

Mathématiques discrètes

Jean-François Hêche

Automne 2024

Chapitre 1

Les ensembles



Un **ensemble** est un regroupement d'**éléments** formant un tout.

- Un ensemble est entièrement déterminé par la collection de ses éléments.
- Dans les cas les plus simples, on peut décrire un ensemble en listant explicitement tous ses éléments entre **accolades** (on parle alors de description **en extension**).
- EXEMPLES.

- ▶ L'ensemble des chiffres décimaux s'écrit

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

- ▶ L'ensemble des voyelles de la langue française s'écrit

$$\{a, e, i, o, u, y\}.$$

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- Si x est un élément d'un ensemble A , on dit qu'il **appartient** à cet ensemble, qu'il en **fait partie** ou encore que l'ensemble **contient** x et on note

$$x \in A.$$

- Si x n'appartient pas à l'ensemble A , on note

$$x \notin A.$$

■ EXEMPLES.

$$\blacktriangleright 1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\blacktriangleright 2 \notin \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$\blacktriangleright \text{Faux} \in \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$$

$$\blacktriangleright \text{Peut-être} \notin \{\text{Oui}, \text{Non}\}$$

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- La description **en extension** n'est effective que pour les ensembles contenant très peu d'éléments.
- Pour des ensembles plus conséquents il est parfois possible de lister suffisamment d'éléments afin de faire ressortir un **motif clair et non ambigu**.

■ EXEMPLES.

- L'ensemble des entiers positifs ou nuls et inférieurs à 100 peut s'écrire

$$\{0, 1, 2, 3, \dots, 99\}.$$

- L'ensemble (infini) des entiers positifs pairs peut s'écrire

$$\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}.$$

- L'ensemble (infini lui aussi) des entiers impairs peut s'écrire

$$\{\dots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots\}.$$

Description des ensembles (suite)

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- La forme privilégiée (en mathématiques) pour définir un ensemble est la description **en compréhension** obtenue **en spécifiant une propriété satisfaite par tous les éléments de l'ensemble recherché et par eux seuls**.

- ▶ L'ensemble de tous les éléments x vérifiant la propriété $P(x)$ se note

$$\{x \mid P(x)\}$$

où la barre verticale $\mid$ se lit « **tel que** » ou « **pour lesquels** ».

- ▶ L'ensemble de tous les éléments x de l'ensemble A vérifiant la propriété $P(x)$ se note

$$\{x \in A \mid P(x)\}.$$

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- L'ensemble des entiers positifs ou nuls et inférieurs à 100 peut s'écrire

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 99\} \quad \text{ou} \quad \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 99\}.$$

- L'ensemble des entiers positifs pairs peut s'écrire

$$\{x \mid x \text{ est pair et positif}\}$$

mais également

$$\{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}^*\} \quad \text{ou} \quad \{x \mid \exists k \in \mathbb{N}^*, x = 2k\}.$$

- L'ensemble des entiers impairs peut s'écrire

$$\{x \mid x \text{ est impair}\}$$

ou

$$\{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{ou encore} \quad \{x \mid \exists k \in \mathbb{Z}, x = 2k + 1\}.$$

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Deux ensembles sont **égaux** si et seulement si **tout élément de l'un est aussi élément de l'autre**. Si A et B sont égaux, on note

$$A = B.$$

Deux précisions importantes s'imposent :

- Dans un ensemble, **l'ordre des éléments n'a pas d'importance** :

$$\{1, 3, 5\} = \{3, 5, 1\}.$$

- Dans un ensemble, **les répétitions éventuelles d'un même élément ne comptent pas** :

$$\{i, n, f, i, n, i\} = \{f, i, n, i\} = \{f, i, n\}.$$

Quelques ensembles importants de nombres

- L'ensemble des **entiers naturels** est noté $\mathbb{N} : \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- L'ensemble des **entiers relatifs** est noté $\mathbb{Z} : \mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- L'ensemble des **nombres rationnels** est noté $\mathbb{Q} : \mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ et } q \neq 0\}$.
- L'ensemble des **nombres réels** est noté $\mathbb{R}$.

- En ajoutant le suffixe * , on supprime **0** des ensembles précédents :

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

- En ajoutant le suffixe $_+$, on ne garde que les éléments **positifs ou nuls** (≥ 0) :

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}.$$

- En ajoutant le suffixe $_-$, on ne garde que les éléments **négatifs ou nuls** (≤ 0).

- Un **intervalle réel** est un ensemble défini par deux bornes, inférieure et supérieure, et formé de tous les nombres réels compris entre ces deux bornes.
- On distingue trois types d'intervalles :

- ▶ les **intervalles fermés** lorsque les deux bornes font partie de l'ensemble :

$$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} ;$$

- ▶ les **intervalles ouverts** lorsque les deux bornes sont exclues de l'ensemble :

$$]a, b[\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} ;$$

- ▶ les **intervalles semi-ouverts** lorsqu'une seule des deux bornes appartient à l'ensemble :

$$]a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

et

$$[a, b[\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} .$$

- La borne inf. peut être égale à $-\infty$ et la borne sup. à $+\infty$ (elles ne sont jamais incluses) :

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[, \quad \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[.$$

Ensemble vide et ensemble universel

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- L'**ensemble vide** est l'ensemble ne contenant **aucun** élément, il est noté $\emptyset$ ou, plus rarement, $\{\}$.

À priori les éléments d'un ensemble peuvent être de natures très diverses, ainsi

$$A = \{\text{rouge}, \{3\}, \text{vendredi}, \pi\}$$

est un ensemble tout à fait valide.

- Dans les applications les éléments pouvant appartenir à un ensemble ne sont pas quelconques mais proviennent d'un **ensemble universel** (ou **univers**), noté généralement Ω , contenant tous les éléments à prendre en compte dans un contexte donné.

Sous-ensembles et relation d'inclusion : $\subseteq$

L'ensemble B est un **sous-ensemble** ou une **partie** de l'ensemble A si et seulement si **tous les éléments de B sont aussi des éléments de A** .

- Si B est un sous-ensemble de A on dit que B est **inclus** dans A et on note

$$B \subseteq A.$$

- Mathématiquement, la définition de la relation d'inclusion s'écrit

$$B \subseteq A \iff (\forall x \in B, x \in A)$$

et se lit

B est un sous-ensemble de A (B est inclus dans A) si et seulement si chaque élément x appartenant à B appartient également à A .

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- Tout ensemble A est un sous-ensemble de lui-même :

$$A \subseteq A, \quad \forall A.$$

- L'ensemble vide $\emptyset$ est un sous-ensemble de n'importe quel ensemble :

$$\emptyset \subseteq A, \quad \forall A.$$

et en particulier de lui-même :

$$\emptyset \subseteq \emptyset.$$

- Deux ensembles A et B sont égaux si et seulement s'ils sont sous-ensembles l'un de l'autre (**principe de double inclusion**) :

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A.$$

Les notions d'appartenance et d'inclusion ne doivent pas être confondues !

Pour l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$, on a

- 1 est un élément de $A : 1 \in A$;
- 1 n'est pas un sous-ensemble de $A : 1 \not\subseteq A$;
- $\{1\}$ est un sous-ensemble de $A : \{1\} \subseteq A$;
- $\{1\}$ n'est pas un élément de $A : \{1\} \notin A$.

Pour l'ensemble $B = \{\{e\}, \{f, g\}, \{h\}\}$, on a

- e n'est ni un élément ni un sous-ensemble de $B : e \notin B$ et $e \not\subseteq B$;
- $\{e\}$ est un élément de B mais pas un sous-ensemble : $\{e\} \in B$ mais $\{e\} \not\subseteq B$;
- $\{\{e\}\}$ est un sous-ensemble de B mais pas un élément : $\{\{e\}\} \notin B$ mais $\{\{e\}\} \subseteq B$;
- f et $\{f\}$ ne sont ni des éléments ni des sous-ensembles de B .

Les risques de confusion et d'erreurs apparaissent principalement lorsque des ensembles sont éléments d'autres ensembles !

Sous-ensembles propres et inclusion stricte : $\subsetneq$

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- Il est parfois important d'insister sur le fait que B est un sous-ensemble de A mais que B n'est pas égal à A tout entier (il existe donc au moins un élément de A qui n'est pas dans B).

Dans un tel cas, B est dit un **sous-ensemble propre** de A . Il est alors **strictement inclus** dans A et cette situation est notée

$$B \subset A \quad \text{ou} \quad B \subsetneq A.$$

- Évidemment, si B est un sous-ensemble propre de A alors B est également un sous-ensemble de A :

$$B \subset A \implies B \subseteq A.$$

- **ASTUCE MNÉMOTECHNIQUE.** On peut rapprocher les symboles d'inclusion $\subseteq$ et $\subset$ des comparateurs $\leq$ et $<$.

Diagrammes de Venn et diagrammes d'Euler

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

2. Les relations

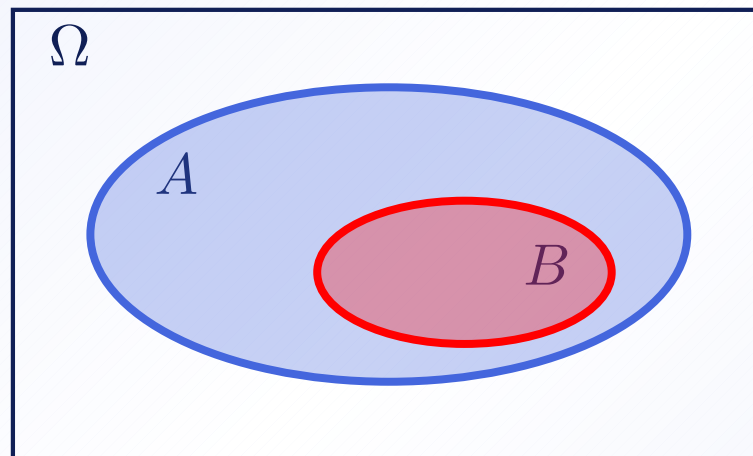
3. Les fonctions

4. Suites et séries

- Les **diagrammes de Venn** et **d'Euler** permettent de représenter graphiquement des ensembles et offrent une approche visuelle efficace pour illustrer certaines situations ou vérifier des propriétés simples.
- Dans de tels diagrammes,
 - ▶ l'ensemble universel Ω est généralement représenté par un rectangle ;
 - ▶ les ensembles étudiés sont représentés par des surfaces simples (typiquement des cercles, des ellipses ou des rectangles).
- Dans un **diagramme d'Euler**, la disposition de ces surfaces reflète les relations connues ou souhaitées entre les ensembles qu'elles représentent.
- Dans un **diagramme de Venn**, la disposition de ces surfaces est telle que chaque possibilité de chevauchement apparaît une et une seule fois.

Diagrammes d'Euler : Exemples

- Diagramme d'Euler pour deux ensembles A et B avec B sous-ensemble de A ($B \subseteq A$) :



- Diagramme d'Euler pour deux ensembles A et B disjoints, c.-à-d. sans aucun élément en commun :

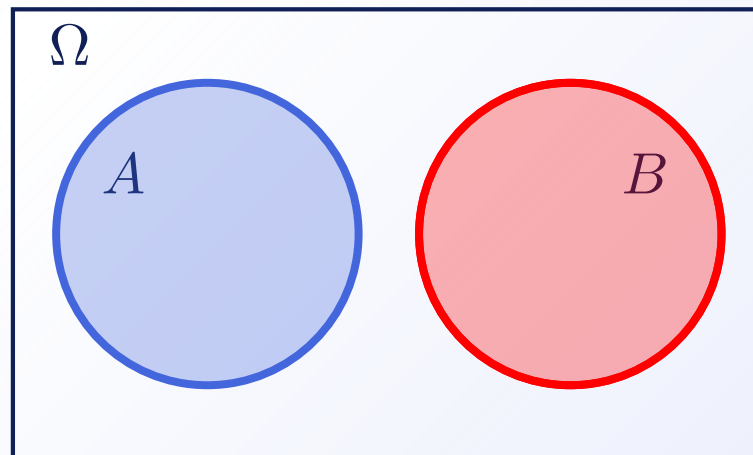
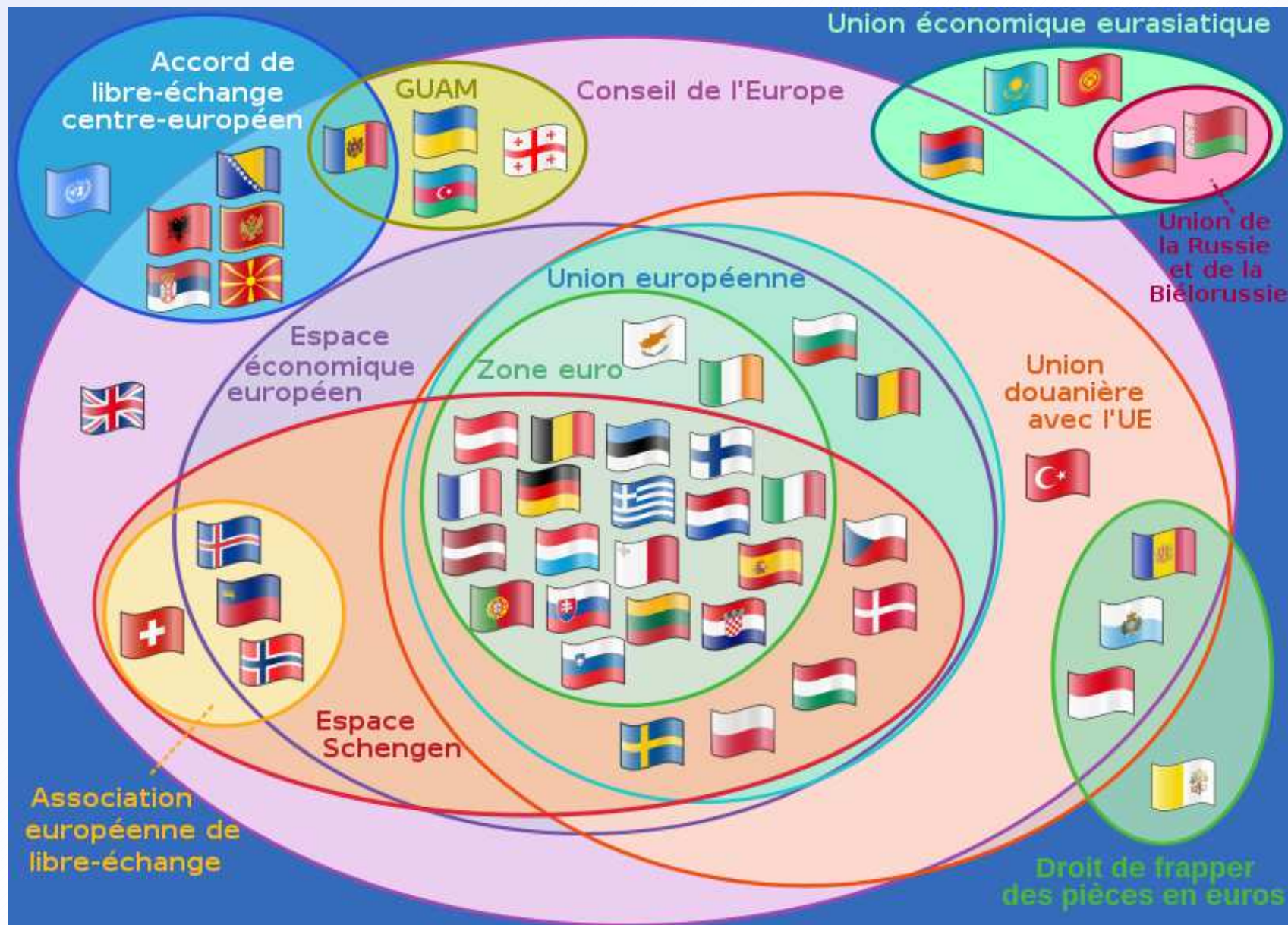
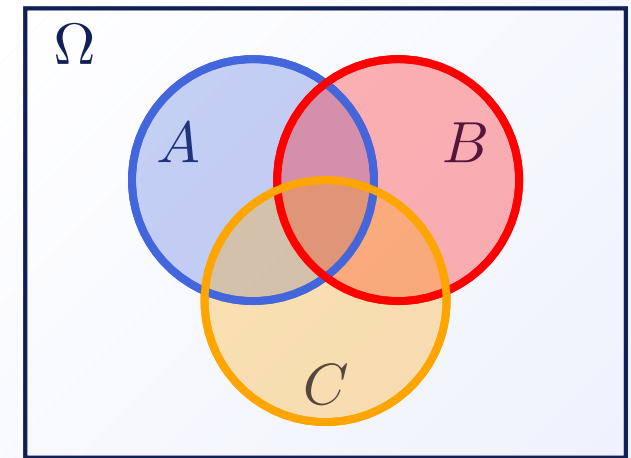
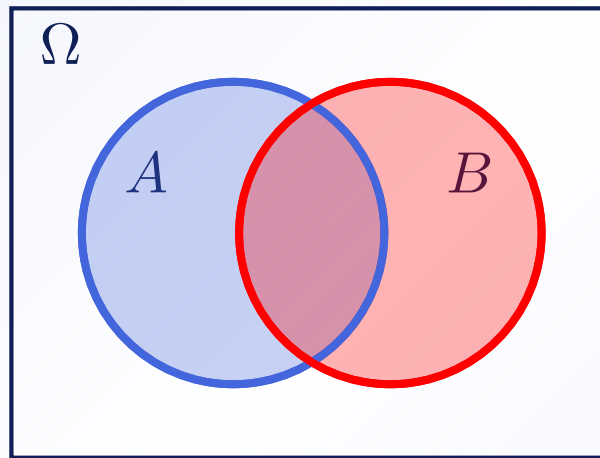
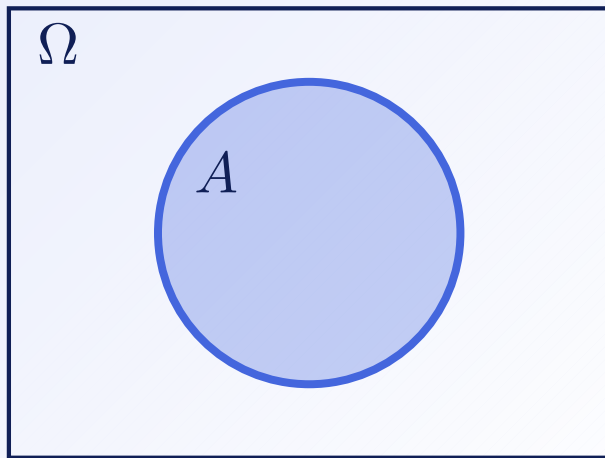


Diagramme d'Euler des entités supranationales européennes



Diagrammes de Venn pour 1, 2 et 3 ensembles

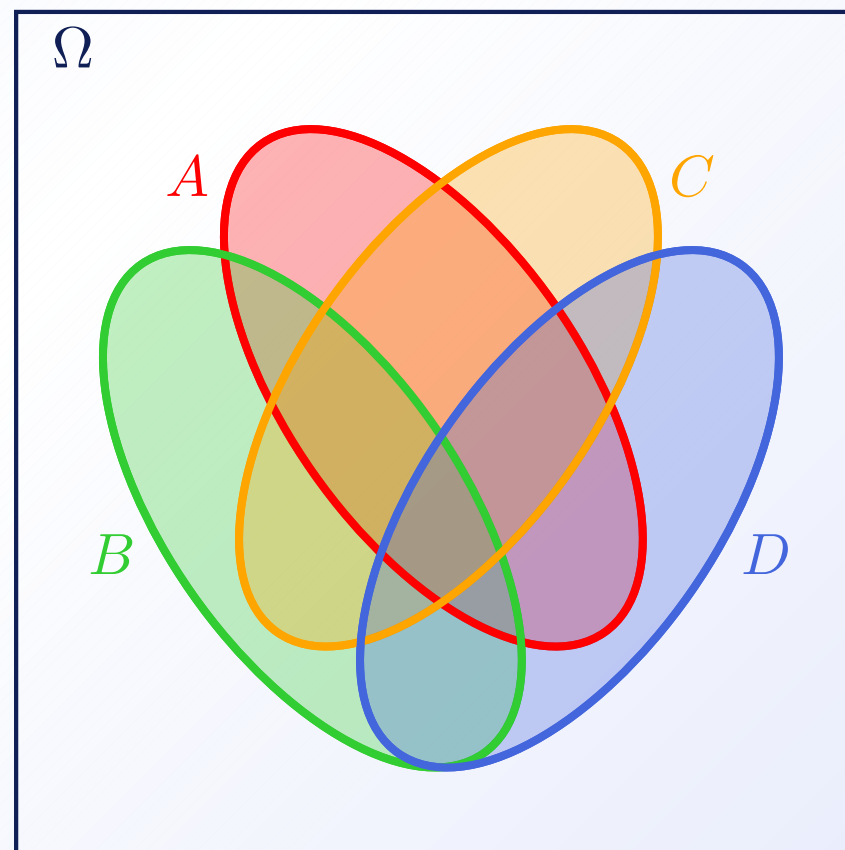
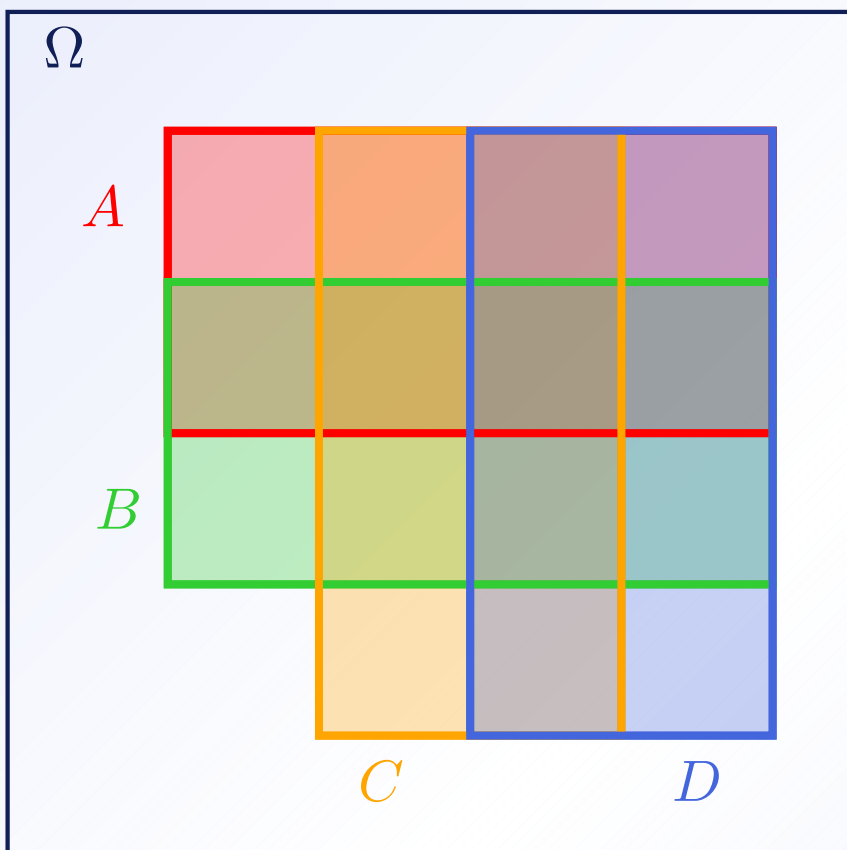
- Versions classiques des diagrammes de Venn pour, respectivement, 1, 2 et 3 ensembles :



- Il est possible de construire des diagrammes de Venn pour un nombre n quelconque d'ensembles mais leur utilité devient très discutable au-delà de 3 ensembles.

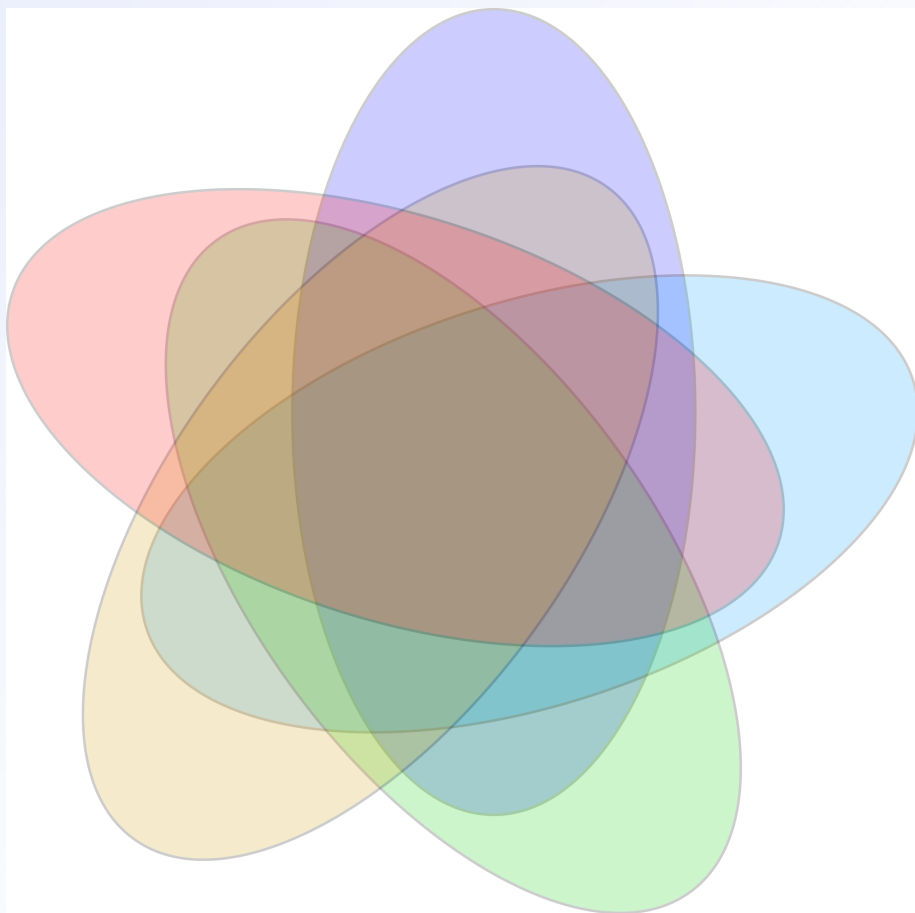
En effet, un diagramme de Venn pour n ensembles doit compter 2^n cellules car la disposition des surfaces représentant les ensembles doit être telle que chaque possibilité de chevauchement apparaisse une et une seule fois. Cette explosion exponentielle du nombre de cellules détruit la lisibilité et par conséquent l'utilité des diagrammes.

Diagrammes de Venn pour 4 ensembles

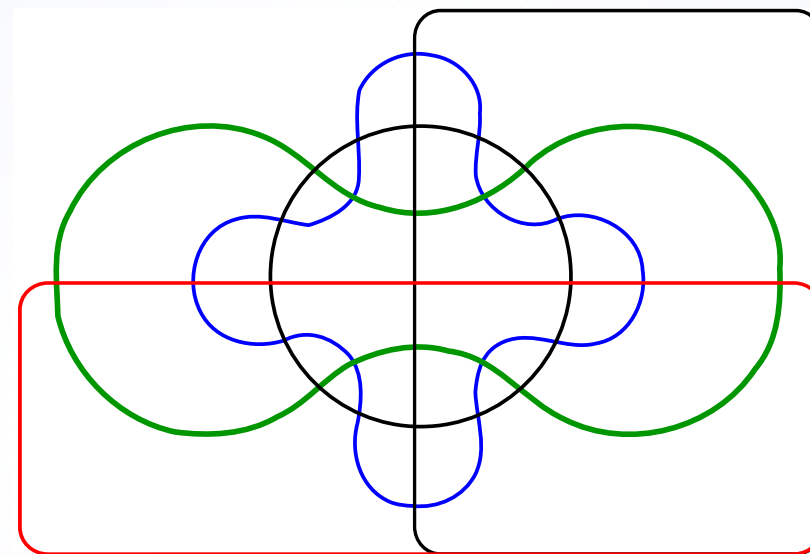


Diagrammes de Venn pour 5 et 6 ensembles

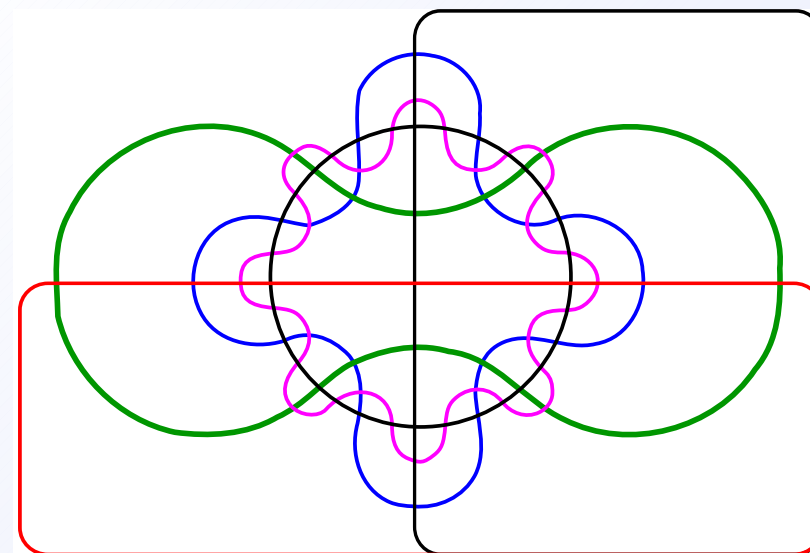
Pour le plaisir des yeux...



Source : Wikimedia Commons



Source : Wikimedia Commons



Source : Wikimedia Commons

Opérations sur les ensembles : Union

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

2. Les relations

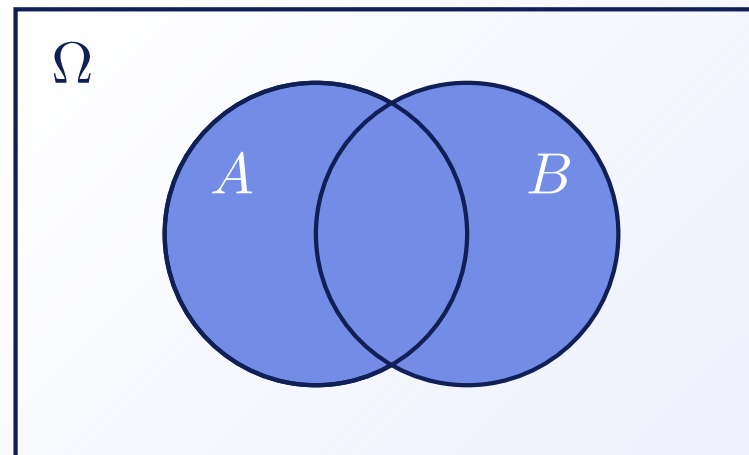
3. Les fonctions

4. Suites et séries

Soient A et B deux ensembles dans un univers Ω .

- L'**union** ou la **réunion** de A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B (voire aux deux) :

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$



Opérations sur les ensembles : Intersection

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

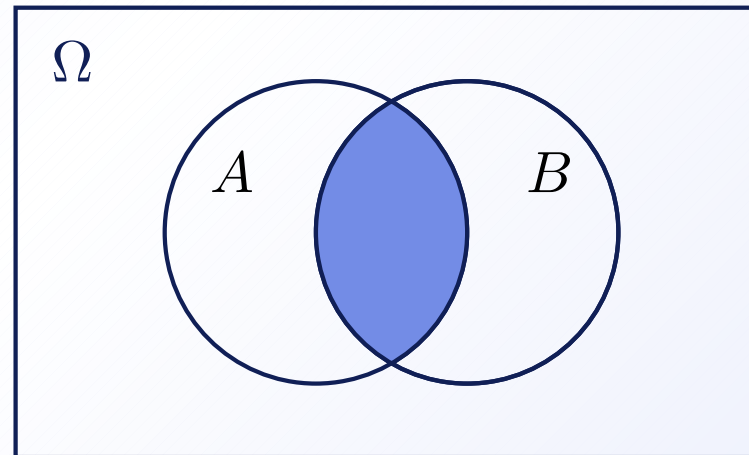
2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- L'**intersection** de A et B , notée $A \cap B$, est l'**ensemble des éléments appartenant à A et à B** :

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$



Deux ensembles A et B sont dits **disjoints** si leur intersection est vide, autrement dit si $A \cap B = \emptyset$.

Opérations sur les ensembles : Complément

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

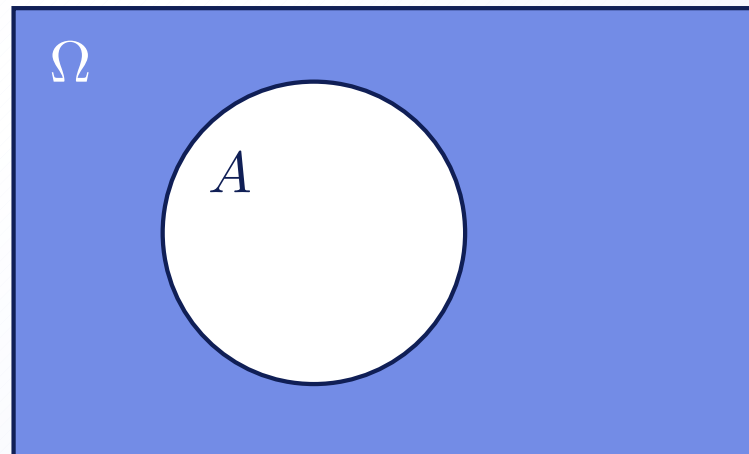
2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- Le **complément (absolu)** de A , noté $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de l'ensemble universel n'appartenant pas à A :

$$\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \Omega \mid x \notin A\}.$$



Opérations sur les ensembles : Différence

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

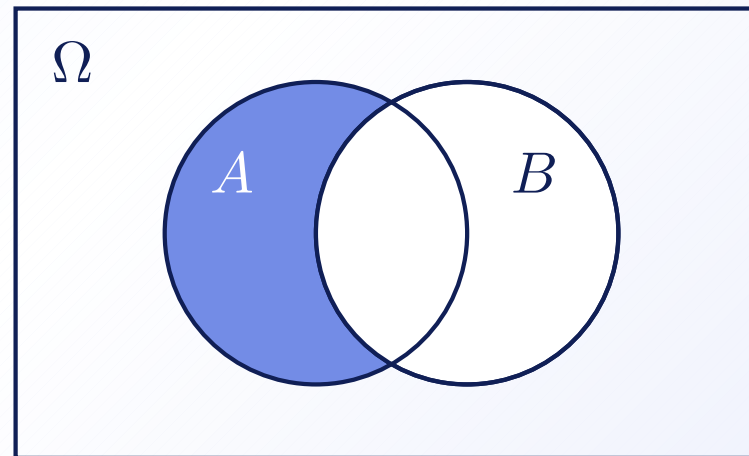
2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- La **différence** entre A et B , notée $A \setminus B$ et souvent lu « A sauf B » ou « A privé de B », est l'ensemble formé des éléments appartenant à A mais pas à B :

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$



- La différence $A \setminus B$ est aussi appelée le **complément relatif** de B par rapport à A et on a

$$\overline{A} = \Omega \setminus A$$

et

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

Opérations sur les ensembles : Différence symétrique

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

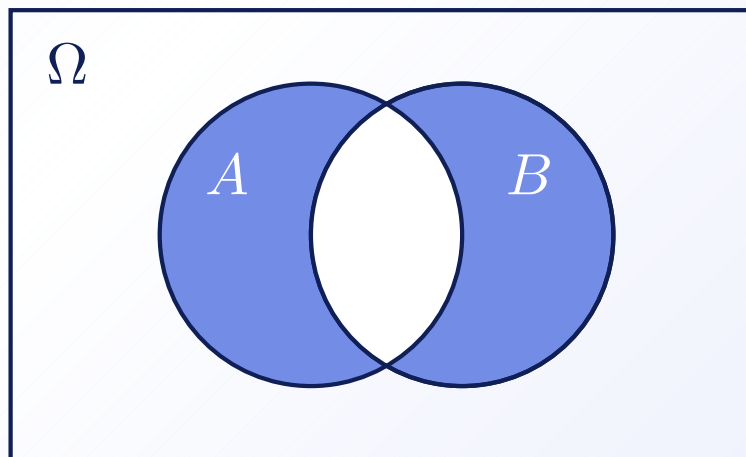
2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- La **différence symétrique** de A et B , notée $A \triangle B$ ou $A \oplus B$, est l'ensemble formé des éléments appartenant soit A soit B (mais pas aux deux) :

$$A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid \text{soit } x \in A \text{ soit } x \in B\}.$$



- En utilisant les opérations précédentes, on montre facilement que

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Les opérations ensemblistes vérifient de nombreuses propriétés et identités. Pour les trois opérations de base ($\cup$, $\cap$ et $\overline{}$) les plus importantes sont présentées ci-dessous.

■ Associativités

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Associativité de l'union

Associativité de l'intersection

REMARQUE. Pour les opérations associatives (comme l'union et l'intersection) le parenthésage n'est pas essentiel et une expression du style $A \cup B \cup C$ est bien définie car indépendante du parenthésage et donc de l'ordre dans lequel elle est évaluée :

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

■ Commutativités

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Commutativité de l'union

Commutativité de l'intersection

■ Distributivités

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Distributivité de l'union
par rapport à l'intersection

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Distributivité de l'intersection
par rapport à l'union

■ Lois de De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

1^{re} loi de De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

2^e loi de De Morgan

■ Absorptions

$$A \cup (A \cap B) = A$$

1^{re} loi d'absorption

$$A \cap (A \cup B) = A$$

2^e loi d'absorption

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

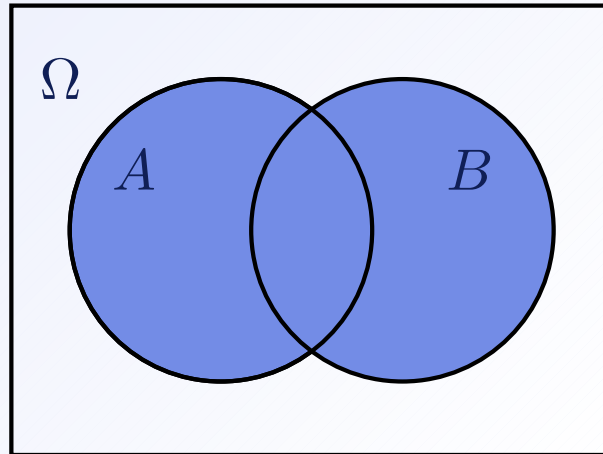
- Ces propriétés et identités se vérifient facilement à l'aide de diagrammes de Venn ou en montrant (à l'aide de raisonnements logiques) que chaque côté d'une égalité est un sous-ensemble de l'autre.
- On peut aussi recourir à des **tables d'appartenance** pour vérifier une identité.
- À titre d'exemple, pour la première loi de De Morgan ($\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$) on a la table d'appartenance.

A	B	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

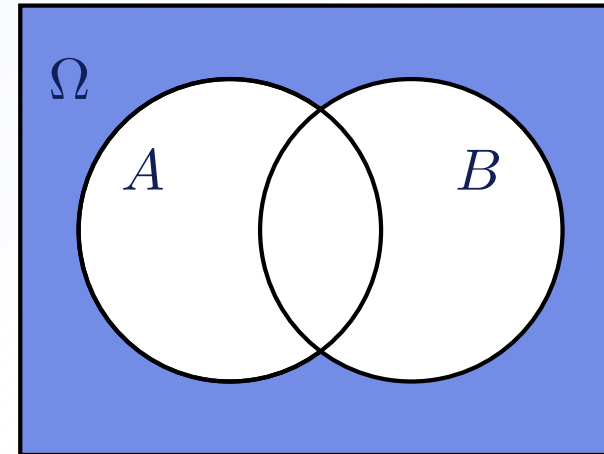
Les colonnes 4 et 7 de cette table étant identiques, la première loi de De Morgan se trouve vérifiée.

Vérification de la 1^{re} loi de De Morgan

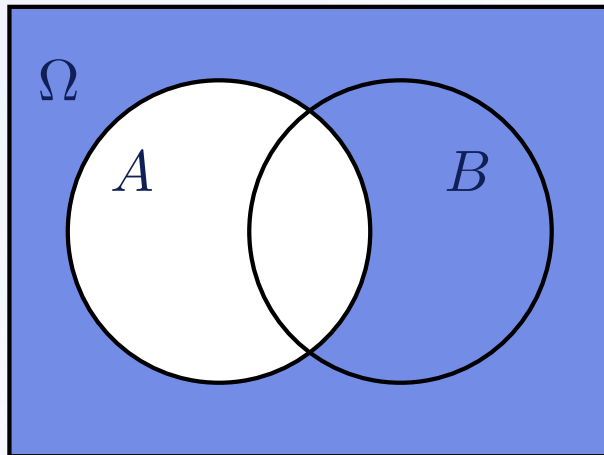
$$A \cup B$$



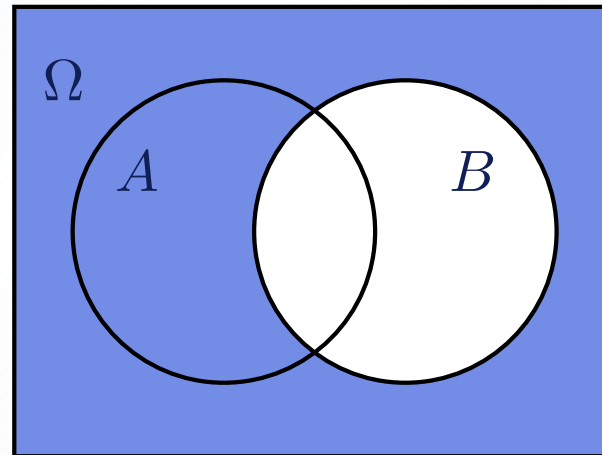
$$\overline{A \cup B}$$



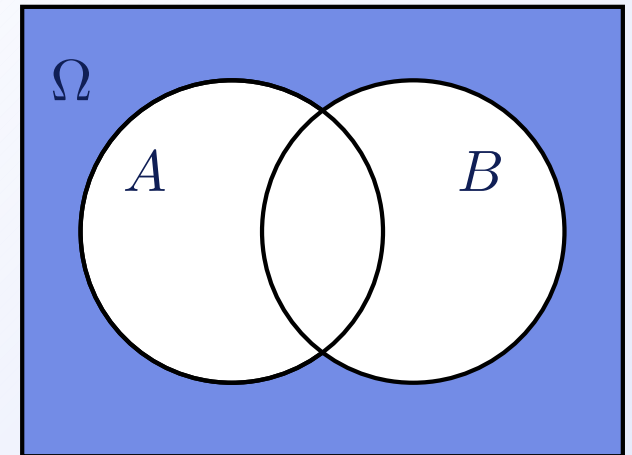
$$\overline{A}$$



$$\overline{B}$$



$$\overline{A} \cap \overline{B}$$



La validité de la première loi de De Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ résulte de l'égalité des deux diagrammes de droite.

Vérification de la 1^{re} loi de De Morgan (2)

- Dire qu'un élément x appartient au complément de l'union de A et B est équivalent à dire qu'il n'appartient pas à l'union de A et B (par définition du complément).

$$x \in \overline{A \cup B} \iff x \notin A \cup B$$

- L'élément x n'appartient pas à l'union de A et B si et seulement s'il n'appartient ni à A ni à B .

$$x \notin A \cup B \iff (x \notin A \text{ et } x \notin B)$$

- Dire que l'élément x n'appartient ni à A ni à B est équivalent à dire qu'il appartient au complément de A et au complément de B .

$$(x \notin A \text{ et } x \notin B) \iff (x \in \overline{A} \text{ et } x \in \overline{B})$$

- Finalement l'élément x appartient au complément de A et au complément de B si et seulement s'il appartient à l'intersection de ces deux compléments.

$$(x \in \overline{A} \text{ et } x \in \overline{B}) \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

- Ainsi un élément x appartient à $\overline{A \cup B}$ si et seulement s'il appartient à $\overline{A} \cap \overline{B}$. Ces deux ensembles sont donc égaux.

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- Un ensemble A est **fini** si son nombre d'éléments (distincts) est un entier naturel. Dans le cas contraire, l'ensemble A est **infini** (une définition plus précise d'un ensemble fini sera donnée au chapitre 3).

Si A est un ensemble **fini**, le **cardinal**, ou la **cardinalité**, de A , noté $|A|$, est égal au **nombre d'éléments distincts de A** .

■ EXEMPLES.

- ▶ $|\{a, b, c, \dots, z\}| = 26$ (en français tout au moins)
- ▶ $|\{0, 1, 1, 0, 1, 0, 0\}| = 2$
- ▶ $|\emptyset| = 0$

- REMARQUE. Il existe plusieurs notations, plus ou moins répandues, pour noter le cardinal d'un ensemble. Ainsi on trouvera tantôt

$$|A|, \quad \text{Card}(A) \quad \text{ou encore} \quad \#(A).$$

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Pour un ensemble A donné, l'**ensemble des parties de A** est l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ formé de **tous les sous-ensembles de A** :

$$\mathcal{P}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{X \mid X \subseteq A\}.$$

■ **EXEMPLE.** Pour l'ensemble $\{\text{Oui}, \text{Non}\}$, on a

$$\mathcal{P}(\{\text{Oui}, \text{Non}\}) = \{\emptyset, \{\text{Oui}\}, \{\text{Non}\}, \{\text{Oui}, \text{Non}\}\}.$$

■ **Propriété.** Quel que soit l'ensemble A , l'ensemble vide $\emptyset$ et l'ensemble A tout entier sont des parties de A , on aura donc toujours

$$\emptyset \in \mathcal{P}(A)$$

et

$$A \in \mathcal{P}(A).$$

Théorème. Soit A un ensemble fini de cardinal $|A| = n$, alors

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^n.$$

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- Un **couple** (a, b) est une liste *ordonnée* de deux éléments a et b .
- Un **triplet** (a, b, c) est une liste *ordonnée* de trois éléments a, b, c .
- Plus généralement, un **n -uple** ou **n -uplet** $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est une liste *ordonnée* de n éléments appelés ses **composantes**.
- Le nombre n est appelé la **taille** du n -uple.
- Deux n -uples sont **égaux** si et seulement s'ils sont formés **des mêmes éléments aux mêmes positions** :

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ et } b = d$$

et plus généralement

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \iff a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n.$$

Produit cartésien de deux ensembles

1. Les ensembles

Ensembles et éléments

Appartenance

Ensembles égaux

Ensemble vide et univers

Sous-ensembles

Opérations

Cardinal

Ensemble des parties

Produit cartésien

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Le **produit cartésien** $A \times B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble de tous les couples (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$:

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

■ EXEMPLE. Pour les ensembles $A = \{0, 1\}$ et $B = \{x, y, z\}$, on a

$$A \times B = \{(0, x), (0, y), (0, z), (1, x), (1, y), (1, z)\}$$

Théorème. Si $|A| = n$ et $|B| = m$ alors

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = nm.$$

Produit cartésien de n ensembles

- Le produit cartésien peut être étendu à un nombre quelconque d'ensembles :

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

- Un cas particulier et fréquent apparaît lorsque tous les ensembles A_i sont égaux. On a alors $A_i = A$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, et on note A^n leur produit cartésien :

$$A^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ facteurs}}.$$

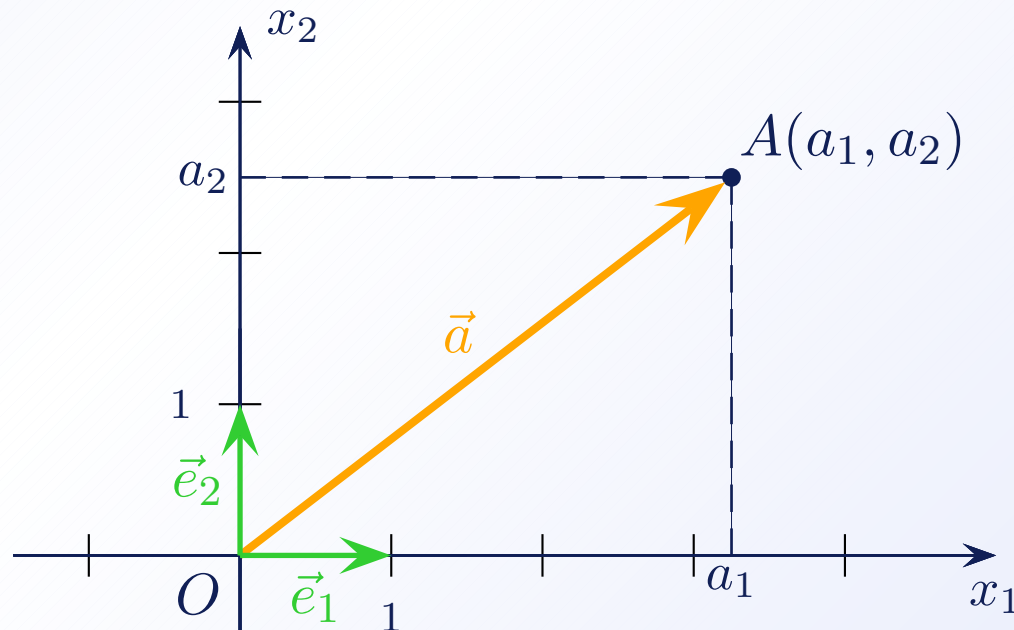
On définit ainsi les **puissances** (entières et positives) de l'ensemble A .

- On a $A^1 = A$ ainsi que la propriété

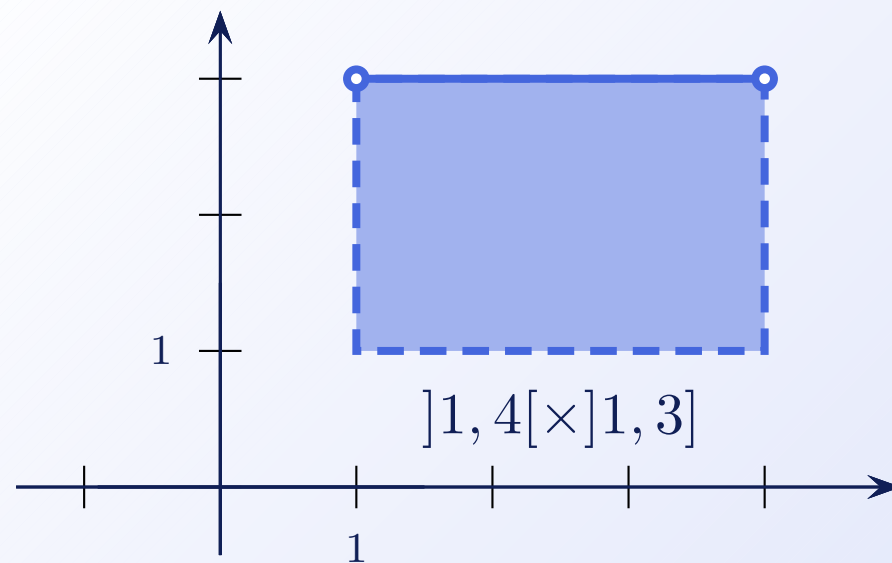
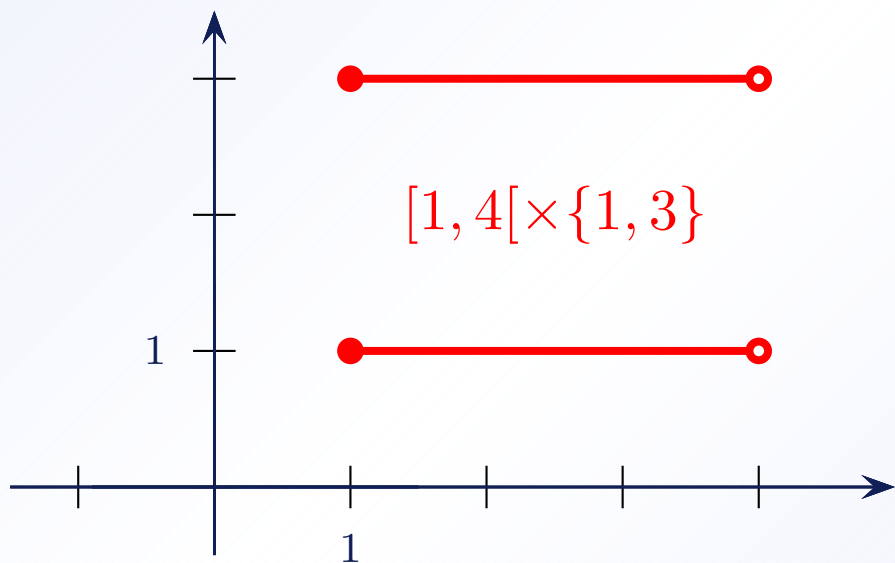
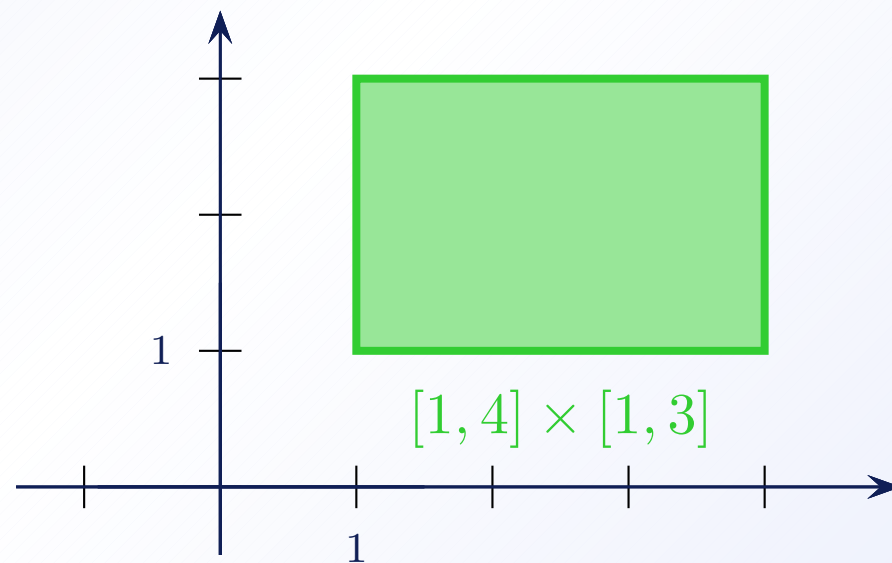
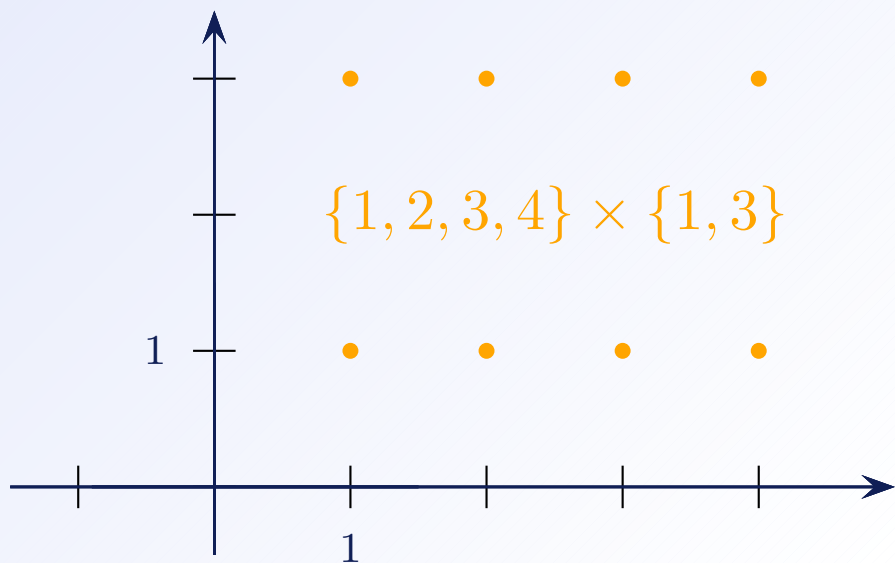
$$A^k \times A^l = A^{k+l} \quad \forall k, l \in \mathbb{N}^*.$$

Repère cartésien et coordonnées cartésiennes

- Pour définir un **repère cartésien** du plan, on choisit un point O (l'**origine**), deux axes (généralement orthogonaux) et deux **vecteurs de base** de longueur 1 (un sur chaque axe).
- Chaque point A du plan est alors identifié (repéré) par ses **coordonnées cartésiennes** (a_1, a_2) , correspondant aux projections du vecteur $\overrightarrow{OA}$ sur chaque axe.
- Chaque point du plan correspond alors à un **couple de nombres réels** et le plan est assimilé au produit cartésien $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.



Représentation géométrique de produits cartésiens



Chapitre 2

Les relations



Relation d'un ensemble vers un autre

Une **relation de l'ensemble A vers l'ensemble B** est un **sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$** .

- Si R est une relation de A vers B et si le couple (a, b) appartient à la relation, on dit que **a est en relation avec b** ou que **a est lié à b** et on note **$(a, b) \in R$ ou $a R b$** .
- Réciproquement, si le couple (a, b) n'est pas dans la relation R , on dit que **a n'est pas en relation avec b** et on note **$(a, b) \notin R$ ou $a \not R b$** .
- EXEMPLE 1. A est l'ensemble des étudiants et étudiantes de l'école et B l'ensemble des cours dispensés ce semestre. L'ensemble

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid \text{l'étudiant-e } a \text{ suit actuellement le cours } b\}$$

est une relation de A vers B .

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- EXEMPLE 2. Pour l'ensemble A des couleurs et l'ensemble B des pays, on peut définir une relation R de A vers B qui met la couleur a en correspondance avec le pays b si a apparaît dans le drapeau national de b . On aura, entre autre,

$$(\text{rouge}, \text{Suisse}) \in R \quad \text{mais} \quad (\text{vert}, \text{France}) \notin R.$$

- EXEMPLE 3. Si A et B sont tous deux égaux à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers, on peut définir une relation de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ formée de tous les couples d'entiers (x, y) où x est inférieur ou égal à y . Si x est en relation avec y on note, classiquement, $x \leq y$, dans le cas contraire on note $x \not\leq y$:

$$3 \leq 7 \quad -2 \not\leq -10.$$

Graphe d'une relation de A vers B

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

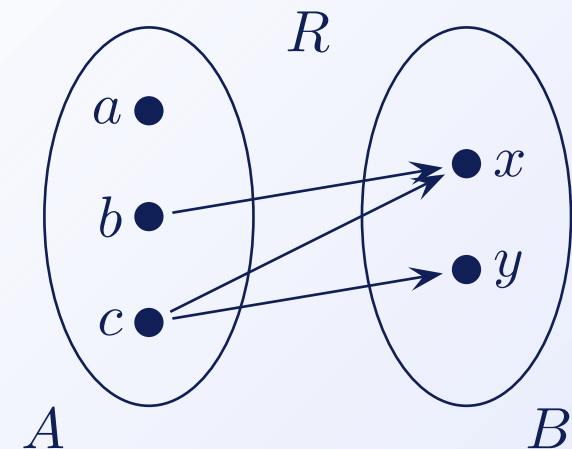
- Si les ensembles A et B sont **finis**, on peut représenter une relation de A vers B par un **graphe (biparti)** :
 - Les éléments de A et de B sont chacun représentés par un point distinct (ce sont les **sommets** du graphe).
 - Chaque couple (a, b) de R est représenté par une flèche reliant le sommet correspondant à a à celui correspondant à b (ce sont les **arcs** du graphe).

■ EXEMPLE.

$$A = \{a, b, c\},$$

$$B = \{x, y\},$$

$$R = \{(b, x), (c, x), (c, y)\}.$$



Matrice d'une relation de A vers B

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- Si les ensembles A et B sont **finis**, on peut également représenter une relation de A vers B par une **matrice** $M(R)$ (un tableau à deux dimensions) :
 - ▶ Chaque élément de A est associé à une ligne de la matrice.
 - ▶ Chaque élément de B est associé à une colonne.
 - ▶ L'entrée à l'intersection de la ligne associée à l'élément $a \in A$ et de la colonne associée à l'élément $b \in B$ est égale à 1 si $(a, b) \in R$ et est égale à 0 sinon.

■ EXEMPLE.

$$A = \{a, b, c\}, B = \{x, y\},$$

$$R = \{(b, x), (c, x), (c, y)\}.$$

$$M(R) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \end{array}$$

Une **relation sur l'ensemble A** est une **relation de A vers A** , c'est-à-dire un **sous-ensemble du produit $A^2 = A \times A$** .

- **EXEMPLE 1.** Si A est l'ensemble des pays, le sous-ensemble R de A^2 contenant tous les couples de pays limitrophes, c.-à-d. ayant une frontière commune, est une relation sur A . On a, entre autre, $(\text{Suisse}, \text{France}) \in R$ et $(\text{Espagne}, \text{Suisse}) \notin R$.
- **EXEMPLE 2.** Les trois ensembles suivants sont autant de relations sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers non négatifs :
 1. $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = x^2\}$
 2. $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$
 3. $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x + y \leq 3\}$

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Graphe d'une relation sur un ensemble fini

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

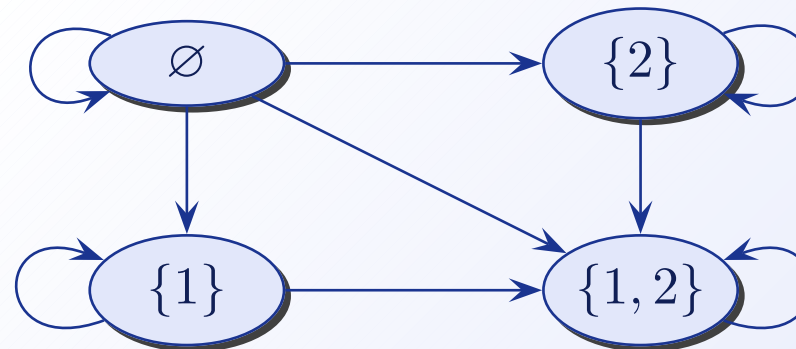
Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- Plutôt que de recourir au graphe biparti associé à une relation entre deux ensemble finis, on préférera représenter une relation R sur un ensemble fini A par un **graphe orienté** dont les sommets correspondent aux éléments de A et où deux sommets a et b sont reliés par un arc de a vers b si $(a, b) \in R$.
- **EXEMPLE.** Soit l'ensemble $A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ et la relation R sur A définie par $R = \{(S, T) \mid S \text{ est un sous-ensemble de } T\}$. Le graphe représentatif de R , qui n'est rien d'autre que la relation d'inclusion ($R = \subseteq$), est



Relations complémentaire et inverse

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- La **relation complémentaire** d'une relation R de A vers B est la relation $\overline{R}$, elle aussi de A vers B , formée de tous les couples du produit cartésien $A \times B$ n'appartenant pas R :

$$\overline{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \in A \times B \mid (a, b) \notin R\} = (A \times B) \setminus R.$$

- La **relation inverse** d'une relation R de A vers B est la relation R^{-1} , de B vers A , obtenue en inversant l'ordre des composantes de chacun des couples de R :

$$R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}.$$

- EXEMPLE. Sur l'ensemble des personnes, la relation complémentaire de la relation « est le fils ou la fille de » est la relation « n'est pas l'enfant de » alors que la relation inverse est la relation « est le père ou la mère de ».

Composition de deux relations

- Soit R une relation de A vers B et S une relation de B vers C . La **composition** de R par S , notée **$S \circ R$** , est la relation de A vers C formée des couples $(a, c) \in A \times C$ pour lesquels il existe (au moins) un élément $b \in B$ avec $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in S$:

$$S \circ R \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ avec } (a, b) \in R \text{ et } (b, c) \in S\}.$$

- EXEMPLE 1. Soit A l'ensemble des étudiants et étudiantes de l'école, B l'ensemble des cours dispensés ce semestre et C l'ensemble des enseignants et enseignantes de l'école. Soit encore les relations

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid \text{l'étudiant-e } a \text{ suit le cours } b\}$$

et

$$S = \{(b, c) \in B \times C \mid \text{le cours } b \text{ est donné par l'enseignant-e } c\}.$$

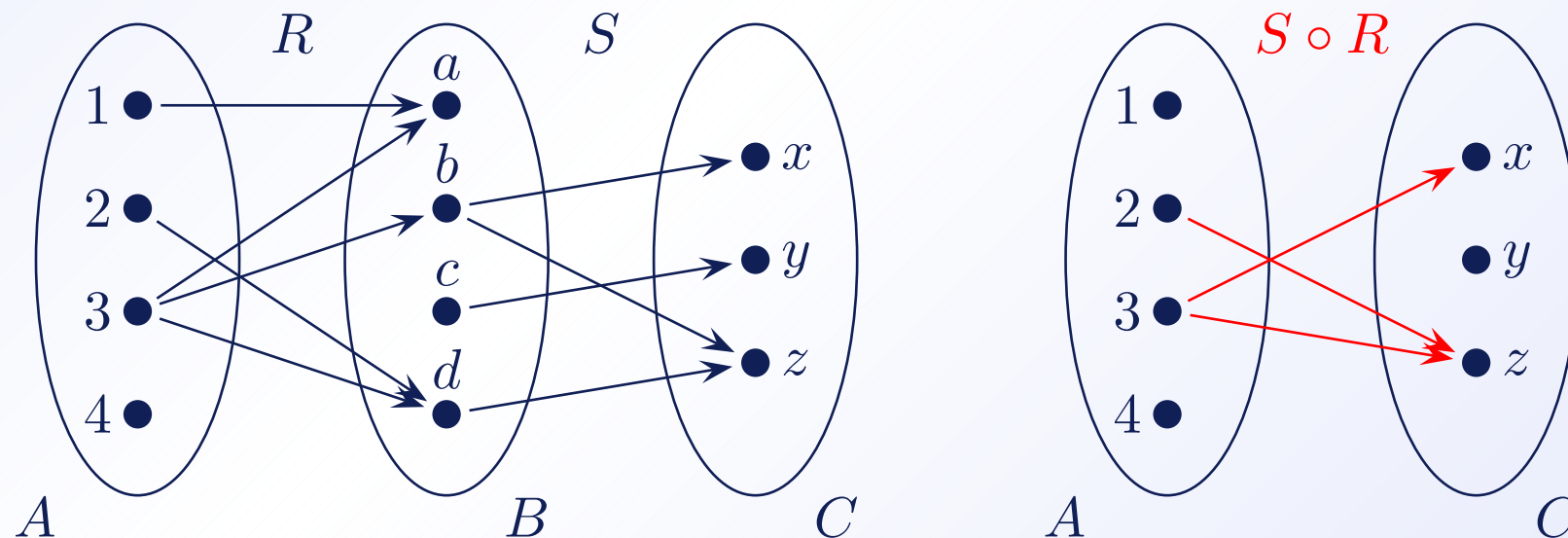
La composition $S \circ R$ est l'ensemble des couples (a, c) où l'étudiant-e a suit au moins un cours donné par l'enseignant-e c ce semestre.

Composition de deux relations (suite)

- EXEMPLE 2. Soient les ensembles $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ et $C = \{x, y, z\}$ et les relations

$$R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\} \text{ et } S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}.$$

On peut calculer la relation $S \circ R$ à partir des graphes de R et S :



$$S \circ R = \{(2, z), (3, x), (3, z)\}$$

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- Si A , B et C sont trois ensembles **finis** et si R est une relation de A vers B et S une relation de B vers C , on peut calculer la matrice $M(S \circ R)$ de la relation composée $S \circ R$ à partir du produit des matrices des deux relations R et S .
- Le **produit de deux matrices P et Q** (qui sera étudié en détails dans le cours MAT1) s'obtient en appliquant la règle

« **ligne $\times$ colonne** »

- Selon cette règle :

L'élément (i, j) du produit PQ (l'élément en ligne i et colonne j) s'obtient en sommant les produits des éléments correspondants de la ligne i de P et de la colonne j de Q .

Matrice d'une composition (suite)

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

■ Pour les relations R et S du dernier exemple, on a

$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■ Le produit matriciel $M(R)M(S)$ est

$$M(R) \cdot M(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrice d'une composition (suite)

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- L'élément $(3, 1)$ du produit est obtenu en multipliant, terme à terme, ceux de la 3^e ligne de $M(R)$ avec ceux de la 1^{re} colonne de $M(S)$ et en sommant le tout :

$$1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1.$$

- Pour obtenir la matrice de la relation composée $S \circ R$, il suffit de **remplacer dans le produit $M(R) \cdot M(S)$ tous les éléments supérieurs à 1 par 1.**
- Pour l'exemple, on obtient dans un premier temps le produit matriciel

$$M(R) \cdot M(S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

duquel on déduit la matrice de la composition $S \circ R$:

$$M(S \circ R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Composition de plusieurs relations

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Grphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- On peut composer plus de deux relations. Ainsi si R est une relation de A vers B , S une relation de B vers C et T une relation de C vers D , **la composition de R , S et T est la relation $T \circ S \circ R$ de A vers D** obtenue en calculant, indifféremment,

$$(T \circ S) \circ R \quad \text{ou} \quad T \circ (S \circ R)$$

car **la composition de relations est associative** !

- On peut composer une relation R **sur l'ensemble A** avec elle-même, on définit alors les **puissances de R** :

$$R^2 = R \circ R, \quad R^3 = R \circ R \circ R = R^2 \circ R = R \circ R^2$$

et plus généralement

$$R^n = R^{n-1} \circ R = R \circ R^{n-1} \quad n = 2, 3, \dots$$

Propriétés d'une relation sur un ensemble

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

On classifie les relations **sur un ensemble** à l'aide de quatre propriétés principales :

- la **réflexivité**,
- la **symétrie**,
- l'**antisymétrie**,
- la **transitivité**.

Ces quatre propriétés sont à la base des définitions de deux types particulièrement importants de relations : les **relations d'ordre** et les **relations d'équivalence**.

Une relation R sur un ensemble A est **réflexive** si et seulement si $(a, a) \in R$ pour tout élément $a \in A$.

- Dit autrement, une relation sur l'ensemble A est réflexive si et seulement si chaque élément de A est en relation avec lui-même.
- EXEMPLE 1. La relation d'inclusion (sur une collection d'ensembles) est réflexive car $S \subseteq S$ pour tout ensemble S .
- EXEMPLE 2. La relation « est le fils/la fille de » (sur l'ensemble des personnes) n'est pas réflexive car personne n'est le fils/la fille de lui/elle-même. (Une telle relation est dite **irréflexive**.)
- EXEMPLE 3. La relation $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < 2y\}$ n'est pas réflexive car $(0, 0) \notin R$ (même si $(x, x) \in R$ pour tout $x > 0$).

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

La relation R sur A est-elle réflexive ?

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- Si l'ensemble A est fini, une relation R sur A est réflexive si et seulement si la diagonale principale de la matrice $M(R)$ de la relation ne contient que des 1 :

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

- Par rapport au graphe représentatif de la relation, cela revient à dire que R est réflexive si et seulement si une boucle relie chaque sommet du graphe à lui-même.

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Une relation R sur un ensemble A est **symétrique** si et seulement si à chaque fois qu'un élément a est en relation avec un élément b on a aussi (et obligatoirement) l'élément b en relation avec l'élément a :

$$(a, b) \in R \implies (b, a) \in R \quad \text{quels que soient } a \text{ et } b \text{ dans } A.$$

- EXEMPLE 1. La relation, sur l'ensemble des pays, formée de tous les couples de pays limitrophes est symétrique.
- EXEMPLE 2. La relation sur $\mathbb{Z}$ où x est en relation avec y si et seulement si x a la même parité que y (c.à-d. si et seulement si x et y ont la même parité) est symétrique.
- EXEMPLE 3. La relation « est le fils/la fille de » (sur l'ensemble des personnes) n'est pas symétrique.

La relation R sur A est-elle symétrique ?

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

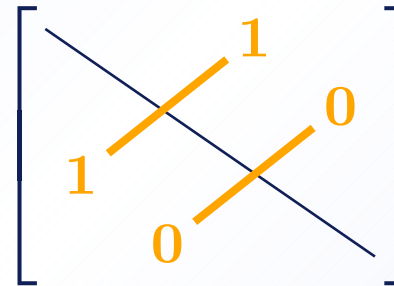
Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- Si l'ensemble A est fini, une relation R sur A est symétrique si et seulement si la matrice $M(R)$ de la relation est symétrique par rapport à sa diagonale principale :



- Par rapport au graphe représentatif de la relation, cela revient à dire que R est symétrique si et seulement si entre deux sommets distincts il y a soit un arc dans chaque direction soit aucun arc (la présence ou l'absence de boucles sur les sommets n'a pas d'importance).
- PROPRIÉTÉ.

Une relation R est symétrique si et seulement si $R^{-1} = R$.

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Une relation R sur un ensemble A est **antisymétrique** si et seulement si la seule situation où il est possible d'avoir simultanément $(a, b) \in R$ et $(b, a) \in R$ arrive lorsque $a = b$:

$$(a, b) \in R \text{ et } (b, a) \in R \implies a = b \quad \forall a, b \in A.$$

- Dit autrement, la relation R est antisymétrique si et seulement si pour toute paire d'éléments a et b *distincts*, on a soit a en relation avec b , soit b en relation avec a , soit ni l'un ni l'autre mais en aucun cas les deux.
- EXEMPLE 1. La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est antisymétrique car la seule manière d'avoir simultanément $x \leq y$ et $y \leq x$ est d'avoir $x = y$.

Antisymétrie (suite des exemples)

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- EXEMPLE 2. La relation d'inclusion est antisymétrique car si deux ensembles A et B sont tels que $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ on a forcément $A = B$.
- EXEMPLE 3. La relation « est le fils/la fille de » (sur l'ensemble des personnes) est antisymétrique car personne n'est en même temps le fils/la fille **et** le père/la mère de quelqu'un d'autre.
- EXEMPLE 4. Sur $\mathbb{Z}$, la relation $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 \leq y^2\}$ n'est pas antisymétrique car 1 est en relation avec -1 , -1 est en relation avec 1 mais $1 \neq -1$.
- EXEMPLE 5. Sur $\mathbb{N}$, la relation $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x^2 \leq y^2\}$ est, elle, antisymétrique !

La relation R sur A est-elle antisymétrique ?

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

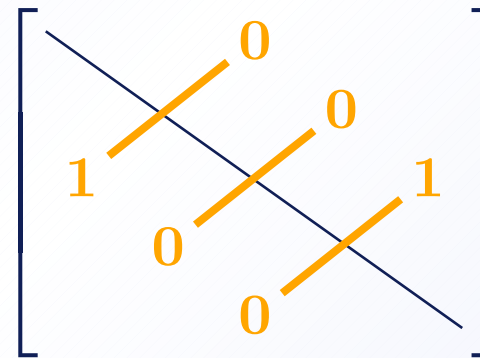
Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- Si l'ensemble A est fini, une relation R sur A est antisymétrique si et seulement si, dans la matrice $M(R)$ de la relation, il n'existe pas deux 1 en symétrie par rapport à la diagonale principale :



- Par rapport au graphe représentatif de la relation, cela revient à dire que R est antisymétrique si et seulement si il y a **au plus** un arc entre toute paire de sommets distincts (la présence ou l'absence de boucles sur les sommets n'a pas d'importance).

La symétrie et l'antisymétrie ne sont pas deux propriétés opposées ou exclusives l'une de l'autre !

Il existe en effet des relations

- à la fois symétrique et antisymétrique,
- ni symétrique, ni antisymétrique.

EXEMPLE 1. La relation d'égalité sur un ensemble A , c.-à-d. la relation formée de tous les couples $(a, b) \in A \times A$ vérifiant $a = b$, est à la fois symétrique **et** antisymétrique.

EXEMPLE 2. Les relations « est le frère de » et « est la sœur de » (sur l'ensemble des personnes) ne sont ni symétriques ni antisymétriques.

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

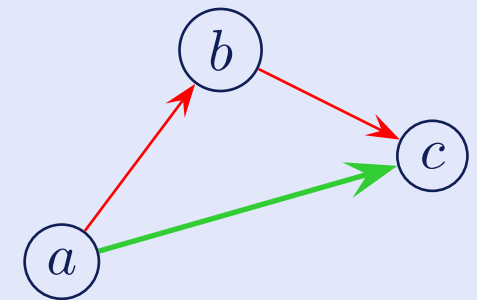
Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Une relation R sur un ensemble A est **transitive** si et seulement si à chaque fois que l'on trouve deux couples (a, b) et (b, c) dans R on y trouve également le couple (a, c) :



$$(a, b) \in R \text{ et } (b, c) \in R \implies (a, c) \in R \quad \forall a, b, c \in A.$$

- EXEMPLE 1. La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est transitive car si les trois nombres réels x, y et z vérifient $x \leq y$ et $y \leq z$ on a aussi (et obligatoirement) $x \leq z$.
- EXEMPLE 2. La relation R , sur l'ensemble des pays, formée de tous les couples de pays limitrophes n'est pas transitive. On a, en effet,

$$(\text{France}, \text{Suisse}) \in R \quad \text{et} \quad (\text{Suisse}, \text{Autriche}) \in R$$

mais

$$(\text{France}, \text{Autriche}) \notin R.$$

La relation R sur A est-elle transitive ?

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Considérons une relation R sur un ensemble A .

- À chaque fois que l'on trouve trois éléments a, b et c de A vérifiant $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in R$, on a $(a, c) \in R^2 = R \circ R$ par définition de la composition. Cependant si R est transitive on a aussi $(a, c) \in R$.

Ainsi, **si une relation R est transitive, tout élément de R^2 est déjà élément de R :**

$$R \text{ transitive} \implies R^2 \subseteq R .$$

- Réciproquement, si la relation R n'est pas transitive, il existe trois éléments a, b et c dans A avec $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ mais $(a, c) \notin R$. Cependant (a, c) appartient à R^2 (par définition) et on a

$$R \text{ non transitive} \implies R^2 \not\subseteq R .$$

La relation R sur A est-elle transitive ? (suite)

En combinant les deux résultats précédents, on obtient

Théorème. *Une relation R sur un ensemble A est transitive si et seulement si*

$$R^2 \subseteq R.$$

■ EXEMPLE. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$, on a

$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (M(R))^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M(R^2).$$

Ainsi $R^2 = \{(1, 1), (3, 1), (3, 4)\} \subseteq R$ et R est transitive.

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Une relation R sur l'ensemble A est une **relation d'ordre** si et seulement si elle est simultanément

■ **réflexive** : $a R a$ pour tout $a \in A$,

■ **antisymétrique** : si $a R b$ et $a \neq b$ alors $b \not R a$

■ **transitive** : si $a R b$ et $b R c$ alors $a R c$.

■ **EXEMPLE 1.** La relation d'ordre la plus connue est la relation $\leq$ (« plus petit ou égal ») qu'elle soit définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, relatifs $\mathbb{Z}$ ou, plus généralement, sur un sous-ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

■ **EXEMPLE 2.** La relation d'inclusion ($\subseteq$) est une relation d'ordre sur l'ensemble des parties $\mathcal{P}(S)$ d'un ensemble S ou, plus généralement, sur toute collection $\mathcal{C}$ d'ensembles.

Éléments comparables et ordre partiel ou total

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- Si R est une relation d'ordre sur A , deux éléments $a, b \in A$ sont dits **comparables** si on a $a R b$ ou $b R a$ (voire les deux dans le cas particulier où $a = b$).

Une relation d'ordre R est

- ▶ un **ordre partiel** s'il existe au moins deux éléments a et b non comparables,
- ▶ un **ordre total** ou **linéaire** si chaque paire d'éléments de A est comparable.

- EXEMPLE 1. La relation d'ordre $\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{N}$ (et, plus généralement, sur tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$) car si n et m sont deux entiers non négatifs, on a soit $n \leq m$, soit $m \leq n$ (voire les deux si n et m sont égaux).

Ordre partiel ou total (suite des exemples)

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

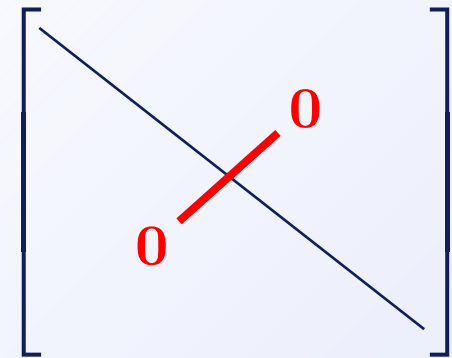
Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

■ EXEMPLE 2. La relation d'inclusion sur l'ensemble des parties $\mathcal{P}(S)$ d'un ensemble S (de cardinal ≥ 2) est un ordre partiel mais pas total, car il existe des sous-ensembles de S qui ne sont pas comparables. En effet, si A et B sont deux sous-ensembles non vides et disjoints de S ($A \cap B = \emptyset$), on n'a ni $A \subseteq B$ ni $B \subseteq A$. A et B ne sont donc pas comparables par la relation $\subseteq$.

■ PROPRIÉTÉ. Si R est une relation d'ordre sur un ensemble A fini, R est un ordre total si et seulement si la matrice $M(R)$ ne contient pas deux 0 en symétrie par rapport à sa diagonale principale car cette disposition correspondrait à deux éléments non comparables.



1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

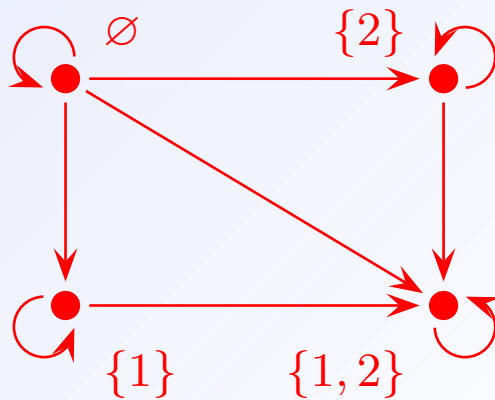
4. Suites et séries

Le **diagramme de Hasse** d'un ordre, partiel ou total, est une simplification du graphe de la relation.

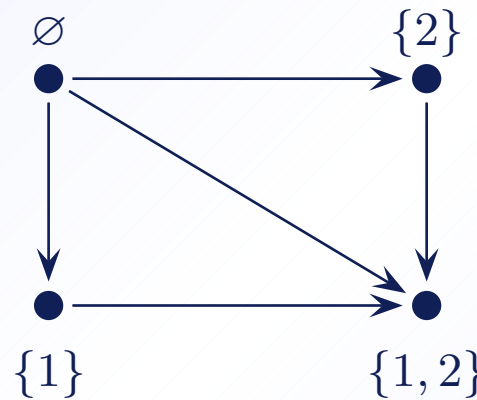
- **Les boucles ne sont pas représentées** (leur présence se déduisant de la réflexivité de la relation).
- **Les arcs se déduisant par transitivité ne sont pas représentés.**
- On oublie l'orientation des arcs en adoptant la convention : **si $a R b$ alors a est placé en dessous de b dans le dessin** (tous les arcs sont dirigés vers le haut).

Exemple

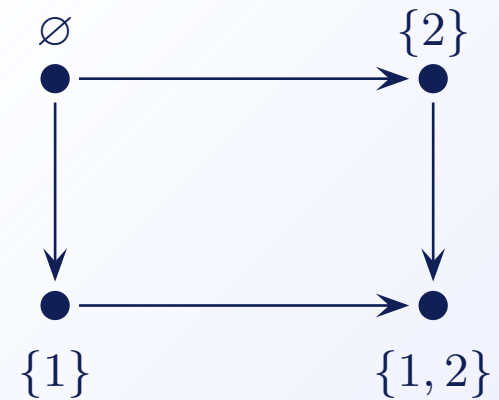
Pour la relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ on a la suite de graphes :



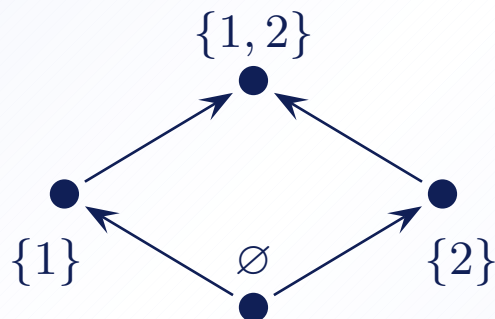
1. Graphe de R



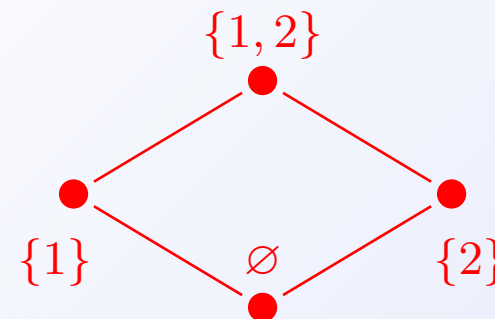
2. Suppression des boucles



3. Suppression des arcs transitifs



4. Orientation des arcs vers le haut



5. Diagramme de Hasse de R

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Une relation R sur l'ensemble A est une **relation d'équivalence** si et seulement si elle est simultanément

- **réflexive** : $a R a$ pour tout $a \in A$,
- **symétrique** : si $a R b$ alors $b R a$,
- **transitive** : si $a R b$ et $b R c$ alors $a R c$.

- Deux éléments $a, b \in A$ liés par une telle relation (on a forcément $a R b$ et $b R a$ par symétrie) sont dits **équivalents**.
- Le symbole usuel pour noter l'équivalence de deux éléments a et b est le « triple égal » : $a \equiv b$.
- EXEMPLE 1. Si A est l'ensemble des étudiants et étudiantes de l'école, l'ensemble des couples de personnes du même département définit une relation d'équivalence sur A .

Relations d'équivalence (suite des exemples)

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

- **EXEMPLE 2.** Si A est l'ensemble des mots de la langue française, l'ensemble des couples de mots ayant le même nombre de lettres définit une relation d'équivalence sur A .
- **EXEMPLE 3.** La relation $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x = y \text{ ou } x = -y\}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Pour cette relation, qui s'écrit aussi $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x| = |y|\}$, les entiers 2 et -2 sont équivalents car $|2| = |-2|$ et plus généralement chaque entier est équivalent à son opposé (et à lui-même évidemment).
- **EXEMPLE 4.** Dans le plan $\mathbb{R}^2$, l'ensemble formé de tous les couples de points $(P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2))$ pour lesquels

$$\max(x_1, y_1) = \max(x_2, y_2)$$

est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.

Relations d'équivalence (suite des exemples)

- Quel que soit le point $P(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, il est en relation avec lui-même car on a (trivialement)

$$\max(x_1, y_1) = \max(x_1, y_1).$$

La relation est donc réflexive.

- Quels que soient les points $P(x_1, y_1)$ et $Q(x_2, y_2)$, si le premier est en relation avec le second alors le second l'est avec le premier car l'égalité est symétrique :

$$\max(x_1, y_1) = \max(x_2, y_2) \iff \max(x_2, y_2) = \max(x_1, y_1).$$

La relation est donc symétrique.

- La transitivité de la relation découle, elle aussi, de celle de l'égalité :

$$\left. \begin{array}{l} \max(x_1, y_1) = \max(x_2, y_2) \\ \text{et} \\ \max(x_2, y_2) = \max(x_3, y_3) \end{array} \right\} \implies \max(x_1, y_1) = \max(x_3, y_3)$$

quels que soient les points $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ et $R(x_3, y_3)$ du plan.

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Pour une relation d'équivalence R sur l'ensemble A , le sous-ensemble de A formé de tous les éléments équivalents à $a \in A$ s'appelle la **classe d'équivalence de a** et se note $[a]_R$ ou, simplement, $[a]$ (lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur R) :

$$[a]_R \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in A \mid a R s\} = \{s \in A \mid (a, s) \in R\}.$$

■ PROPRIÉTÉS.

- Si les éléments a et b sont équivalents pour la relation R (c.-à-d. si $(a, b) \in R$) alors $[a]_R = [b]_R$.
- Si les éléments a et b ne sont pas équivalents pour la relation R (c.-à-d. si $(a, b) \notin R$) alors $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

■ **Théorème.** Deux classes d'équivalence $[a]$ et $[b]$ sont ou bien égales ou bien disjointes.

- EXEMPLE 1. Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers, la relation R formée de tous les couples d'entiers de même parité est une relation d'équivalence. Elle possède **deux classes d'équivalence**, **l'ensemble des entiers pairs** et **l'ensemble des entiers impairs** :

$$[1] = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\} = [-1] = [3] = [-3] = \dots$$

$$[2] = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} = [0] = [-2] = [4] = \dots$$

- EXEMPLE 2. Soit A l'ensemble des étudiants et étudiantes de l'école et R la relation d'équivalence formée de tous les couples de personnes d'un même département. Les classes d'équivalence de R sont les groupes d'étudiants et étudiantes des différents départements de l'école. Ces classes sont disjointes car on ne peut être inscrit que dans un seul département à la fois.
- EXEMPLE 3. La relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$

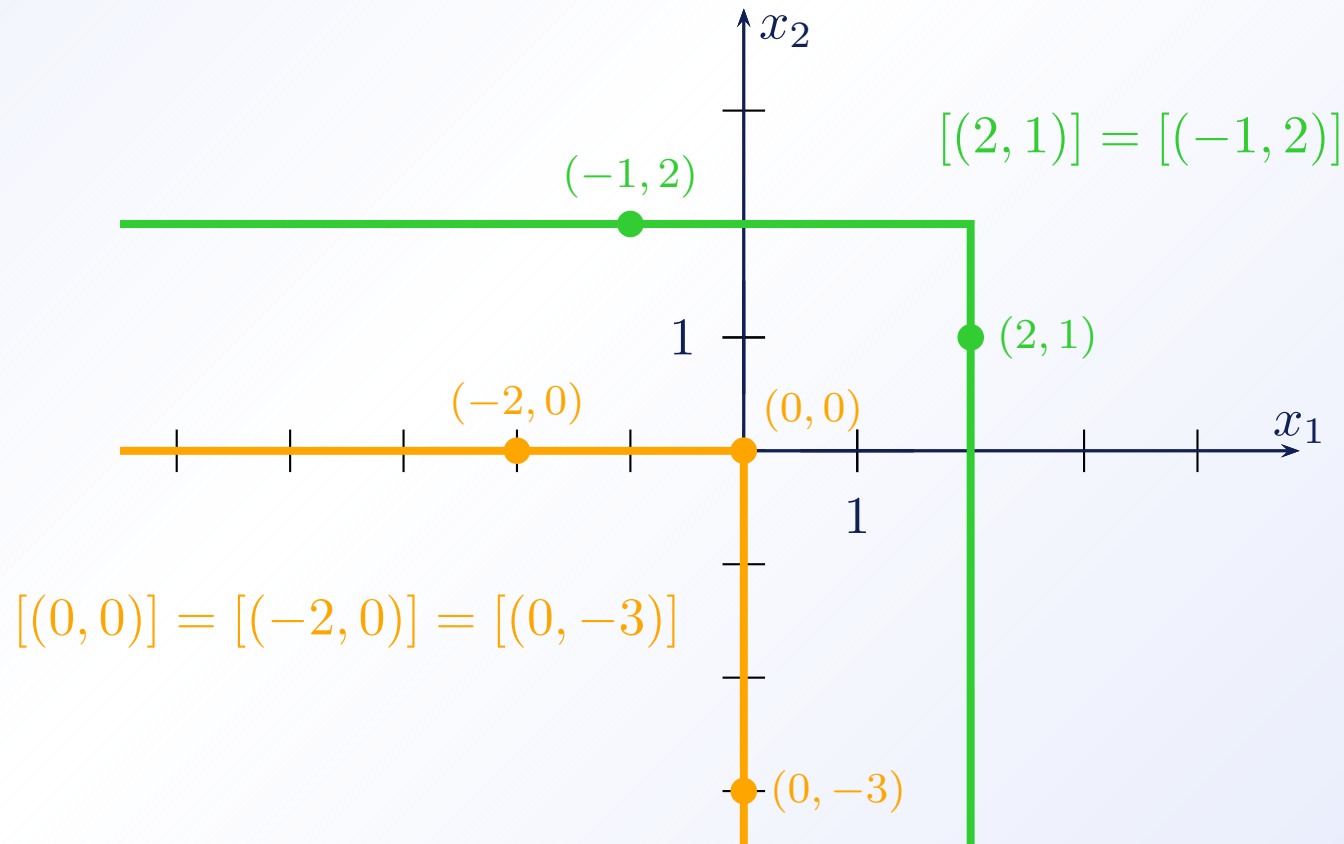
$$R = \{(X(x_1, x_2), Y(y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \max(x_1, x_2) = \max(y_1, y_2)\}$$

possède une infinité de classes d'équivalence.

- La classe d'équivalence de l'origine est

$$[(0, 0)] = \{(x_1, 0) \mid x_1 \leq 0\} \cup \{(0, x_2) \mid x_2 \leq 0\}.$$

- Celle du point $(2, 1)$ est $[(2, 1)] = \{(x_1, 2) \mid x_1 \leq 2\} \cup \{(2, x_2) \mid x_2 \leq 2\}.$



Une **partition** d'un ensemble A est une **décomposition de A en sous-ensembles disjoints**.

- **PROPRIÉTÉ.** Si R est une relation d'équivalence sur A , l'ensemble des classes d'équivalence de R forme une partition de A .
- **EXEMPLE.** Sur l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$, la relation R de matrice

$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

possède 2 classes d'équivalence :

$$A_1 = [1] = [4] = \{1, 4\} \quad \text{et} \quad A_2 = [2] = [3] = \{2, 3\}.$$

Ces deux classes sont disjointes : $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et leur union est égale à A tout entier : $A_1 \cup A_2 = A$, elles forment donc une partition de A .

1. Les ensembles

2. Les relations

Relation

Graphe d'une relation

Matrice d'une relation

Complément et inverse

Composition

Propriétés

Réflexivité

Symétrie

Antisymétrie

Transitivité

Relation d'ordre

Diagrammes de Hasse

Relation d'équivalence

Classes d'équivalence

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Chapitre 3

Les fonctions



1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

Fonctions

Graphes d'une fonction

Fonctions et relations

Domaine et image

Compositions de
fonctions

Fonctions injectives

Fonctions surjectives

Fonctions bijectives

Parties entières

Modulo

Fonction factorielle

Ensembles
dénombrables

4. Suites et séries

Soit A et B deux ensembles non vides. Une **fonction de A dans B** (on dit aussi **de A vers B**) est une **correspondance affectant d'exactly un élément de B à chaque élément de A .**

- L'élément de B associé à a par la fonction f est noté $f(a)$. De plus, si $b = f(a)$, b est dit l'**image de a par f** ou la **valeur de f en a** alors que a est dit une **préimage de b par f** ou un **antécédent de b par f** .
- NOTATION. Une fonction f de A dans B se note :

$$\begin{array}{rcl} f : & A & \longrightarrow B \\ & a & \longmapsto f(a) \end{array}$$

- REMARQUE. Un élément de l'ensemble B peut avoir une ou plusieurs préimages, tout comme il peut n'en avoir aucune.

- Si f est une fonction de A dans B , l'ensemble de tous les couples (a, b) où a est un élément de A et $b = f(a)$ est l'unique image de a par f définit le **graphe de la fonction f** :

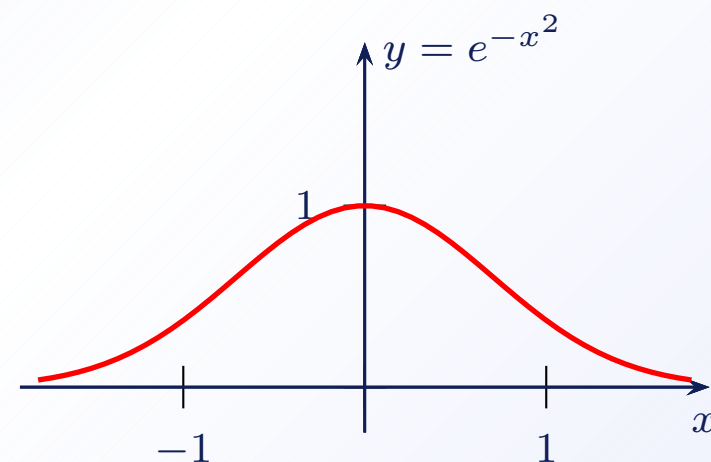
$$\text{Graphe de } f \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\}.$$

- Pour les fonctions numériques, c.-à-d. celles où les ensembles A et B sont égaux à $\mathbb{R}$ (ou à des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ ou des intervalles réels), le graphe d'une fonction f de A dans B peut être identifié à l'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$ (muni d'un repère Oxy) dont les coordonnées (x, y) vérifient $y = f(x)$. Cette **représentation graphique** ou **courbe représentative** de f (souvent appelée, elle-même, graphe de f) est très courante et peut s'avérer particulièrement utile lors de l'étude des propriétés de f .

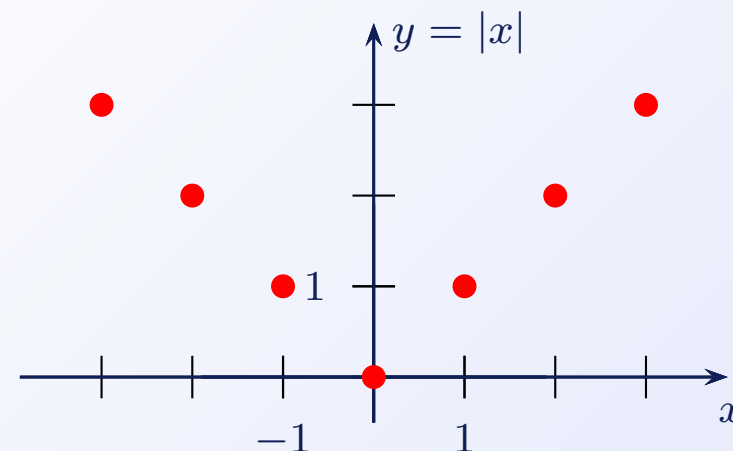
Fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = e^{-x^2} \end{aligned}$$

Représentation graphique



$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto y = |x| \end{aligned}$$



1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

Fonctions

Graphes d'une fonction

Fonctions et relations

Domaine et image

Compositions de fonctions

Fonctions injectives

Fonctions surjectives

Fonctions bijectives

Parties entières

Modulo

Fonction factorielle

Ensembles dénombrables

4. Suites et séries

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

Fonctions

Graphes d'une fonction

Fonctions et relations

Domaine et image

Compositions de
fonctions

Fonctions injectives

Fonctions surjectives

Fonctions bijectives

Parties entières

Modulo

Fonction factorielle

Ensembles
dénombrables

4. Suites et séries

- Le graphe d'une fonction f de A dans B étant un sous-ensemble de $A \times B$, il peut être vu comme une **relation de A vers B** . Dans cette optique,

Une fonction de A dans B est une relation de A vers B avec la propriété que **chaque élément de A est en relation avec un et un seul élément de B** .

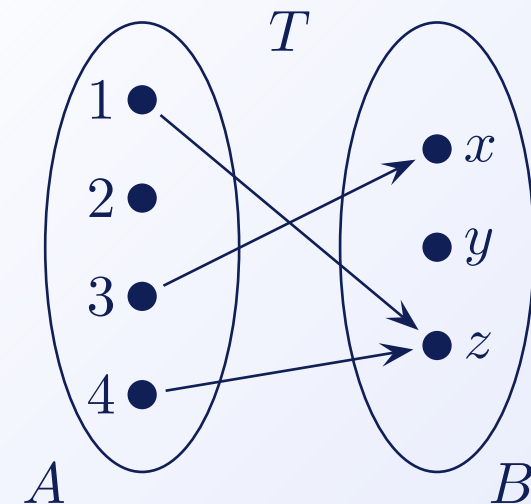
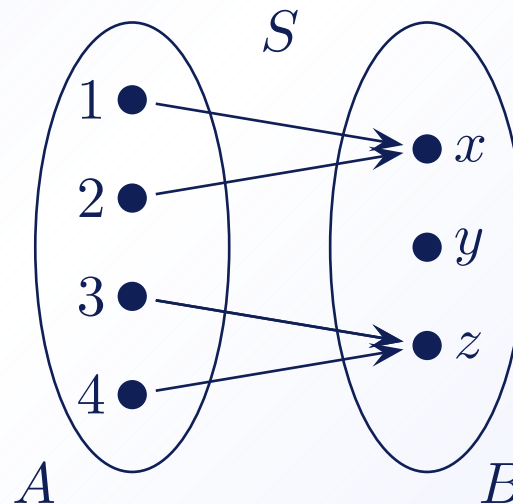
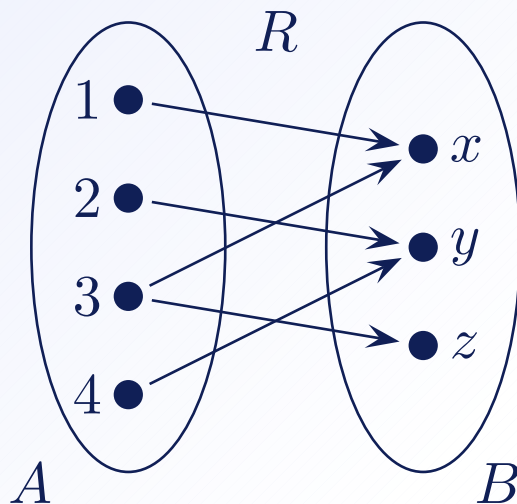
- EXEMPLE 1. Sur $\mathbb{Z}$, la relation $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y = 2x\}$ **est une fonction** de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ car chaque entier est en relation avec **un et un seul** autre entier (son double).
- EXEMPLE 2. Sur $\mathbb{Z}$, la relation $S = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 = y^2\}$ **n'est pas une fonction** de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ car chaque entier non nul est en relation avec **deux** entiers (lui-même et son opposé).

Exemple 3

Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{x, y, z\}$. Parmi les trois relations R , S et T de A vers B dont les graphes sont donnés ci-dessous, seule la relation S définit une fonction de A dans B .

En effet,

- la relation R n'est pas une fonction car l'élément 3 est en relation avec **deux** éléments de B ;
- la relation T n'est pas une fonction car l'élément 2 n'est en relation avec **aucun** élément de B .



Domaine de définition et ensemble image

Soit f une fonction de A dans B ,

- l'ensemble A est appelé le **domaine de définition** de f (ou l'**ensemble de définition** de f , ou simplement le **domaine** de f),
- l'ensemble B est appelé le **codomaine** ou le **but** de f ,
- l'ensemble de toutes les images des éléments de A par f est appelé l'**image**, l'**ensemble image** ou la **portée** de la fonction et est noté $\text{Im}(f)$ ou $f(A)$,
- plus généralement, pour tout sous-ensemble S de A , l'**image de S par f** , notée $f(S)$, est le sous-ensemble de B formé de toutes les images des éléments de S :

$$f(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(s) \mid s \in S\},$$

- pour tout sous-ensemble T de B , l'**image réciproque de T par f** , notée $f^{-1}(T)$, est le sous-ensemble de A formé de toutes les préimages des éléments de T :

$$f^{-1}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid f(a) \in T\}.$$

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

Fonctions

Graphes d'une fonction

Fonctions et relations

Domaine et image

Compositions de fonctions

Fonctions injectives

Fonctions surjectives

Fonctions bijectives

Parties entières

Modulo

Fonction factorielle

Ensembles
dénombrables

4. Suites et séries

Soit f une fonction A dans B et g une fonction de B dans C , la **composition de f par g** , notée $g \circ f$, est la fonction de A dans C définie par

$$(g \circ f)(a) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(a)) \quad \forall a \in A.$$

■ EXEMPLE. Soient f et g les deux fonctions de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définies par

$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{et} \quad g(x) = 3x + 2.$$

► La composition de f par g est

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11$$

► alors que la composition de g par f est

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7.$$

■ PROPRIÉTÉ. En général la composition de fonctions n'est pas commutative.

Une fonction f de A dans B est **injective** si et seulement si **elle ne prend jamais deux fois la même valeur**.

- Autrement dit, la fonction f de A dans B est injective si et seulement si des éléments distincts de A ont toujours des images distinctes :

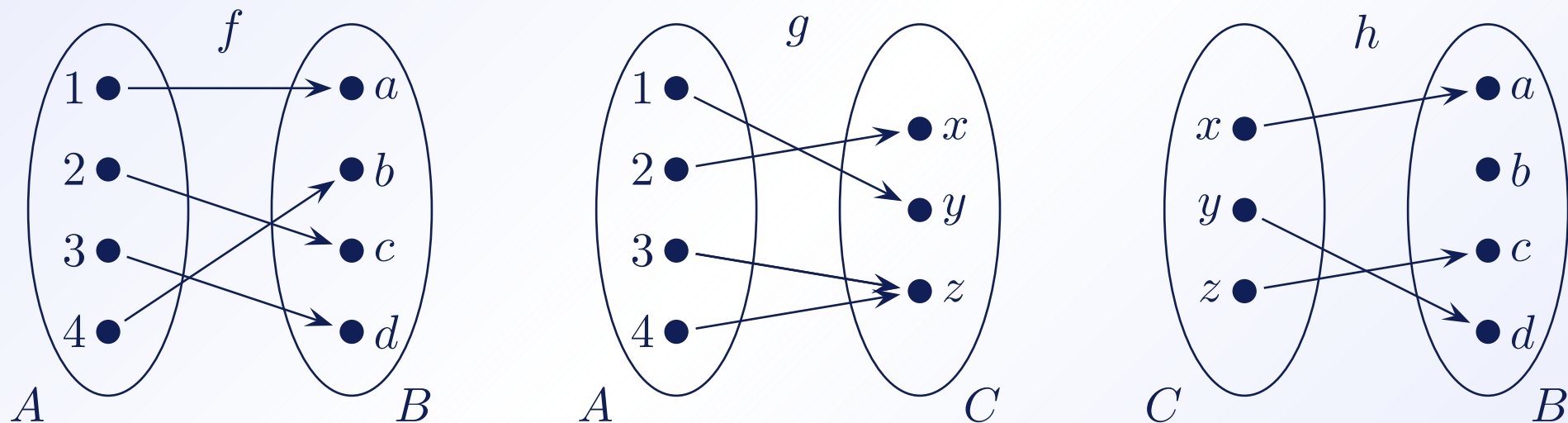
$$\forall x, y \in A, \quad x \neq y \implies f(x) \neq f(y) .$$

- Passant à la contraposée, on a aussi que la fonction f de A dans B est injective si et seulement si **tout élément de B a au plus une préimage** :

$$\forall x, y \in A, \quad f(x) = f(y) \implies x = y .$$

- Une fonction injective est appelée une **injection**.

- EXEMPLE 1. Parmi les trois fonctions f , g et h données par les graphes qui suivent, seules les fonctions f et h sont injectives.



- EXEMPLE 2. La fonction f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à $x \in \mathbb{Z}$ associe $f(x) = x^2$ n'est pas injective car $f(1) = f(-1) = 1$ mais $1 \neq -1$.
- EXEMPLE 3. La fonction f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à $x \in \mathbb{Z}$ associe $f(x) = x + 1$ est injective car $x \neq y$ implique $x + 1 \neq y + 1$.

Une fonction f de A dans B est **surjective** si et seulement si **chaque élément de B est l'image d'au moins un élément de A** , c'est-à-dire si et seulement si **chaque élément de B a au moins une préimage**.

- **Propriété.** Une fonction f de A dans B est surjective si et seulement si l'ensemble image de f est égal au codomaine tout entier :

$$f \text{ est surjective} \iff \text{Im}(f) = B$$

ou encore

$$f \text{ est surjective} \iff f(A) = B.$$

- Une fonction surjective est appelée une **surjection**.

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

Fonctions

Graphes d'une fonction

Fonctions et relations

Domaine et image

Compositions de
fonctions

Fonctions injectives

Fonctions surjectives

Fonctions bijectives

Parties entières

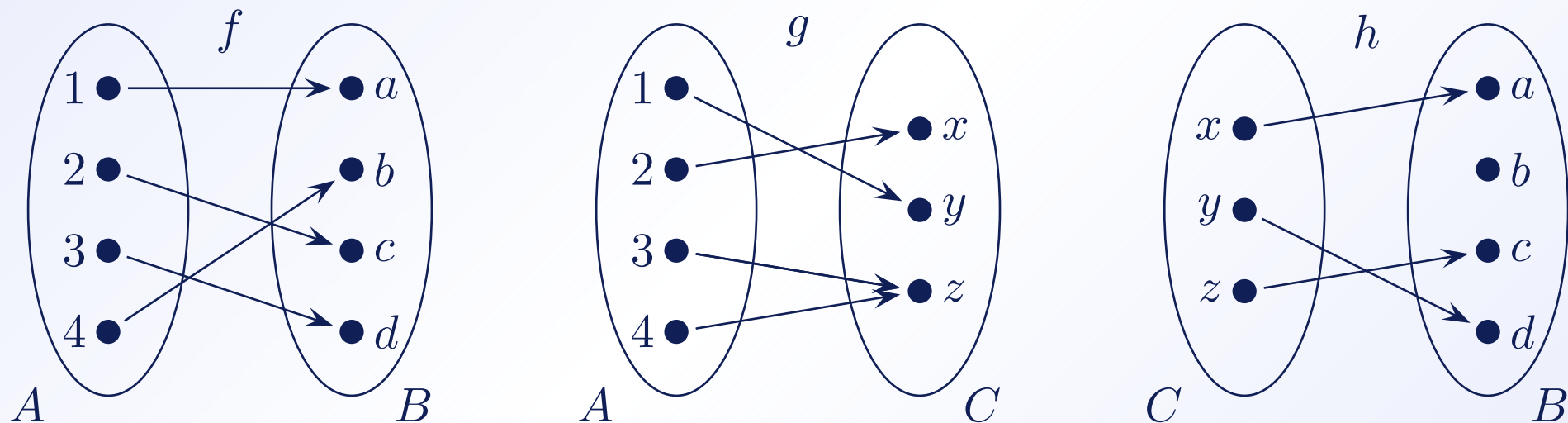
Modulo

Fonction factorielle

Ensembles
dénombrables

4. Suites et séries

- EXEMPLE 1. Parmi les trois fonctions f , g et h données par les graphes qui suivent, seules les fonctions f et g sont surjectives.

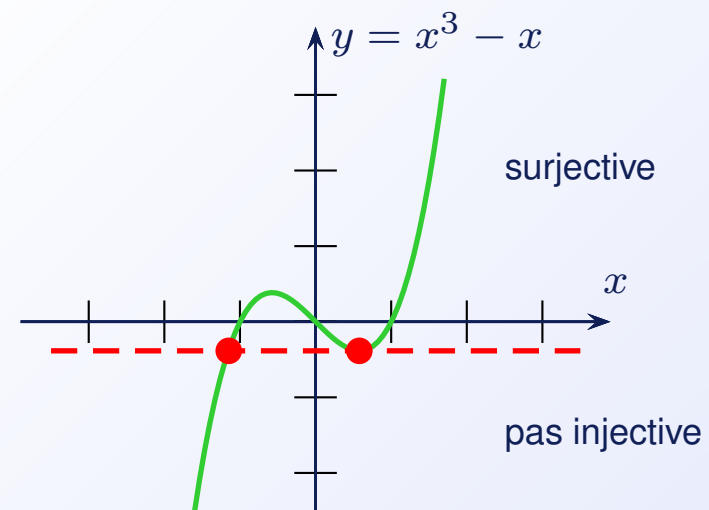
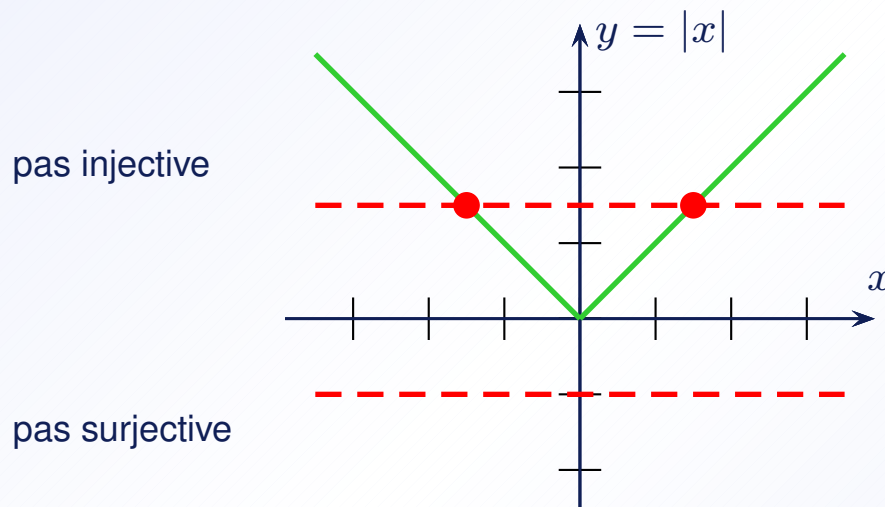


- EXEMPLE 2. La fonction f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à x associe $f(x) = x^2$ n'est pas surjective car il n'existe pas d'entier x avec $f(x) < 0$.
- EXEMPLE 3. La fonction f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à $x \in \mathbb{Z}$ associe $f(x) = x + 1$ est surjective car pour tout entier y , il existe un entier x tel que $f(x) = y$, à savoir $x = y - 1$.

Cas des fonctions réelles

Une **fonction réelle** (d'une variable réelle) est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Une fonction réelle est injective si et seulement si toute droite horizontale intersecte son graphe en **au plus 1 point**.
- Une fonction réelle est surjective si et seulement si toute droite horizontale intersecte son graphe en **au moins 1 point**.



1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

Fonctions

Graphes d'une fonction

Fonctions et relations

Domaine et image

Compositions de fonctions

Fonctions injectives

Fonctions surjectives

Fonctions bijectives

Parties entières

Modulo

Fonction factorielle

Ensembles dénombrables

4. Suites et séries

- Le caractère injectif ou surjectif d'une fonction f est très sensible au choix de son domaine de définition A et de son codomaine B .
- Ainsi, la fonction $f(x) = x^2$ n'est pas injective si elle est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (car tout nombre positif possède deux préimages) mais le devient si elle est définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
- De manière similaire, cette même fonction n'est pas surjective si elle est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (car tout nombre négatif ne possède pas de préimage) mais le devient si elle est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$.
- En théorie, il est toujours possible d'obtenir une surjection à partir d'une fonction f de A dans B en restreignant, si nécessaire, le codomaine B à l'ensemble image $\text{Im}(f)$. En pratique, encore faut-il être capable de calculer $\text{Im}(f)$.

Fonctions bijectives et fonctions réciproques

Une fonction f de A dans B est **bijjective** si et seulement si elle est à la fois **injective** et **surjective**.

- Si f est une **bijection** de A dans B , chaque élément de B possède **une et une seule** préimage.
- On peut alors définir la **fonction réciproque** ou **inverse de f** , notée f^{-1} ou plus rarement ${}^r f$, comme la fonction de B dans A qui associe à chaque élément de B son unique préimage :

$$f^{-1}(b) = a \iff b = f(a).$$

- **Propriété.** Pour une fonction bijective f de A dans B on a

$$f^{-1} \circ f = id_A \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = id_B$$

où id_S dénote la **fonction identité** sur l'ensemble S : $id_S(x) = x, \forall x \in S$.

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

Fonctions

Graphes d'une fonction

Fonctions et relations

Domaine et image

Compositions de
fonctions

Fonctions injectives

Fonctions surjectives

Fonctions bijectives

Parties entières

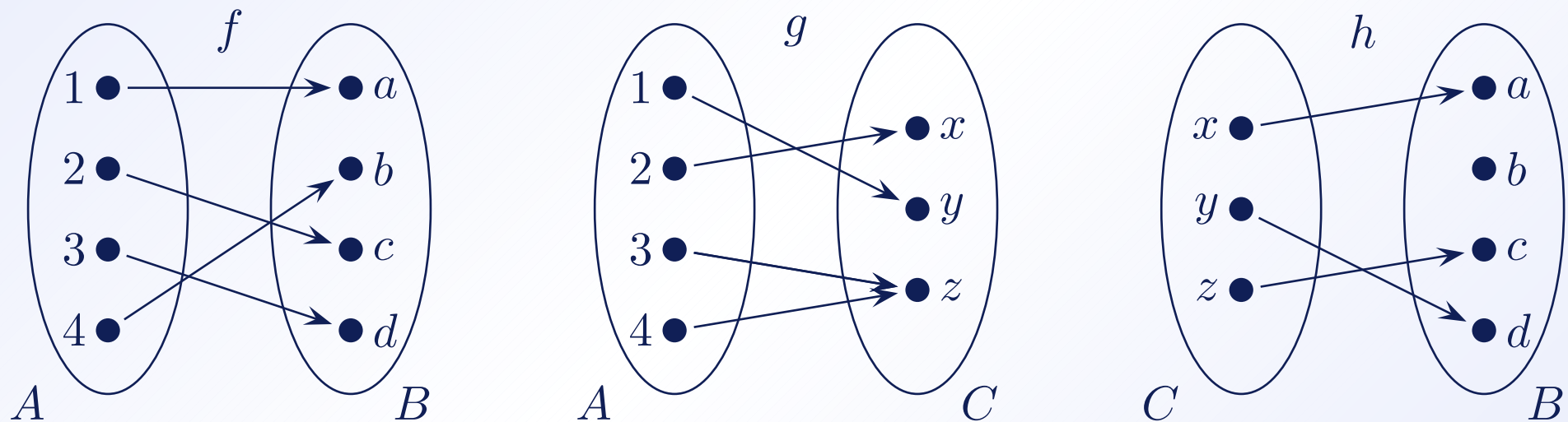
Modulo

Fonction factorielle

Ensembles
dénombrables

4. Suites et séries

- EXEMPLE 1. Parmi les trois fonctions f , g et h données par les graphes qui suivent, seule la fonction f est bijective.



- EXEMPLE 2. La fonction f qui à x associe $f(x) = x^2$ est bijective si elle est définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Son inverse est alors la fonction $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$).

Parties entières inférieures et supérieures

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

Fonctions

Graphe d'une fonction

Fonctions et relations

Domaine et image

Compositions de
fonctions

Fonctions injectives

Fonctions surjectives

Fonctions bijectives

Parties entières

Modulo

Fonction factorielle

Ensembles
dénombrables

4. Suites et séries

Soit x un nombre réel,

- la **partie entière inférieure de x** (« *floor function* »), notée $\lfloor x \rfloor$, est le plus grand entier plus petit ou égal à x ;
- la **partie entière supérieure de x** (« *ceiling function* »), notée $\lceil x \rceil$, est le plus petit entier plus grand ou égal à x .

■ EXEMPLES.

$$\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$$

$$\lceil \frac{1}{2} \rceil = 1$$

$$\lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = -1$$

$$\lceil -\frac{1}{2} \rceil = 0$$

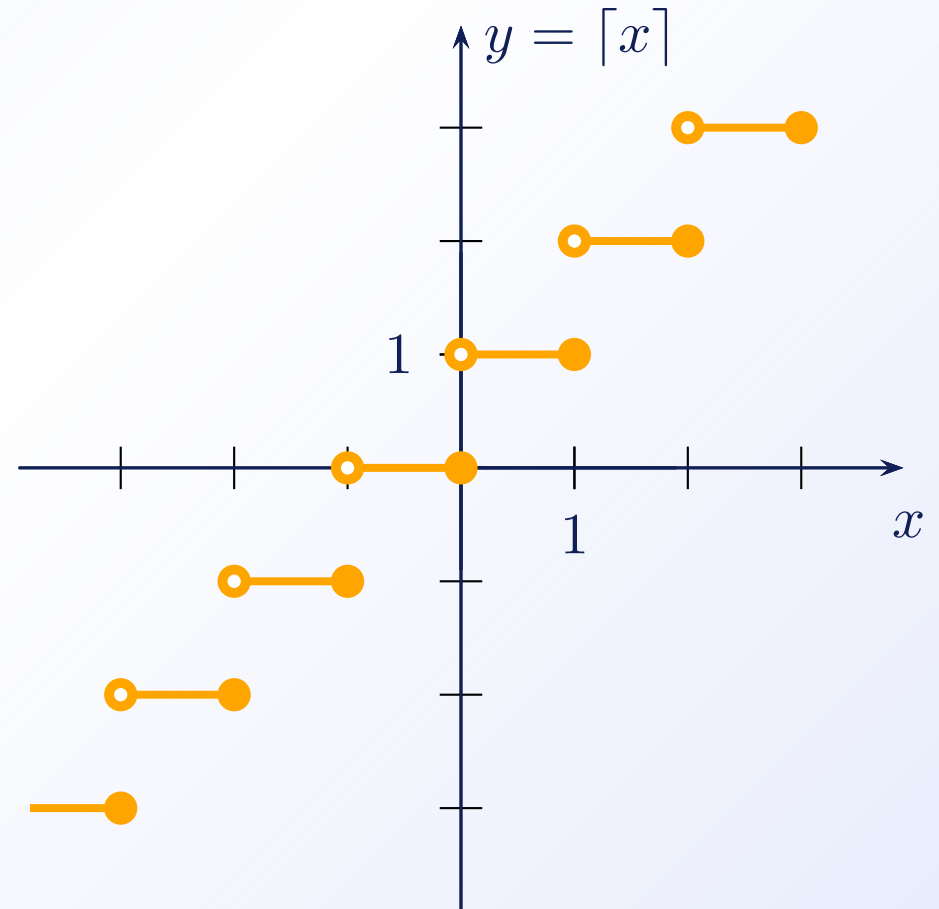
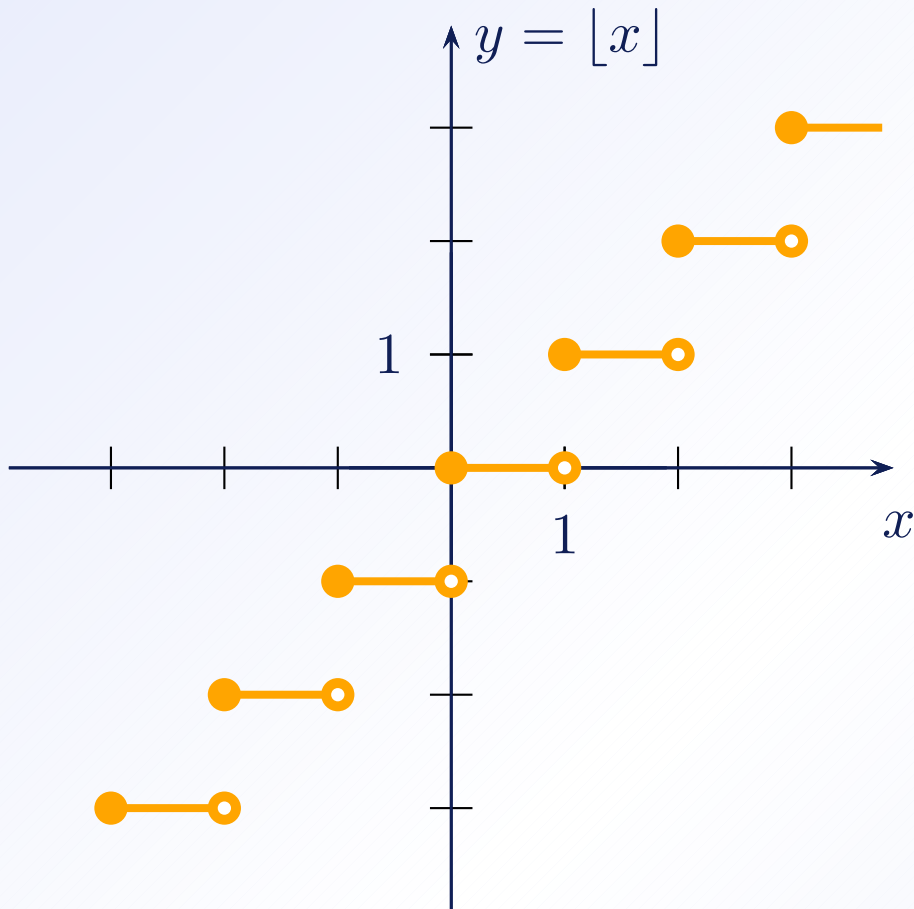
$$\lfloor 3.1 \rfloor = 3$$

$$\lceil 3.1 \rceil = 4$$

$$\lfloor 7 \rfloor = 7$$

$$\lceil 7 \rceil = 7$$

Graphes des fonctions $\lfloor \cdot \rfloor$ et $\lceil \cdot \rceil$



1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

Fonctions

Graphe d'une fonction

Fonctions et relations

Domaine et image

Compositions de
fonctions

Fonctions injectives

Fonctions surjectives

Fonctions bijectives

Parties entières

Modulo

Fonction factorielle

Ensembles
dénombrables

4. Suites et séries

Soit a un entier et $m \geq 1$ un entier **positif**. On note $a \bmod m$ (lu « a modulo m ») le **reste de la division (entière) de a par m** .

- Par définition, le reste de la division de a par m est l'unique entier r **non négatif** permettant d'écrire $a = mq + r$ avec q entier et $0 \leq r < m$.

■ EXEMPLES.

$$17 \bmod 5 = 2, \quad 134 \bmod 205 = 134 \quad \text{et} \quad -94 \bmod 9 = 5.$$

- REMARQUE. Pour calculer le modulo d'un entier négatif a il est souvent plus simple de calculer le modulo de son opposé $-a$ puis de soustraire le résultat à m :

$$\text{Soient } a < 0 \text{ alors } a \bmod m = m - (-a \bmod m)$$

sauf si a est un multiple de m auquel cas $a \bmod m = -a \bmod m = 0$.

■ EXEMPLE.

$$94 \bmod 9 = 4 \text{ et } -94 \bmod 9 = 9 - (94 \bmod 9) = 9 - 4 = 5$$

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

Fonctions

Graphe d'une fonction

Fonctions et relations

Domaine et image

Compositions de fonctions

Fonctions injectives

Fonctions surjectives

Fonctions bijectives

Parties entières

Modulo

Fonction factorielle

Ensembles dénombrables

4. Suites et séries

Si n est un entier positif, la **factorielle de n** , notée **$n!$** , est le **produit des entiers de 1 à n** :

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \prod_{k=1}^n k.$$

Pour $n = 0$, on pose **$0! = 1$** .

- La factorielle croît très rapidement. Pour $n \geq 4$ on a $n! > 2^n$.
- La factorielle apparaît fréquemment en combinatoire mais également en analyse :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

et plus généralement

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bijections et cardinalité : équipotence

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

Fonctions

Graphe d'une fonction

Fonctions et relations

Domaine et image

Compositions de
fonctions

Fonctions injectives

Fonctions surjectives

Fonctions bijectives

Parties entières

Modulo

Fonction factorielle

Ensembles
dénombrables

4. Suites et séries

- Rappelons que le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments distincts dans l'ensemble.
- On peut étendre la notion de cardinal à tous les ensembles (finis ou infinis) :

Deux ensembles A et B ont même cardinal si et seulement s'il existe une bijection de A sur B .

- Deux ensembles de même cardinal sont dits **équipotents**.
- Si un ensemble A (non vide) est fini, il est possible de numérotter ses éléments de 1 à n . On crée alors une bijection de A vers l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.
- Ainsi un ensemble (non vide) est fini si et seulement s'il est équipotent avec l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et on a alors $|A| = n$.

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

Fonctions

Graphe d'une fonction

Fonctions et relations

Domaine et image

Compositions de
fonctions

Fonctions injectives

Fonctions surjectives

Fonctions bijectives

Parties entières

Modulo

Fonction factorielle

Ensembles
dénombrables

4. Suites et séries

- L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est un ensemble infini.
- Son cardinal est noté $\aleph_0$ (Aleph zéro).
- Si on retire 0 de $\mathbb{N}$ on obtient l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers positifs. Cet ensemble est, lui aussi, infini et son cardinal est le même que celui de $\mathbb{N}$.

En effet la fonction $f(n) = n + 1$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$ et ces deux ensembles ont donc même cardinal.
- L'ensemble $\mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ des entiers pairs positifs ou nuls est un ensemble infini de même cardinal que $\mathbb{N}$.

En effet la fonction $f(n) = 2n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{P}$.
- En fait toute partie de $\mathbb{N}$ est soit finie soit de même cardinal que $\mathbb{N}$ tout entier. En ce sens l'ensemble des entiers naturels est « le plus petit ensemble infini ».

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

Fonctions

Graphe d'une fonction

Fonctions et relations

Domaine et image

Compositions de fonctions

Fonctions injectives

Fonctions surjectives

Fonctions bijectives

Parties entières

Modulo

Fonction factorielle

Ensembles dénombrables

4. Suites et séries

Un ensemble qui est soit fini soit de même cardinal que l'ensemble des entiers naturels ($\mathbb{N}$) est dit **dénombrable**. Si tel n'est pas le cas, l'ensemble est dit **non dénombrable**.

- L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs contient (strictement) l'ensemble $\mathbb{N}$ mais il est également dénombrable.

En effet la fonction

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

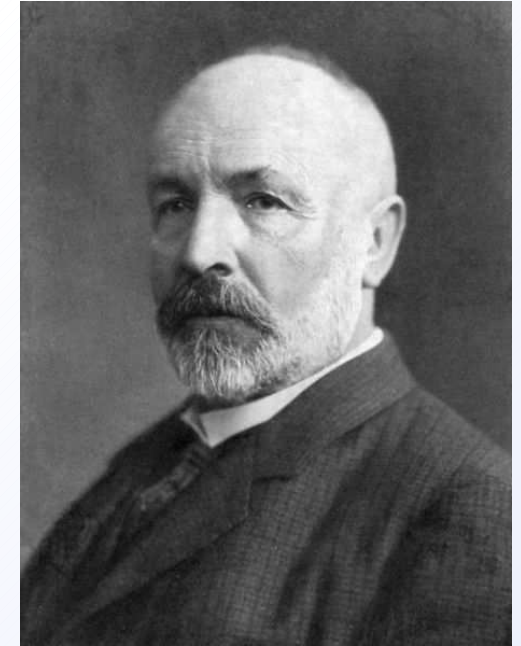
- On montre que les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{N}^3$, ... sont tous dénombrables.

Mais existe-t-il des ensembles non dénombrables ?

- Le théorème suivant, dû à G. Cantor, montre qu'il existe des ensembles non dénombrables, « plus grands que $\mathbb{N}$ ».

Théorème (G. Cantor). *Pour tout ensemble A , $|\mathcal{P}(A)| > |A|$.*

- Ainsi $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$ et l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est non dénombrable. Cet ensemble a le même cardinal que l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels qui est donc lui aussi non dénombrable.
- QUELQUES ENSEMBLES DÉNOMBRABLES : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}^k$ ($k \geq 1$), ...
- QUELQUES ENSEMBLES NON DÉNOMBRABLES : $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{R}$, $[0, 1]$, ...
- QUELQUES PROPRIÉTÉS.
 - ▶ Si $B \subseteq A$ alors $|B| \leq |A|$. En particulier, si A est dénombrable alors tous ses sous-ensembles le sont et, réciproquement, si B est non dénombrable alors tous ses sur-ensembles le sont aussi.
 - ▶ S'il existe une injection de A dans B alors $|A| \leq |B|$ et si B est dénombrable alors A l'est aussi. Réciproquement, s'il existe une surjection de A dans B alors $|A| \geq |B|$ et si B est non dénombrable alors A l'est aussi.



Georg Cantor (1845-1918)

Chapitre 4

Suites et séries



1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométriqueLimite d'une suite
géométrique (2)Symbole somme : $\sum$ Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

Une **suite numérique** est une séquence ordonnée de nombres indicés par des entiers. Plus formellement, **une suite infinie de nombres réels**

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots)$$

est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ qui associe à chaque entier non négatif un nombre réel.

- L'image de l'entier k est notée a_k (plutôt que $a(k)$) et est appelée le **terme d'indice k** de la suite.
- EXEMPLE. La suite des entiers positifs impairs peut être définie par

$$a_k = 2k + 1, \quad k \geq 0,$$

ou, en commençant la numérotation depuis 1, par

$$b_k = 2k - 1, \quad k \geq 1.$$

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- Une suite est **finie** si elle possède un nombre fini de termes, c.-à-d. si l'ensemble des indices numérotant ses termes est fini. Dans le cas contraire, la suite est **infinie**.

- Une suite infinie est généralement définie sur $\mathbb{N}$, ou $\mathbb{N}^*$, et on la note

$$(a_k, k = 0, 1, \dots) \quad \text{ou} \quad (a_k, k \geq 0),$$

voire simplement (a_k) lorsque le contexte est clair.

- Les termes d'une suite finie sont, le plus souvent, numérotés de 0 à $n - 1$, ou de 1 à n , et la suite est notée

$$(a_0, \dots, a_{n-1}) \quad \text{ou} \quad (a_k, k = 0, \dots, n - 1).$$

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- Une suite est définie **par récurrence** si ses termes sont définis de proche en proche, **chacun étant calculé à l'aide du précédent voire des deux précédents ou plus**.
- Pour être complète, une telle définition doit également spécifier une ou plusieurs **valeurs initiales** précisant les valeurs des termes qui ne peuvent être calculés à l'aide de la relation de récurrence.
- EXEMPLE. La suite $(a_k, k = 0, 1, \dots)$ des entiers positifs impairs peut être définie par récurrence en posant

$$a_k = a_{k-1} + 2, \quad k \geq 1$$

avec la condition/valeur initiale $a_0 = 1$. Si on préfère commencer la numérotation depuis 1, on obtient la relation

$$b_k = b_{k-1} + 2, \quad k \geq 2$$

avec la condition initiale $b_1 = 1$.

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- Étant donné une suite définie par récurrence, une question importante (mais qui ne sera pas étudiée plus avant dans ce cours) est de savoir s'il est possible d'obtenir une **expression directe** (on dit aussi **explicite**) pour le calcul du terme général de la suite.

- EXEMPLE. Pour la suite $(a_k, k = 0, 1, \dots)$ des entiers positifs impairs définie par la valeur initiale $a_0 = 1$ et l'équation de récurrence

$$a_k = a_{k-1} + 2, \quad k \geq 1$$

on a la formule simple et directe

$$a_k = 2k + 1, \quad k \geq 0.$$

Une telle expression n'est pas toujours aussi facile à trouver...

- En 1202 Leonardo Pisano (« Léonard de Pise ») plus connu sous le nom de **Leonardo Fibonacci** proposa le problème suivant :

Partant d'un couple, combien de couples de lapins obtiendrons-nous après un nombre donné de mois sachant que chaque couple produit chaque mois un nouveau couple, lequel ne devient productif qu'après deux mois ?

- Si on note a_k le nombre de couples de lapins en âge de se reproduire présents pendant le mois k , la solution du problème précédent vérifie l'équation de récurrence

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2}, \quad k \geq 2.$$

- La **suite de Fibonacci** est la solution de cette récurrence associées aux valeurs initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.
- Les premiers termes de cette suite sont $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$.



Leonardo Fibonacci
(v. 1175 - v. 1250)

La suite de Fibonacci (suite)

- On montre que le terme général a_k de la suite de Fibonacci est

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k, \quad k \geq 0.$$

- Le nombre $(1 + \sqrt{5})/2$ est appelé le **nombre d'or** et est noté Φ :

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1,618033989$$

- **ESQUISSE DE RÉOLUTION.** On cherche des solutions de la forme $a_k = r^k$. En substituant dans l'équation de récurrence, le nombre r doit vérifier, pour tout $k \geq 2$, $r^k = r^{k-1} + r^{k-2}$ ou encore $r^2 = r + 1$ (il s'agit du **équation caractéristique** de l'équation récurrence). Les deux racines de ce polynôme sont $r_1 = (1 + \sqrt{5})/2 = \Phi$ et $r_2 = (1 - \sqrt{5})/2 = -1/\Phi$. La solution générale de l'équation est alors $a_k = C_1(r_1)^k + C_2(r_2)^k$, $k \geq 0$, où C_1 et C_2 sont deux constantes dont les valeurs sont calculées grâce aux conditions initiales de la suite de Fibonacci.

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- La limite d'une suite de nombres réels est définie de manière similaire à celle d'une fonction réelle d'une variable réelle.

Ainsi, **la suite** $(a_k, k \in \mathbb{N})$ **admet le nombre réel l comme limite** si, pour n'importe quel intervalle contenant l , tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un indice suffisamment grand.

- Si la suite $(a_k, k \in \mathbb{N})$ admet l comme limite, on dit qu'**elle converge vers l** et on note $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = l$.

- EXEMPLE. La suite de terme général $a_k = \frac{k}{k+1}$ converge vers 1 :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{k+1} = 1.$$

En revanche, la suite de terme général $b_k = (-1)^k$ ne converge pas (on dit qu'elle **diverge**) et $\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k$ n'existe pas.

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

Une **suite arithmétique** est une suite où la **différence entre deux termes consécutifs est constante**.

La différence commune r (entre deux termes consécutifs) est appelée la **raison** de la suite.

- Le terme général d'une suite arithmétique est donné par la formule directe

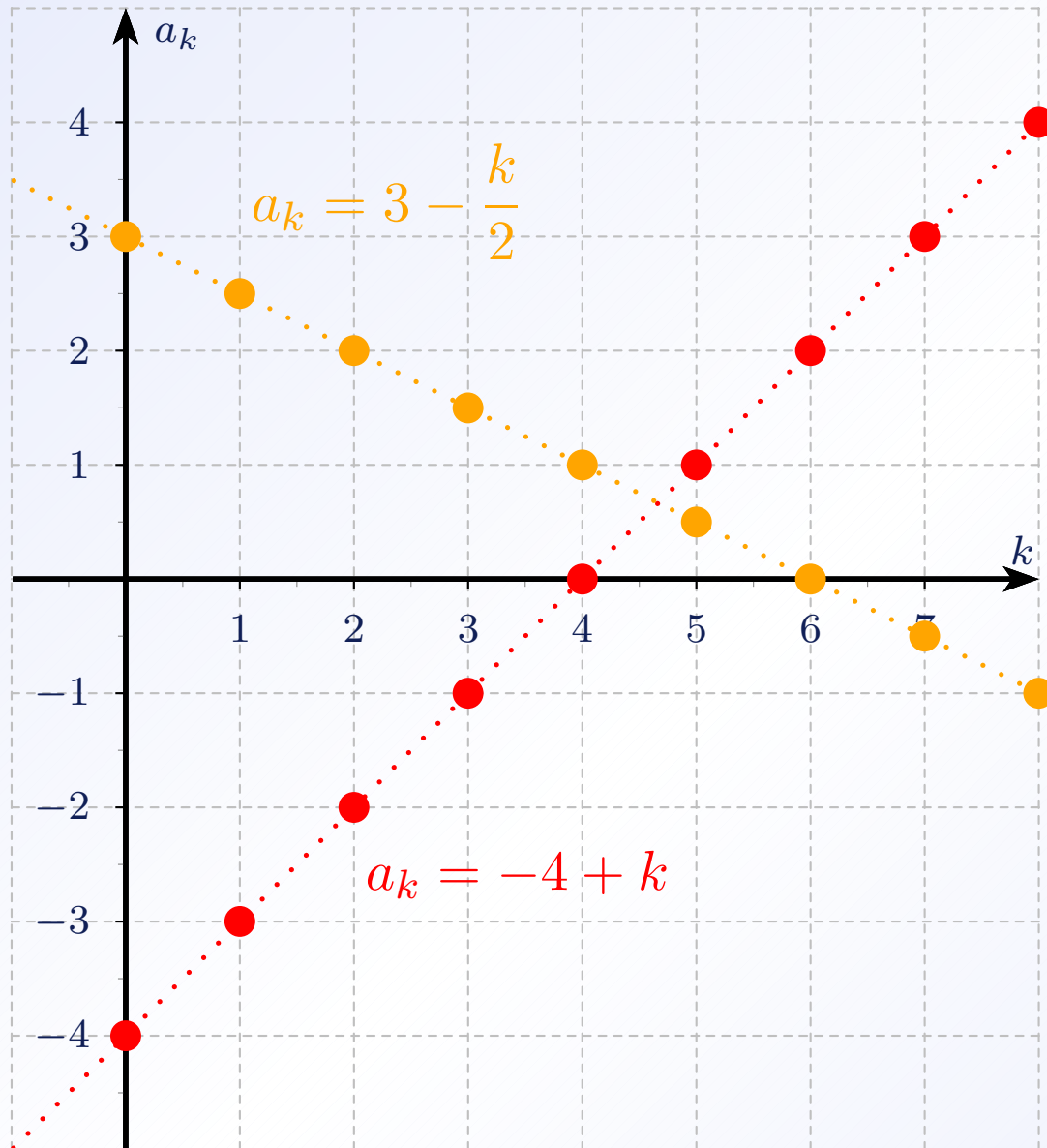
$$a_k = a_0 + k \cdot r, \quad k = 0, 1, \dots$$

ou par la définition récurrente

$$\begin{cases} a_k = a_{k-1} + r, & k \geq 1 \\ a_0 \in \mathbb{R} \text{ donné} \end{cases}$$

- **EXEMPLE.** Les suites $(2, 5, 8, 11, 14, \dots)$ et $(-2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots)$ sont des suites arithmétiques de raisons respectives 3 et 2.

Représentation graphique



- Une suite arithmétique correspond à l'échantillonnage d'une fonction affine.
- La raison de la suite est égale à la pente de la droite correspondant au graphe représentatif de cette fonction.
 - Si la raison est positive, la suite est croissante.
 - Si la raison est négative, la suite est décroissante.
 - Si la raison est nulle, la suite est constante.

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

Une **suite géométrique** est une suite où le **rapport entre deux termes consécutifs est constant**.

Le rapport commun r (entre deux termes consécutifs) est appelée la **raison** de la suite.

- Le terme général d'une suite géométrique est donné par la formule directe

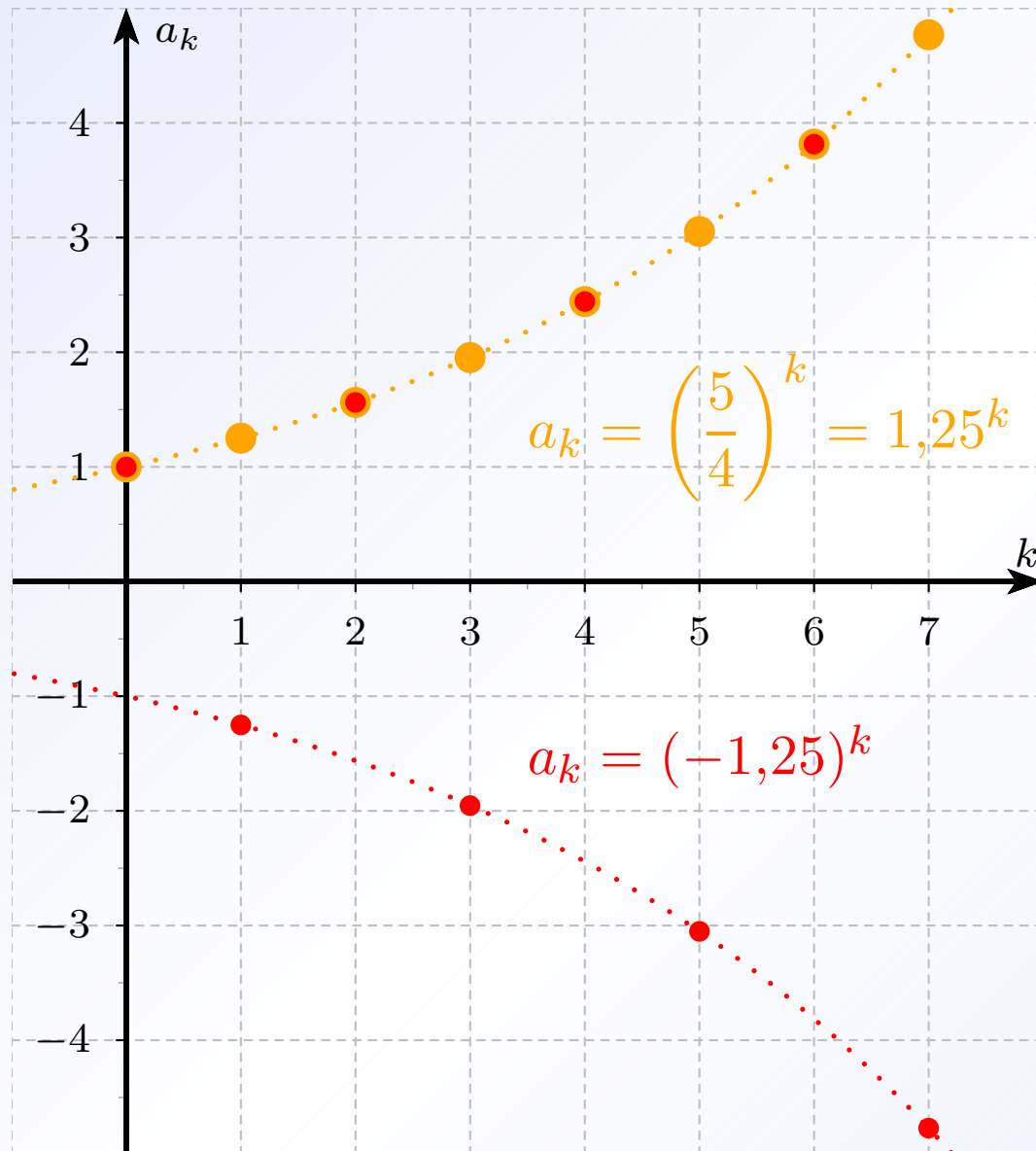
$$a_k = a_0 \cdot r^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

ou par la définition récurrente

$$\begin{cases} a_k = r \cdot a_{k-1}, & k \geq 1 \\ a_0 \in \mathbb{R} \text{ donné} \end{cases}$$

- EXEMPLE. La suite $(1, -2, 4, -8, 16, -32, \dots)$ est une suite géométrique de raison -2 alors que $(3, 3/10, 3/100, 3/1000, \dots)$ est une suite géométrique de raison $1/10$.

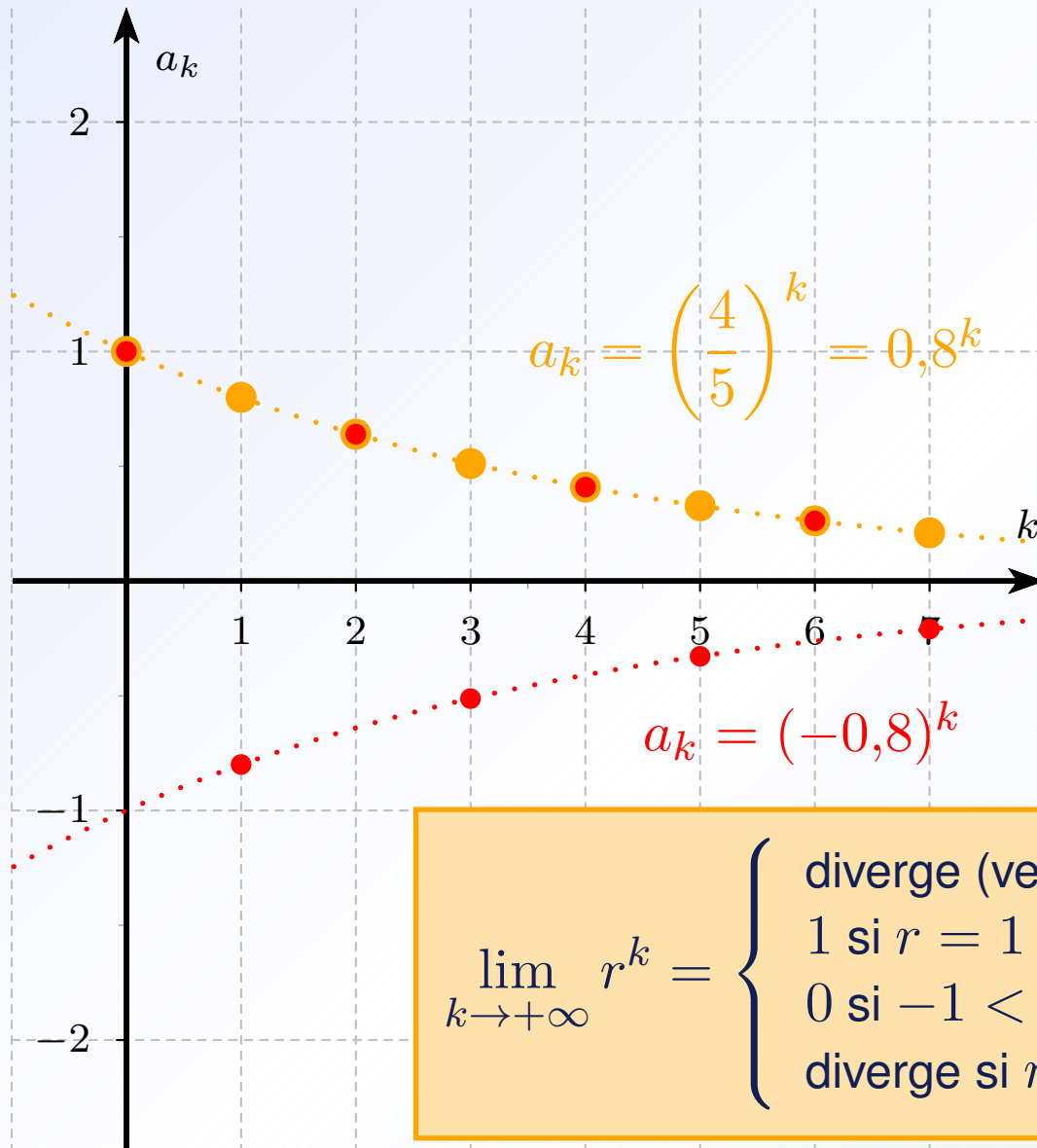
Limite d'une suite géométrique



Soit $(a_k = r^k, k \geq 0)$ une suite géométrique de raison r (et de terme initial égal à 1).

- Si $r > 1$, la suite est croissante et diverge vers $+\infty$.
- Si $r < -1$, la suite est alternée et ne converge pas (elle diverge en valeur absolue vers $+\infty$).
- Si $r = 1$, la suite est constante et, évidemment, convergente.
- Si $r = -1$, les termes de la suite alternent entre 1 et -1 et la suite ne converge pas.

Limite d'une suite géométrique (2)



- Si $0 < r < 1$, la suite est monotone et converge vers 0.
- Si $-1 < r < 0$, la suite est alternée et converge vers 0.
- Si $r = 0$, tous les termes de la suite sont nuls et la suite converge, évidemment, vers 0.

En résumé

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} r^k = \begin{cases} \text{diverge (vers } +\infty) \text{ si } r > 1 \\ 1 \text{ si } r = 1 \\ 0 \text{ si } -1 < r < 1, \text{ autrement dit si } |r| < 1 \\ \text{diverge si } r \leq -1 \end{cases}$$

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

**Limite d'une suite
géométrique (2)**

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- On peut combiner dans la définition récurrente d'une suite
 - ▶ une composante arithmétique en ajoutant une constante c lors du passage d'un terme au suivant ;
 - ▶ une composante géométrique en multipliant par une constante r lors du passage d'un terme au suivant.
- On définit alors une **suite arithmético-géométrique** régie par la récurrence

$$\begin{cases} a_k = r \cdot a_{k-1} + c, & k \geq 1 \\ a_0 \in \mathbb{R} \text{ donné} \end{cases}$$

- Le développement d'une formule directe pour le calcul des termes d'une suite arithmético-géométrique sera discuté en exercices.

Sommes et produits



1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : Σ

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- Le calcul de la somme des termes d'une suite est une opération très courante pour laquelle on utilise la notation abrégée

$$\sum_{k=1}^n a_k \stackrel{\text{def}}{=} a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

- Dans l'expression ci-dessus (parfois appelée **notation sigma**), la variable k est l'**indice de sommation** et le choix de la lettre k est **arbitraire** :

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{\text{indice}=1}^n a_{\text{indice}}.$$

- Pour la suite $(a_j, j = 1, \dots, 5)$ de terme général $a_j = j^2$ on a

$$\sum_{j=1}^5 a_j = \sum_{j=1}^5 j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55.$$

- Pour la suite de terme général $b_k = (-1)^k$ pour $k \geq 0$, on a

$$\sum_{k=0}^3 b_k = \sum_{k=0}^3 (-1)^k = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 = 1 + (-1) + 1 + (-1) = 0.$$

Plus généralement, pour $n \geq 0$, on a

$$\sum_{i=0}^n b_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- Plutôt que d'utiliser la **forme délimitée** où l'indice de sommation prend successivement toutes les valeurs entières entre la borne inférieure et la borne supérieure (bornes incluses), il est également possible (et parfois plus simple et efficace) de spécifier sous le signe $\sum$ l'ensemble des valeurs souhaitées pour l'indice de sommation (à l'aide d'une ou plusieurs conditions).
- Ainsi, la somme des n premiers termes de la suite $(a_k, k \geq 1)$ peut s'écrire, au choix,

$$\sum_{k=1}^n a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{1 \leq k \leq n} a_k .$$

- REMARQUE. La possibilité d'une telle construction est évidemment due à la commutativité et à l'associativité de l'addition.

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- Si, dans la forme délimitée, la borne inférieure est plus grande que la borne supérieure, la somme est « vide » et sa valeur est alors égale à 0, l'élément neutre de l'addition :

$$\sum_{k=n}^m a_k \stackrel{\text{def}}{=} 0 \quad \text{si } m < n.$$

- EXEMPLE. $\sum_{k=5}^2 a_k = 0$ quelle que soit la suite (a_k) .

- Plus généralement, si la condition définissant l'ensemble des valeurs possibles de l'indice de sommation est vide, la somme vaut 0 :

$$\sum_{k \in \emptyset} a_k \stackrel{\text{def}}{=} 0.$$

Décalage de l'indice de sommation

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- Une opération particulièrement utile et fréquente lors de la simplification d'expressions faisant intervenir des sommes consiste à **décaler l'indice de sommation**.

- Pour une suite $(a_k, k \geq 1)$ on a, par exemple,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}.$$

- Avec la forme généralisée de la notation, on a « simplement »

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k = \sum_{1 \leq k+1 \leq n} a_{k+1} = \sum_{0 \leq k \leq n-1} a_{k+1}.$$

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- La notation $\sum$ n'étant qu'un raccourci pour représenter l'addition de plusieurs nombres, elle possède les mêmes propriétés que l'addition usuelle, à savoir l'**associativité**, la **commutativité** et la **distributivité du produit par rapport à la somme**.

- Plus précisément, si K est un ensemble (fini) d'entiers, typiquement $\{1, 2, \dots, n\}$, les sommes sur les éléments de K peuvent être transformées à l'aide des deux règles simples :

1) Associativité et commutativité :

$$\sum_{k \in K} (a_k + b_k) = \sum_{k \in K} a_k + \sum_{k \in K} b_k .$$

2) Distributivité (du produit par rapport à la somme) :

$$\sum_{k \in K} c \cdot a_k = c \sum_{k \in K} a_k \quad \forall c \in \mathbb{R} .$$

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- Il est parfois nécessaire d'utiliser deux indices (voire plus) pour spécifier les termes apparaissant dans une somme. On note alors a_{ij} (ou $a_{i,j}$) le terme d'« indice » (i, j) .
- EXEMPLE. La table qui suit présente un extrait des notes obtenues lors des contrôles continus pour le cours MAD.

		Travail écrit n° j			
a_{ij}		1	2	3	4
Étudiant n° i	1	5.9	6.0	5.6	5.7
	2	4.2	3.7	3.6	4.1
	3	5.1	5.1	4.1	4.5
	4	2.7	3.6	3.3	1.6
	5	5.5	4.2	5.4	5.3

L'entrée en ligne i et colonne j est notée a_{ij} et correspond à la note de l'étudiant n° i lors du travail écrit n° j .

Pour calculer la somme de toutes ses notes (par exemple pour calculer la moyenne globale du contrôle continu) on est amené à effectuer une **double somme**.

Cette double somme T peut être calculée

■ en sommant les valeurs ligne par ligne (autrement dit étudiant par étudiant) :

$$\begin{aligned} T = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^4 a_{ij} &= \sum_{j=1}^4 a_{1,j} + \sum_{j=1}^4 a_{2,j} + \sum_{j=1}^4 a_{3,j} + \sum_{j=1}^4 a_{4,j} + \sum_{j=1}^4 a_{5,j} \\ &= 23.2 + 15.6 + 18.8 + 11.2 + 20.4 = 89.2 \end{aligned}$$

■ ou en sommant les valeurs colonne par colonne (autrement dit travail écrit par travail écrit) :

$$\begin{aligned} T = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^5 a_{ij} &= \sum_{i=1}^5 a_{i,1} + \sum_{i=1}^5 a_{i,2} + \sum_{i=1}^5 a_{i,3} + \sum_{i=1}^5 a_{i,4} \\ &= 23.4 + 22.6 + 22.0 + 21.2 = 89.2 \end{aligned}$$

Manipulation de sommes multiples

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- Si les ensembles de sommation sont finis et indépendants les uns des autres (les valeurs possibles pour un indice ne dépendent pas de la valeur d'un autre indice), on peut échanger l'ordre de sommation dans une somme multiple :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}.$$

- Comme illustré dans l'exemple précédent, cette propriété revient à dire que la somme de tous les éléments d'une table à deux entrées peut être établie ligne par ligne ou colonne par colonne.

Manipulation de sommes multiples (suite)

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- Lorsque les valeurs possibles pour l'indice de la somme intérieure dépendent de la valeur de l'indice de la somme extérieure, il n'est plus possible d'échanger sans autre l'ordre de sommation !

Dans de telles situations, le recours à la notation généralisée est souvent utile.

- EXEMPLE. Dans la table carrée ci-contre, la somme des éléments **sur et au-dessus de la diagonale** est, en effectuant le calcul ligne après ligne,

$i \backslash j$	1	2	3
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

$$S = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i}^3 a_{ij} = (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + (a_{22} + a_{23}) + (a_{33})$$

alors qu'en effectuant le calcul colonne après colonne, elle est égale à

$$S = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^j a_{ij} = (a_{11}) + (a_{12} + a_{22}) + (a_{13} + a_{23} + a_{33}).$$

Manipulation de sommes multiples (suite)

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

■ De manière plus générale, on a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij}.$$

■ En effet, pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$1 \leq i \leq j \leq n \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ i \leq j \leq n \end{cases}$$

mais également

$$1 \leq i \leq j \leq n \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq j \end{cases}$$

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- Il arrive parfois que l'on veuille sommer tous les produits des termes de deux suites afin de calculer une expression de la forme

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j.$$

- **EXEMPLE.** Pour les suites de termes généraux $a_i = i^2$ et $b_j = 1/j$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 a_i b_j &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 i^2 \cdot \frac{1}{j} = \sum_{i=1}^4 \left(i^2 + \frac{i^2}{2} + \frac{i^2}{3} \right) \\ &= \left(1^2 + \frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{3} \right) + \cdots + \left(4^2 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^2}{3} \right) \\ &= \frac{11}{6} + \frac{44}{6} + \frac{99}{6} + \frac{176}{6} = 55. \end{aligned}$$

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- En utilisant la distributivité on a aussi et plus simplement

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 i^2 \cdot \frac{1}{j} &= \sum_{i=1}^4 \left(i^2 \cdot \sum_{j=1}^3 \frac{1}{j} \right) = \left(\sum_{i=1}^4 i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^3 \frac{1}{j} \right) \\ &= \left(1 + 4 + 9 + 16 \right) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\ &= 30 \cdot \frac{11}{6} = 55.\end{aligned}$$

- De manière générale, pour deux ensembles finis d'entiers I et J , on a

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right)$$

car

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j = \sum_{i \in I} \left(a_i \sum_{j \in J} b_j \right) = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- De manière similaire à l'utilisation de la lettre sigma majuscule pour dénoter la somme de plusieurs termes, la lettre pi majuscule est utilisée pour représenter le produit de plusieurs termes :

$$\prod_{k=1}^n a_k \stackrel{\text{def}}{=} a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n.$$

- En plus de la forme délimitée ci-dessus, on peut également utiliser une notation généralisée :

$$\prod_{k=1}^5 2^k = \prod_{1 \leq k \leq 5} 2^k = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 = 2^{(1+2+3+4+5)} = 2^{15}.$$

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- Si l'ensemble des valeurs possibles pour l'indice du produit est **vide** (par exemple si la borne inférieure est plus grande que la borne supérieure) le produit vaut, par convention, 1 (l'élément neutre de la multiplication) :

$$\prod_{k \in \emptyset} a_k \stackrel{\text{def}}{=} 1.$$

- EXEMPLE.

$$\prod_{k=13}^4 a_k = 1$$

quelle que soit la suite (a_k) .

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- Le produit de nombres réels étant une opération **associative** et **commutative** on a, pour des ensembles finis I et J ,

$$\prod_{i \in I} (a_i \cdot b_i) = \left(\prod_{i \in I} a_i \right) \cdot \left(\prod_{i \in I} b_i \right)$$

et

$$\prod_{i \in I} \left(\prod_{j \in J} a_{ij} \right) = \prod_{j \in J} \left(\prod_{i \in I} a_{ij} \right).$$

- REMARQUE. La deuxième propriété revient à dire que le produit de tous les éléments d'une table à deux entrées peut être établie aussi bien ligne par ligne que colonne par colonne.

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

Si n est un entier positif, la **factorielle de n** , notée **$n!$** , est le **produit des entiers de 1 à n** :

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \prod_{k=1}^n k.$$

On complète la définition précédente en posant $0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

■ La fonction factorielle vérifie l'équation de récurrence

$$n! = (n - 1)! \cdot n, \quad n \geq 1$$

avec la valeur initiale $0! = 1$.

■ Formule de Stirling :

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n}\right) < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2}\right)$$

et, pour n grand, $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Séries



1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- Il est souvent utile de calculer la **somme** des termes d'une suite. On parle alors de **séries** et, pour la suite $(a_k, k = 1, \dots, n)$, la série associée est

$$S(n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

- **EXEMPLE.** Pour la suite de terme général $a_k = (-1)^k, k \geq 0$, on a la série

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} \\ &= 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

- Une **série arithmétique** est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$S(n) = a_0 + (a_0 + r) + (a_0 + 2r) + \dots + (a_0 + (n-1)r) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_0 + kr).$$

- RAPPEL. Le terme général d'une suite arithmétique est

$$a_k = a_0 + k \cdot r, \quad k = 0, 1, \dots$$

- On obtient facilement une expression pour $S(n)$ en écrivant

$$S(n) = a_0 + a_0 + r + a_0 + 2r + \dots + a_0 + (n-1)r$$

$$S(n) = a_0 + (n-1)r + a_0 + (n-2)r + a_0 + (n-3)r + \dots + a_0$$

$$2S(n) = 2a_0 + (n-1)r + 2a_0 + (n-1)r + 2a_0 + (n-1)r + \dots + 2a_0 + (n-1)r$$

■ Ainsi

$$2S(n) = n(2a_0 + (n-1)r)$$

et

$$S(n) = \frac{n}{2}(2a_0 + (n-1)r) = n \cdot a_0 + r \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

■ En utilisant la décomposition

$$2a_0 + (n-1)r = a_0 + (a_0 + (n-1)r) = a_0 + a_{n-1},$$

on obtient la formule, plus facile à mémoriser,

$$S(n) = n \cdot \frac{a_0 + a_{n-1}}{2} = n \cdot \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

- 1) Pour la suite arithmétique $(2, 5, 8, 11, 14, \dots)$, le terme initial est $a_0 = 2$ et la raison est $r = 3$. Pour calculer la somme de ses $n = 5$ premiers termes il nous faut la valeur du cinquième terme qui est $a_4 = a_0 + 4r = 2 + 4 \cdot 3 = 14$. On a alors

$$S(n) = n \frac{a_0 + a_{n-1}}{2} \quad \text{et, pour } n = 5, \quad S(5) = 5 \frac{a_0 + a_4}{2} = 5 \cdot \frac{2 + 14}{2} = 40.$$

En utilisant la première formule proposée, on a aussi

$$S(n) = na_0 + r \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{et, pour } n = 5, \quad S(5) = 5 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{5(5-1)}{2} = 10 + 3 \cdot 10 = 40.$$

- 2) La somme des 50 premiers nombres positifs impairs est

$$S(50) = \sum_{k=0}^{49} (2k+1) = 50 \cdot \frac{1+99}{2} = 2500.$$

Somme des n premiers entiers positifs : $S^{[1]}(n)$

- Pour $a_0 = 1$ et $r = 1$, la suite arithmétique associée est simplement la suite des entiers positifs et la somme des n premiers entiers positifs, notée $S^{[1]}(n)$, est

$$S^{[1]}(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- EXEMPLE. La somme des entiers compris entre 100 et 200 (bornes incluses) est

$$S = \sum_{k=100}^{200} k = 101 \cdot \frac{100 + 200}{2} = 101 \cdot 150 = 15\,150$$

mais on a aussi

$$S = \sum_{k=100}^{200} k = \left(\sum_{k=1}^{200} k \right) - \left(\sum_{k=1}^{99} k \right) = \frac{200 \cdot 201}{2} - \frac{99 \cdot 100}{2} = 15\,150.$$

Somme des n premiers entiers positifs (suite)

- On peut obtenir le résultat précédent de plusieurs manières. En particulier, on a

$$(k + 1)^2 - k^2 = (k^2 + 2k + 1) - k^2 = 2k + 1.$$

- En sommant l'identité précédente on obtient une série télescopique pour le membre de gauche

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left((k + 1)^2 - k^2 \right) &= \sum_{k=1}^n (k + 1)^2 - \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} k^2 - \sum_{k=1}^n k^2 = (n + 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

alors que le membre de droite se réduit à

$$\sum_{k=1}^n (2k + 1) = 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = 2S^{[1]}(n) + n.$$

Somme des n premiers entiers positifs (suite)

- Ainsi la somme $S^{[1]}(n)$ cherchée vérifie

$$2S^{[1]}(n) + n = (n + 1)^2 - 1$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} S^{[1]}(n) &= \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}((n + 1)^2 - 1 - n) \\ &= \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 1 - 1 - n) \\ &= \frac{1}{2}(n^2 + n) = \frac{n(n + 1)}{2}. \end{aligned}$$

- REMARQUE. Le développement précédent peut sembler bien compliqué mais a l'avantage de pouvoir être repris pour le calcul de la somme des carrés des n premiers entiers positifs, puis de celle de leurs cubes, etc.

- Une **série géométrique** est la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$S(n) = a_0 + (a_0 r) + (a_0 r^2) + \dots + (a_0 r^{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_0 r^k).$$

- RAPPEL. Le terme général d'une suite géométrique est

$$a_k = a_0 \cdot r^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

- Pour calculer $S(n)$, considérons $S(n) - rS(n)$:

$$\begin{aligned} (1 - r)S(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_0 r^k) - r \sum_{k=0}^{n-1} (a_0 r^k) = a_0 \left(\sum_{k=0}^{n-1} r^k - r \sum_{k=0}^{n-1} r^k \right) \\ &= a_0 \left(\sum_{k=0}^{n-1} r^k - \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \right) = a_0 \left(\sum_{k=0}^{n-1} r^k - \sum_{k=1}^n r^k \right) = a_0(1 - r^n). \end{aligned}$$

Ainsi $(1 - r)S(n) = a_0(1 - r^n)$.

Séries géométriques (suite)

- Si $r \neq 1$, on a donc

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_0 r^k = \frac{a_0(1 - r^n)}{1 - r} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

Si on développe le numérateur, on obtient $a_0(1 - r^n) = a_0 - a_n$ mais, **attention !**, a_n n'est pas le dernier terme sommé (qui est a_{n-1}) mais le suivant dans la suite géométrique. On a donc aussi

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{a_0 - a_n}{1 - r} = \frac{a_0 - r \cdot a_{n-1}}{1 - r} \\ &= \frac{\text{premier terme} - \text{raison} \times \text{dernier terme}}{1 - \text{raison}}. \end{aligned}$$

- Si $r = 1$, la suite est constante et $S(n) = na_0$.

- 1) Pour la suite géométrique $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots)$ de raison $r = 2$ et de terme initial $a_0 = 1$, on a

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{(1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^n - 1.$$

- 2) Pour la suite géométrique $(3, -6, 12, -24, 48, \dots)$ de raison $r = -2$ et de terme initial $a_0 = 3$, on a

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} 3(-2)^k = \frac{a_0(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{3(1 - (-2)^n)}{1 - (-2)} = 1 - (-2)^n.$$

Le terme général de cette suite étant $a_k = 3(-2)^k$, $k \geq 0$, on a aussi

$$S(n) = \frac{a_0 - a_n}{1 - r} = \frac{3 - 3(-2)^n}{1 - (-2)} = 1 - (-2)^n.$$

Séries géométriques infinies

- Si la raison r d'une suite géométrique vérifie $|r| < 1$ les termes de la suite tendent vers 0 lorsque k tend vers l'infini :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} a_0 r^k = a_0 \lim_{k \rightarrow +\infty} r^k = 0$$

et la série converge également lorsque le nombre de termes sommés tend vers l'infini :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_0 r^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a_0}{1 - r} = \frac{\text{terme initial}}{1 - \text{raison}}.$$

- EXEMPLE. Pour la suite géométrique $(1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots)$ on a

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - (1/2)^n}{1/2} = 2(1 - 1/2^n) \quad \text{et} \quad S(\infty) = \frac{1}{1 - 1/2} = 2.$$

Raisonnement par récurrence et preuve par induction



1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- Considérons la suite des impairs positifs

$$(1, 3, 5, 7, \dots) = (2k - 1, k \geq 1)$$

et la série associée $S(n) = \sum_{k=1}^n (2k - 1)$.

- On a

$$S(1) = 1 = 1^2$$

$$S(2) = 1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$S(3) = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

- Des observations précédentes, on est tenté de conclure que

$$S(n) = \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2, \quad \forall n \geq 1.$$

- La **preuve par induction** (ou **par récurrence**) est une approche extrêmement puissante pour démontrer certains résultats.
- En effet, de nombreux théorèmes affirment qu'une propriété ou une formule $P(n)$ est vraie pour tous les entiers positifs n (dans l'exemple précédent, la formule $P(n)$ est « la somme des n premiers impairs positifs est égale à n^2 »).

Afin d'établir, par induction, le bien-fondé d'une telle affirmation, **deux étapes sont nécessaires** :

- 1) **Pas initial** (aussi appelé **pas de base** ou **ancrage**) : On vérifie que la propriété est vraie lorsque $n = 1$.
- 2) **Pas d'induction** (aussi appelé **hérédité**) : Il s'agit de vérifier que si la propriété est vraie pour un entier $n \geq 1$ alors elle l'est encore pour l'entier $n + 1$.

Si on note m cet entier positif et arbitraire, on suppose donc la propriété vraie « au pas m » c.-à-d. pour cette valeur de n et uniquement celle-là (il s'agit de l'**hypothèse d'induction**) et on montre que, **sous cette hypothèse**, la propriété est encore vraie « au pas $m + 1$ ».

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

Montrons par induction que la formule

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$

est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

1) **Pas initial** : Pour $n = 1$ on a

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = \sum_{k=1}^1 (2k - 1) = 1 \quad \text{et} \quad n^2 = 1^2 = 1.$$

La formule est donc vraie pour $n = 1$.

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- 2) **Pas d'induction** : On fixe $m \geq 1$ et on suppose la formule vraie au pas m . C'est-à-dire, on suppose que la formule suivante est vraie (**pour le m choisi uniquement**) :

$$\sum_{k=1}^m (2k - 1) = m^2.$$

Il s'agit de l'**hypothèse d'induction**.

Sous cette hypothèse, on doit montrer que la formule est encore vraie au pas $m + 1$. Plus précisément, on doit vérifier l'égalité

$$\sum_{k=1}^{m+1} (2k - 1) = (m + 1)^2.$$

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

On a

$$\sum_{k=1}^{m+1} (2k - 1) = \sum_{k=1}^m (2k - 1) + (2(m + 1) - 1).$$

On utilise l'hypothèse d'induction pour remplacer la somme de droite par m^2 :

$$\sum_{k=1}^{m+1} (2k - 1) = m^2 + (2m + 1) = m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2.$$

Ceci termine le pas d'induction : si la formule est vraie au pas m alors elle l'est encore au pas $m + 1$.

On a montré que $P(1)$ est vraie et que, pour entier $m \geq 1$, si $P(m)$ est vraie alors $P(m + 1)$ l'est aussi. On peut donc conclure que la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

1. Les ensembles

2. Les relations

3. Les fonctions

4. Suites et séries

Suites

Suites récurrentes

Suites arithmétiques

Représentation
graphique

Suites géométriques

Limite d'une suite
géométrique

Limite d'une suite
géométrique (2)

Symbole somme : $\sum$

Symbole produit : $\prod$

Fonction factorielle

Séries

Séries arithmétiques

Séries géométriques

Preuve par induction

Induction forte

- Dans le schéma de base de la preuve par induction on démontre la validité de la propriété $P(m+1)$ en supposant uniquement celle de $P(m)$.
- Une approche tout aussi valide mais plus générale consiste à utiliser le schéma de preuve suivant :

- 1) **Pas initial** : On vérifie que la propriété $P(1)$ est vraie.
- 2) **Pas d'induction** : On suppose la propriété vraie jusqu'au pas m , c.-à-d. pour tout entier k avec $1 \leq k \leq m$ (**hypothèse d'induction forte**), et on montre qu'elle l'est encore au pas $m+1$:

$$P(k) \text{ vraie pour } 1 \leq k \leq m \implies P(m+1) \text{ vraie.}$$