11}} = \frac{2731}{2048},$$

$$\text{(e) } S_1 = \sum_{k=1}^{13} 2(-\frac{1}{2})^{k-1} \text{ ou } S_1 = \sum_{k=0}^{12} 2(-\frac{1}{2})^k.$$

2) (a) $a_1 = \sqrt{2}$, (b) $r = \sqrt{2}$, (c) $n = 11$,

$$\text{(d) } S_2 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{2048}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{64 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = 63\sqrt{2} + 62,$$

$$\text{(e) } S_2 = \sum_{k=1}^{11} \sqrt{2}^k = \sum_{k=1}^{11} 2^{k/2} \text{ ou } S_2 = \sum_{k=0}^{10} \sqrt{2}^{k+1} = \sum_{k=0}^{10} 2^{(k+1)/2}.$$

3) (a) $a_1 = 250$, (b) $r = -2/5$, (c) $n = 7$,

$$\text{(d) } S_3 = \frac{250 - (-2/5)(128/125)}{1 - (-2/5)} = \frac{250 + 256/625}{7/5} = \frac{1250 + 256/125}{7} = \frac{22\,358}{125},$$

$$\text{(e) } S_3 = \sum_{k=1}^7 250(-\frac{2}{5})^{k-1} \text{ ou } S_3 = \sum_{k=0}^6 250(-\frac{2}{5})^k.$$

4.37 On a deux raisons possibles, $r = 1/2$ ou $r = -1/2$. Dans les deux cas le terme initial est $a_1 = 4000$. Pour $r = 1/2$ la valeur S de la série infinie est égale à 8000 alors que pour $r = -1/2$ elle est égale à $8000/3$.

4.38 1) Il s'agit d'une série géométrique de raison $1/5$ et de terme initial $-1/3$:

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^k = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = -\frac{5}{12}.$$

$$\begin{aligned} 2) \quad S_2 &= 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} + \frac{2}{27} + \frac{1}{81} + \frac{2}{243} + \frac{1}{729} + \dots \\ &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \frac{1}{729} + \dots\right)}_{\text{Série géom. avec } r = \frac{1}{3} \text{ et } a_0 = 1} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{27} + \frac{1}{243} + \dots\right)}_{\text{Série géom. avec } r = \frac{1}{9} \text{ et } a_0 = \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{2} + \frac{3}{8} = \frac{15}{8} \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} S_2 &= 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} + \frac{2}{27} + \frac{1}{81} + \frac{2}{243} + \frac{1}{729} + \dots \\ &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \dots\right)}_{\text{Série géom. avec } r = \frac{1}{9} \text{ et } a_0 = 1} + \underbrace{\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{27} + \frac{2}{243} + \dots\right)}_{\text{Série géom. avec } r = \frac{1}{9} \text{ et } a_0 = \frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} + \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{15}{8} \\ 3) \quad S_3 &= \frac{1}{10} + \frac{1}{50} + \frac{1}{100} + \frac{1}{500} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{5000} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{50000} + \dots \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots\right)}_{\text{Deux séries géométriques de raison } 1/10, \text{ donc convergentes}} + \underbrace{\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{500} + \frac{1}{5000} + \frac{1}{50000} + \dots\right)}_{\text{Deux séries géométriques de raison } 1/10, \text{ donc convergentes}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{50} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{50}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \\ &= \frac{6}{50} \cdot \frac{1}{1 - 1/10} = \frac{3}{25} \cdot \frac{10}{9} = \frac{2}{15} \\ 4) \quad S_4 &= 4 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + 2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{16}{3} + \frac{8}{5} = \frac{104}{15} \end{aligned}$$

4.39 La distance D séparant le point de départ du point de stabilisation est

$$D = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 + 1/2} = \frac{2}{3} \text{ m.}$$

4.40 La distance D parcourue par la balle est de 42 mètres.

4.41 a) On veut montrer que la formule

$$P(n) = \ll 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \gg$$

est correcte pour tout entier $n \geq 1$. En utilisant le symbole somme, cette formule s'écrit

$$P(n) = \ll \sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1 \gg$$

1) *Pas initial* : Pour $n = 1$ on a, d'une part,

$$1 \cdot 1! = 1 \cdot 1 = 1$$

et, d'autre part,

$$(1 + 1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Ainsi la formule est correcte pour $n = 1$ et le pas initial est vérifié.

2) *Pas d'induction* : On suppose la formule correcte pour $m \geq 1$ fixé, c.-à-d. on considère l'hypothèse d'induction

$$\text{H.I. : } \sum_{k=1}^m k \cdot k! = (m + 1)! - 1$$

et on vérifie qu'elle est encore correcte au pas suivant, c.-à-d. que

$$\sum_{k=1}^{m+1} k \cdot k! = (m + 2)! - 1.$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^m k \cdot k! + (m + 1) \cdot (m + 1)! \stackrel{\text{H.I.}}{=} (m + 1)! - 1 + (m + 1) \cdot (m + 1)! \\ &= (m + 1)! (1 + (m + 1)) - 1 = (m + 1)! (m + 2) - 1 = (m + 2)! - 1. \end{aligned}$$

Ainsi le pas d'induction est vérifié et on peut conclure que la formule est correcte pour tout entier $n \geq 1$.

b) On veut montrer que la formule

$$P(n) = \left\langle \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n + 2}{2^n} \right\rangle$$

est correcte pour tout entier $n \geq 1$. En utilisant le symbole somme, cette formule s'écrit

$$P(n) = \left\langle \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n + 2}{2^n} \right\rangle$$

1) *Pas initial* : Pour $n = 1$ on a, d'une part,

$$\sum_{k=1}^1 \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2}$$

et, d'autre part,

$$2 - \frac{1 + 2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi la formule est correcte pour $n = 1$ et le pas initial est vérifié.

2) *Pas d'induction* : On suppose la formule correcte pour $m \geq 1$ fixé, c.-à-d. on considère l'hypothèse d'induction

$$\text{H.I. : } \sum_{k=1}^m \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{m + 2}{2^m}$$

et on vérifie qu'elle est encore correcte au pas suivant, c.-à-d. que

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{m + 3}{2^{m+1}}.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^m \frac{k}{2^k} + \frac{m+1}{2^{m+1}} \stackrel{\text{H.I.}}{=} 2 - \frac{m+2}{2^m} + \frac{m+1}{2^{m+1}} = 2 - \frac{2m+4}{2^{m+1}} + \frac{m+1}{2^{m+1}} \\ &= 2 - \frac{2m+4-(m+1)}{2^{m+1}} = 2 - \frac{m+3}{2^{m+1}}.\end{aligned}$$

Ainsi le pas d'induction est vérifié et on peut conclure que la formule est correcte pour tout entier $n \geq 1$.

4.42 a) On veut montrer, pour tout $n \geq 1$, la formule

$$P(n) = \ll \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n}{2} n(n+1) \gg$$

1) *Pas initial* : Pour $n = 1$ on a $\sum_{k=1}^1 (-1)^k k^2 = (-1)^1 \cdot 1^2 = -1$ et $\frac{(-1)^1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = -1$, ainsi $P(1)$ est vraie.

2) *Pas d'induction* : Supposons $P(m)$ correcte pour un $m \geq 1$ fixé, c.-à-d. supposons que

$$\sum_{k=1}^m (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^m}{2} m(m+1) \quad (\text{H.I.})$$

et montrons que $P(m+1)$ l'est encore, c.-à-d. que

$$\sum_{k=1}^{m+1} (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^{(m+1)}}{2} (m+1)(m+2) = -\frac{(-1)^m}{2} (m+1)(m+2).$$

On a

$$\sum_{k=1}^{m+1} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^m (-1)^k k^2 + (-1)^{(m+1)} (m+1)^2.$$

En utilisant l'hypothèse d'induction, on peut remplacer la dernière somme par

$$\frac{(-1)^m}{2} m(m+1).$$

On obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} (-1)^k k^2 &= \frac{(-1)^m}{2} m(m+1) + (-1)^{(m+1)} (m+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^m}{2} m(m+1) - (-1)^m (m+1)^2 \\ &= \frac{(-1)^m}{2} (m+1)(m-2(m+1)) \\ &= \frac{(-1)^m}{2} (m+1)(-m-2) = -\frac{(-1)^m}{2} (m+1)(m+2).\end{aligned}$$

Ainsi $P(m+1)$ est correcte si $P(m)$ l'est.

Le pas initial et le pas d'induction ayant été vérifiés, on peut conclure que la formule est correcte pour tout $n \geq 1$.

b) On veut montrer, pour tout $n \geq 2$, la formule

$$P(n) = \ll \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \gg$$

- 1) *Pas initial* : Pour $n = 2$ on a $\prod_{k=2}^2 \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$ et $\frac{2+1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$, ainsi $P(2)$ est vraie.
- 2) *Pas d'induction* : Supposons $P(m)$ correcte pour un $m \geq 2$ fixé, c.-à-d. supposons que

$$\prod_{k=2}^m \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{m+1}{2m} \quad (\text{H.I.})$$

et montrons que $P(m+1)$ l'est encore, c.-à-d. que

$$\prod_{k=2}^{m+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{m+2}{2(m+1)}.$$

On a

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{m+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \left(\prod_{k=2}^m \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right) \left(1 - \frac{1}{(m+1)^2}\right) \\ &\stackrel{\text{H.I.}}{=} \left(\frac{m+1}{2m}\right) \left(1 - \frac{1}{(m+1)^2}\right) \\ &= \left(\frac{m+1}{2m}\right) \left(\frac{m^2+2m}{(m+1)^2}\right) = \frac{m+2}{2(m+1)}. \end{aligned}$$

Ainsi $P(m+1)$ est correcte si $P(m)$ l'est.

Le pas initial et le pas d'induction ayant été vérifiés, on peut conclure que la formule est correcte pour tout $n \geq 2$.

- c) Vérifions, pour tout entier $n \geq 1$, la validité de la formule

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

- 1) *Pas initial* : Pour $n = 1$ on a, d'une part,

$$\sum_{k=1}^1 k(k+1)(k+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

et, d'autre part,

$$\frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4} = 6.$$

La formule est donc valide « au pas 1 ».

- 2) *Pas d'induction* : Supposons la formule valide au pas n ($n \geq 1$ fixé) et montrons qu'elle l'est encore au pas $n+1$, c.-à-d. vérifions que si

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \quad (\text{H.I.})$$

alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3) \\
 &\stackrel{\text{H.I.}}{=} \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + \frac{4(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \\
 &= \frac{(n+4)(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.
 \end{aligned}$$

Ainsi $P(m+1)$ est correcte si $P(m)$ l'est.

Le pas initial et le pas d'induction ayant été vérifiés, on peut conclure que la formule est correcte pour tout $n \geq 1$.

4.43 a) On veut montrer, pour tout $n \geq 0$, la propriété

$$P(n) = \text{« } n^3 + 2n \text{ est divisible par 3 »}$$

- 1) *Pas initial* : Pour $n = 0$ on a $n^3 + 2n = 0$ et comme 0 est divisible par tout entier positif, $P(0)$ est vraie.
- 2) *Pas d'induction* : Pour $m \geq 0$ fixé, supposons $P(m)$ vraie, c.-à-d. supposons que $m^3 + 2m$ soit divisible par 3, et montrons que $P(m+1)$ l'est encore, c.-à-d. que

$$(m+1)^3 + 2(m+1)$$

est également divisible par 3. On a

$$\begin{aligned}
 (m+1)^3 + 2(m+1) &= m^3 + 3m^2 + 3m + 1 + 2m + 2 \\
 &= (m^3 + 2m) + 3(m^2 + m + 1)
 \end{aligned}$$

Par hypothèse d'induction $m^3 + 2m$ est divisible par 3 et comme $3(m^2 + m + 1)$ l'est également, leur somme est divisible par 3. Ainsi si $P(m)$ est vraie, $P(m+1)$ l'est également et on peut conclure que la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

4.49 a) $a_k = 10 + 5k, k \geq 0$,

b) $a_k = k^2 - 1, k \geq 1$,

c) $a_k = 3^k + (-1)^{k+1}, k \geq 0$.

4.50 a) $a_k = a_{k-1} + 5k, k \geq 1$ avec $a_0 = 20$,

b) $a_k = a_{k-2}^2, k \geq 2$ avec $a_0 = 2$ et $a_1 = 0$,

c) $a_k = 10a_{k-2}, k \geq 2$ avec $a_0 = 10$ et $a_1 = 50$.

$$\textbf{4.51} \quad \text{a) } \sum_{j=-10}^0 (30-2j)^2 = \sum_{j=15}^{25} 4j^2, \quad \text{b) } \sum_{i=1}^n \sum_{j=\max(1,i-2)}^{n-2} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{i=1}^{j+2} a_{ij}.$$

$$\textbf{4.52} \quad \text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^3 = e^3$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n/2}\right)^{n/2}\right]^2 = e^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1} \\
 &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{m}}\right)^m \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right) = \frac{1}{e} \cdot 1 = e^{-1}
 \end{aligned}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn} = e^{ab}$$

4.53 a) $C(t) = C(t-1)(1+I)$, $t \geq 1$ avec $C(0) = M$ et $I = i/100$

$$b) C(t) = M(1+I)^t, t \geq 0$$

$$c) C(t) = M(1+I/2)^{2t}, t \geq 0$$

$$d) C(t) = M(1+I/k)^{kt}, t \geq 0$$

$$e) C(t) = Me^{It}, t \geq 0 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1+x/n)^{an} = e^{ax} \text{ (voir l'exercice 4.52)}$$

4.54 Si on note a_k la longueur de l'arête de C_k , $k \geq 1$, la suite (a_k) est une suite géométrique de raison $\sqrt[3]{1/2}$ et de terme initial $a_1 = a$:

$$a_k = a \cdot \left(\sqrt[3]{1/2}\right)^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

La hauteur H de la tour est égale à la somme infinie de la série associée :

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a \cdot \left(\sqrt[3]{1/2}\right)^{k-1} = \frac{a}{1 - \sqrt[3]{1/2}} = \frac{a\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} - 1} \approx 4,847a.$$

4.55 Soit $(a_k, k \geq 1)$ la suite arithmétique et r sa raison. Le terme général de la suite est

$$a_k = a_1 + (k-1)r, \quad k \geq 1$$

et la somme de ses 13 premiers termes est

$$S(13) = \sum_{k=1}^{13} a_k = 13 \cdot \frac{a_1 + a_{13}}{2} = 13 \cdot \frac{a_1 + a_1 + 12r}{2} = 13(a_1 + 6r).$$

Cette somme est égale à 130 si et seulement si

$$a_1 + 6r = 10.$$

Le quatrième, le dixième et le septième terme de la suite arithmétique sont, dans cet ordre, en progression géométrique si et seulement si le quotient des deux premiers est égal à celui des deux derniers, c.-à-d. si et seulement si

$$\frac{a_{10}}{a_4} = \frac{a_7}{a_{10}} \quad \text{ou encore} \quad a_{10}^2 = a_4 \cdot a_7.$$

En remplaçant chaque terme par son expression directe

$$a_4 = a_1 + 3r, \quad a_{10} = a_1 + 9r \quad \text{et} \quad a_7 = a_1 + 6r$$

on obtient

$$a_{10}^2 = a_4 \cdot a_7 \iff (a_1 + 9r)^2 = (a_1 + 3r)(a_1 + 6r) \iff r(a_1 + 7r) = 0.$$

La raison r et le terme initial a_1 de la suite arithmétique cherchée doivent donc vérifier

$$a_1 + 6r = 10 \quad \text{et} \quad r(a_1 + 7r) = 0.$$

Il existe deux solutions

- 1) $r = 0$ et $a_1 = 10$ correspondant à une suite arithmétique constante ($a_k = 10, k \geq 1$);
- 2) $r = -10$ et $a_1 = 70$ correspondant à la suite arithmétique ($a_k = 80 - 10k, k \geq 1$).

$$4.56 \quad \text{a) } S_1 = \frac{124}{63} \qquad \text{b) } S_2 = \frac{5}{7} \qquad \text{c) } S_3 = \frac{65625}{124}$$

4.57 ▷ L'aire du demi-disque initial est égale à $\frac{\pi}{2}$ (son rayon est égal à 1).

▷ À chaque étape (qu'il s'agisse d'un retrait ou d'un ajout), le rayon des demi-disques retirés/ajoutés est divisé par 2 (par rapport à l'étape précédente) alors que le nombre de demi-disques retirés/ajoutés est multiplié par 2.

▷ Puisque l'on part d'un rayon initial égal à 1, l'aire A_k retirée ou ajoutée à l'étape $k \geq 1$ est

$$A_k = 2^k \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Les retraits et ajouts alternant, l'aire A de la figure finale est

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_k = \frac{\pi}{2} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots\right)}_{\text{Série géom. de raison } -1/2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 - (-1/2)} = \frac{\pi}{3}.$$

4.58 Si on note x la distance horizontale séparant les deux extrémités de la matraque et y la distance verticale, toujours entre les deux extrémités de la matraque. On a

$$x = \underbrace{\frac{L}{2} - \frac{L}{8} + \frac{L}{32} - \frac{L}{128} + \cdots}_{\text{Série géom. de raison } r = -1/4} = \frac{L/2}{1 - (-1/4)} = \frac{2L}{5} \text{ cm}$$

et

$$y = \underbrace{L + \frac{L}{4} + \frac{L}{16} + \frac{L}{64} + \cdots}_{\text{Série géom. de raison } r = 1/4} = \frac{L}{1 - (1/4)} = \frac{4L}{3} \text{ cm}$$

La distance D séparant les deux extrémités de la matraque déployée est donc

$$D = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{4^2 L^2}{3^2} + \frac{2^2 L^2}{5^2}} = 2L \sqrt{\frac{2^2 \cdot 5^2 + 3^2}{3^2 \cdot 5^2}} = \frac{2L}{3 \cdot 5} \sqrt{100 + 9} = \frac{2L\sqrt{109}}{15} \text{ cm}.$$

4.59 On a

$$(k+1)^3 - k^3 = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

et

$$\sum_{k=1}^n [(k+1)^3 - k^3] = \sum_{k=1}^n [3k^2 + 3k + 1].$$

Pour le membre de gauche on a simplement

$$\sum_{k=1}^n [(k+1)^3 - k^3] = (n+1)^3 - 1$$

car il s'agit d'une série télescopique. Pour le membre de droite, on a

$$\sum_{k=1}^n [3k^2 + 3k + 1] = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = 3S^{[2]}(n) + \frac{3}{2}n(n+1) + n.$$

Ainsi

$$3S^{[2]}(n) + \frac{3}{2}n(n+1) + n = (n+1)^3 - 1$$

et

$$\begin{aligned}
 S^{[2]}(n) &= \frac{1}{3} \left((n+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - n \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - \frac{3n^2}{2} - \frac{3n}{2} - n \right) \\
 &= \frac{1}{6} (2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1) \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
 \end{aligned}$$

$$\textbf{4.60} \quad S(n) = \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

4.61 La somme $S(n)$ ne compte que $n+1$ termes correspondant aux couples d'indices

$$(0, n), (1, n-1), (2, n-2), \dots, (n-1, 1) \text{ et } (n, 0)$$

car on a

$$\begin{cases} i+j=n \\ i, j \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} j=n-i \\ 0 \leq i \leq n. \end{cases}$$

On peut donc reformuler $S(n)$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
 S(n) &= \sum_{\substack{i+j=n \\ i, j \geq 0}} (j-i)^2 = \sum_{\substack{j=n-i \\ 0 \leq i \leq n}} (j-i)^2 = \sum_{i=0}^n ((n-i)-i)^2 = \sum_{i=0}^n (n-2i)^2 \\
 &= \sum_{i=0}^n (n^2 - 4ni + 4i^2) = n^2 \sum_{i=0}^n 1 - 4n \sum_{i=0}^n i + 4 \sum_{i=0}^n i^2 \\
 &= n^2(n+1) - 4n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)}{3} (3n - 6n + 2(2n+1)) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textbf{4.62} \quad S(n) &= \sum_{\substack{i+j=n \\ i, j \geq 1}} (i \cdot j) = \sum_{\substack{j=n-i \\ 1 \leq i \leq n-1}} (i \cdot j) = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = n \sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\
 &= \frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

$$\textbf{4.63} \quad S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$$

4.64 Notons $(a_k, k \geq 0) = (1, 11, 111, 1111, \dots)$ la suite des termes à sommer.

a) On a, par exemple,

$$\begin{cases} a_k = 10a_{k-1} + 1, & k \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_k = a_{k-1} + 10^k, & k \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

b) Une formule directe pour a_k est

$$a_k = 1 + 10 + 100 + \dots + 10^k = \sum_{i=0}^k 10^i = \frac{1-10^{k+1}}{1-10} = \frac{10^{k+1}-1}{9}, \quad k \geq 0.$$

ALTERNATIVE. On peut aussi remarquer que $(9a_k, k \geq 0) = (9, 99, 999, 9999, \dots)$ ainsi

$$9a_k = 10^{k+1} - 1 \quad \text{et} \quad a_k = \frac{10^{k+1} - 1}{9}.$$

c) La somme des n premiers termes de la suite $(a_k, k \geq 0)$ est

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{10^{k+1} - 1}{9} \\ &= \frac{1}{9} \left(\sum_{k=0}^{n-1} 10^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} 1 \right) = \frac{1}{9} \left(\frac{10 - 10^{n+1}}{1 - 10} - n \right) \\ &= \frac{1}{81} (10^{n+1} - 10 - 9n), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

4.65 a) $\prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k} = \frac{\prod_{k=1}^n (k+2)}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{\prod_{k=3}^{n+2} k}{n!} = \frac{(n+2)!}{2!} = \frac{(n+2)!}{2 \cdot n!} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

b) $\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^i 2 \right) = \underbrace{\sum_{i=1}^n 2^i}_{\substack{\text{Série géom.} \\ \text{de raison 2}}} = 2 \cdot \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2(2^{n+1} - 1) = 2^{n+2} - 2$

c) $\prod_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^k 3 \right) = \prod_{k=1}^n (3k) = \left(\prod_{k=1}^n 3 \right) \left(\prod_{k=1}^n k \right) = 3^n \cdot n!$

d) On a $2k - 17 = 0 \iff k = 17/2 = 8,5$. Ainsi $|2k - 17| = \begin{cases} 17 - 2k & \text{si } k < 17/2 \\ 2k - 17 & \text{si } k \geq 17/2 \end{cases}$ et

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{20} |2k - 17| &= \sum_{k=0}^8 |2k - 17| + \sum_{k=9}^{20} |2k - 17| \\ &= \sum_{k=0}^8 (17 - 2k) + \sum_{k=9}^{20} (2k - 17) \quad (\text{Somme de deux séries arithmétiques}) \\ &= 9 \cdot \frac{17 + 1}{2} + 12 \cdot \frac{1 + 23}{2} = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \end{aligned}$$

e) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (i - j)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (i^2 - 2ij + j^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m ij + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m j^2$

$$\begin{aligned} &= m \sum_{i=1}^n i^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^m j \right) + n \sum_{j=1}^m j^2 \\ &= m \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{m(m+1)}{2} \\ &\quad + n \cdot \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \\ &= \frac{nm}{6} \left[(n+1)(2n+1) - 3(n+1)(m+1) + (m+1)(2m+1) \right] \\ &= \frac{nm}{6} \left[2n^2 + 3n + 1 - 3nm - 3n - 3m - 3 + 2m^2 + 3m + 1 \right] \\ &= \frac{nm}{6} \left[2n^2 + 2m^2 - 3nm - 1 \right] \end{aligned}$$

f) $\prod_{k=0}^n \left(\frac{k}{2} + 3 \right) = \prod_{k=0}^n \left(\frac{k+6}{2} \right) = \frac{\prod_{k=0}^n (k+6)}{\prod_{k=0}^n 2} = \frac{\prod_{k=6}^{n+6} k}{2^{n+1}} = \frac{(n+6)!}{5!} = \frac{(n+6)!}{5! \cdot 2^{n+1}} = \frac{(n+6)!}{15 \cdot 2^{n+4}}$

$$\begin{aligned}
 \text{4.66 a) } S(n) &= \sum_{k=n}^{2n} \prod_{j=0}^k 2 = \underbrace{\sum_{k=n}^{2n} 2^{k+1}}_{\substack{\text{Série géom.} \\ \text{de raison 2}}} = 2^{n+1} \cdot \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1}(2^{n+1}-1) = 4^{n+1} - 2^{n+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } S(n) &= \sum_{k=1}^{2n} \underbrace{\sum_{j=0}^{k-2} (j+1)}_{\text{Série arithm.}} = \sum_{k=1}^{2n} (k-1) \cdot \frac{1+k-1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} (k-1)k = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^{2n} k \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{2n(2n+1)}{2} \right] = \frac{n(2n+1)}{6} [4n+1-3] \\
 &= \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} = \frac{n(4n^2-1)}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } P(n) &= \prod_{k=2}^n \left(k - \frac{1}{k} \right) = \prod_{k=2}^n \frac{k^2-1}{k} = \frac{\prod_{k=2}^n (k+1)(k-1)}{\prod_{k=2}^n k} = \frac{\prod_{k=2}^n (k+1) \prod_{k=2}^n (k-1)}{n!} \\
 &= \frac{\prod_{k=3}^{n+1} k \prod_{k=1}^{n-1} k}{n!} = \frac{(n+1)! \cdot (n-1)!}{2 \cdot n!} = \frac{(n+1) \cdot (n-1)!}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{(n+1)!}{2n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } S(n) &= \sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{k-1}{k} \right) = \underbrace{\sum_{k=2}^n (\ln(k-1) - \ln(k))}_{\text{Série télescopique}} = \sum_{k=2}^n \ln(k-1) - \sum_{k=2}^n \ln(k) \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) - \sum_{k=2}^n \ln(k) = \ln(1) - \ln(n) = -\ln(n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } A(n, m) &= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m i j \right) = \prod_{i=1}^n \left(i \sum_{j=1}^m j \right) = \prod_{i=1}^n \left(i \cdot \frac{m(m+1)}{2} \right) \\
 &= \left(\prod_{i=1}^n i \right) \left(\prod_{i=1}^n \frac{m(m+1)}{2} \right) = n! \left(\frac{m(m+1)}{2} \right)^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } S(n) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j 1 = \sum_{i=0}^n \underbrace{\sum_{j=0}^i (j+1)}_{\text{Série arithm.}} = \sum_{i=0}^n (i+1) \cdot \frac{1+i+1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (i+1)(i+2) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (i^2 + 3i + 2) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=0}^n i^2 + 3 \sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n 2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} + 2(n+1) \right] = \frac{n+1}{12} [n(2n+1) + 9n + 12] \\
 &= \frac{(n+1)(n^2 + 5n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{g) } S(n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^i 2^{i+j} = \sum_{i=1}^n \left(2^i \sum_{j=0}^i 2^j \right) = \sum_{i=1}^n 2^i \cdot \frac{1-2^{i+1}}{1-2} = \sum_{i=1}^n 2^i \cdot (2^{i+1} - 1) \\
&= 2 \sum_{i=1}^n 4^i - \sum_{i=1}^n 2^i = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1-4^n}{1-4} - 2 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = \frac{2}{3} (4^{n+1} - 4 + 3 - 3 \cdot 2^n) \\
&= \frac{2}{3} (4^{n+1} - 3 \cdot 2^n - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{h) } S(n) &= \sum_{k=0}^n \left(\prod_{j=2}^k 2 \right) = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \left(\prod_{j=2}^k 2 \right) \quad (\text{Pour } k=0 \text{ et } 1, \text{ le produit est vide!}) \\
&= 2 + \sum_{k=2}^n 2^{k-1} = 2 + 2 \cdot \frac{1-2^{n-1}}{1-2} = 2 + 2(2^{n-1} - 1) = 2^n
\end{aligned}$$

$$4.67 \quad P(n) = -\frac{(-1)^n}{n \cdot n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!}$$

$$4.68 \quad S(n) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{n^3 - n}{6}$$

$$\begin{aligned}
4.69 \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j) &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \min(i, j) + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \min(i, j) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i + \sum_{1 \leq j < i \leq n} j \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} j = \sum_{i=1}^n i(n-i+1) + \sum_{i=1}^n \frac{i(i-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(2n+1)i - i^2] = \frac{1}{2} \left[(2n+1) \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

4.70 En séparant la somme des termes d'indice pair de celle des termes d'indice impair on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (3k+1) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} (-1)^k (3k+1) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} (-1)^k (3k+1) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ k=2i}} (-1)^k (3k+1) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ k=2i-1}} (-1)^k (3k+1) \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{2i} (6i+1) + \sum_{i=1}^n (-1)^{2i-1} (6i-2) \\
&= \sum_{i=1}^n (6i+1) - \sum_{i=1}^n (6i-2) = \sum_{i=1}^n 3 = 3n
\end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que la somme de deux termes consécutifs est constante et obtenir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (3k+1) &= \sum_{k=1}^n \left((-1)^{2k-1} (3(2k-1)+1) + (-1)^{2k} (3(2k)+1) \right) \\
&= \sum_{k=1}^n ((-1)(6k-2) + (6k+1)) = \sum_{k=1}^n 3 = 3n
\end{aligned}$$

4.71 Si $n \leq 5$, $k^2 - 25$ est négatif ou nul pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ et

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=0}^n |k^2 - 25| = \sum_{k=0}^n (25 - k^2) = \sum_{k=0}^n 25 - \sum_{k=0}^n k^2 \\ &= 25(n+1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n+1}{6} (150 - n(2n+1)) \\ &= \frac{(n+1)(150 - n - 2n^2)}{6}. \end{aligned}$$

Si $n > 5$, on décompose la somme en deux pour obtenir

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=0}^5 |k^2 - 25| + \sum_{k=6}^n |k^2 - 25| = \sum_{k=0}^5 (25 - k^2) + \sum_{k=6}^n (k^2 - 25) \\ &= \sum_{k=0}^5 25 - \sum_{k=0}^5 k^2 + \sum_{k=6}^n k^2 - \sum_{k=6}^n 25 \\ &= 6 \cdot 25 - \sum_{k=0}^5 k^2 + \sum_{k=0}^n k^2 - \sum_{k=0}^5 k^2 - (n-5)25 \\ &= 150 - 2 \sum_{k=0}^5 k^2 + \sum_{k=0}^n k^2 - 25n + 125 \\ &= 275 - 2 \cdot \frac{5 \cdot (5+1) \cdot (2 \cdot 5 + 1)}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 25n \\ &= 165 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 25n \\ &= \frac{990 + n(n+1)(2n+1) - 150n}{6} = \frac{990 - 149n + 3n^2 + 2n^3}{6}. \end{aligned}$$

4.72 Avant d'atteindre le prix plancher de 12.-, la suite des prix des CD forme une suite arithmétique de raison $r = -1/2$. Afin de bénéficier du prix minimal il faut acheter au moins

$$m = \frac{\text{prix max} - \text{prix min}}{\text{rabais par CD}} + 1 = \frac{24 - 12}{1/2} + 1 = 24 + 1 = 25 \text{ CD}.$$

Pour un nombre n de CD achetés inférieur ou égal à 25, le prix p_n du n^{e} CD est

$$p_n = p_1 + r(n-1) = 24 - \frac{n-1}{2}, \quad 1 \leq n \leq 25$$

et le montant d'une commande de n CD est donné par la valeur de la série arithmétique associée :

$$M(n) = \sum_{k=1}^n p_k = \frac{n(p_1 + p_n)}{2} = \frac{n(24 + 24 - \frac{n-1}{2})}{2} = \frac{n(97 - n)}{4}, \quad 0 \leq n \leq 25$$

Si n est supérieur à 25, le prix de la commande est

$$\begin{aligned} M(n) &= M(25) + 12(n-25) = \frac{25(97-25)}{4} + 12(n-25) \\ &= 25 \cdot 18 - 25 \cdot 12 + 12n = 25 \cdot 6 + 12n = 150 + 12n, \quad n > 25 \end{aligned}$$

En résumé, le montant $M(n)$ d'une commande de n CD, en francs, est

$$M(n) = \begin{cases} \frac{n(97-n)}{4} & \text{si } 0 \leq n \leq 25 \\ 150 + 12n & \text{si } n > 25. \end{cases}$$

4.73 Soit n le nombre d'années de travail cherché et $(s_k, k = 1, \dots, n)$ la suite des salaires annuels pendant ces n années. Cette suite est arithmétique de raison $r = 2000$.– et de terme initial $s_1 = 51\,000$.–. Son terme général est donc

$$s_k = 51\,000 + 2000(k - 1) = 49\,000 + 2000k, \quad k = 1, \dots, n$$

et la somme des n premiers salaires annuels est

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=1}^n s_k = n \cdot \frac{s_1 + s_n}{2} = n \cdot \frac{51\,000 + 49\,000 + 2000n}{2} \\ &= n(50\,000 + 1000n) = 1000n(50 + n). \end{aligned}$$

Cette somme est égale à 1 400 000.- si et seulement si

$$\begin{aligned} 1000n(50 + n) &= 1\,400\,000 & \iff & n(50 + n) = 1400 \\ \iff n^2 + 50n - 1400 &= 0 & \iff & (n + 70)(n - 20) = 0 \end{aligned}$$

La solution négative est, évidemment, à éliminer et il faut 20 ans pour accumuler un salaire total de 1 400 000.-.

4.74 a) $L = 20$ centimètres, b) $D = 4\sqrt{5}$ cm $\approx 8,94$ centimètres.

4.75 a) À chaque itération, le nombre de côtés du flocon est multiplié par 4 (chaque segment d'une étape est remplacé par 4 segments à l'étape suivante). La suite $(T_k, k \geq 1)$ est une suite géométrique de raison 4. Son terme initial est $T_1 = 3$ (égal au nombre de côtés du triangle initial ou au nombre de triangles ajoutés lors de la première itération). Le terme général T_k est donc donné par

$$T_k = 3 \cdot 4^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

b) La longueur des côtés du flocon étant divisée par 3 à chaque itération, l'aire des triangles ajoutés est divisée par $3^2 = 9$. La suite $(A_k, k \geq 0)$ est une suite géométrique de raison $1/9$ et de terme initial $A_0 = c^2\sqrt{3}/4$. On a donc la formule récurrente

$$A_k = \frac{1}{9}A_{k-1}, \quad k \geq 1$$

et la formule directe

$$A_k = \left(\frac{1}{9}\right)^k A_0, \quad k \geq 0.$$

c) À l'itération k l'aire du flocon augmente d'une quantité égale à $T_k \cdot A_k$. L'aire $\mathcal{A}$ du flocon final est donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} T_k \cdot A_k = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot 4^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^k \cdot A_0 = A_0 + \frac{A_0}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \\ &= A_0 + \frac{A_0}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k = A_0 + \frac{A_0}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = A_0 + \frac{A_0}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{8}{5}A_0. \end{aligned}$$

4.76 a) $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k^2 - 2\bar{x}x_k + \bar{x}^2) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 - 2\bar{x} \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n \bar{x}^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) - 2\bar{x} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) + \bar{x}^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

$$4.77 \quad \text{a) } |\text{Ensemble}| = \sum_{I=0}^N \sum_{J=-I}^I 1 = (N+1)^2$$

- b) $\begin{array}{l} (2) \quad \text{Pour } J \text{ de } -N \text{ à } N \text{ faire} \\ (3) \quad \text{Pour } I \text{ de } |J| \text{ à } N \text{ faire} \end{array}$

$$4.78 \quad \text{a) } f'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} \quad (x \neq 1)$$

$$\text{b) } S(n) = \sum_{k=1}^n kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} \quad (x \neq 1)$$

c) La série converge si et seulement si $|x| < 1$ et on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n) = \frac{x}{(x-1)^2}$

$$4.79 \quad \text{a) } \sum_{k=1}^n k2^k = 2(2^n(n-1) + 1)$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^n k(-1)^k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}$$

$$\text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 0$$

$$4.80 \quad \text{a) } \frac{1}{\lambda} \text{ heures,} \quad \text{b) } \frac{1}{\mu} \text{ heures,} \quad \text{c) } \rho < 1, \quad \text{d) } N = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad \text{e) } N_a = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

