
Examen 2020-2021

Nom:

Prénom:

Durée : 90 minutes

- La solution de chaque problème doit être présentée sur **une feuille différente**.
- Machines à calculer et téléphones sont interdits.
- Soignez votre rédaction et votre présentation. Ces éléments font également partie des critères d'évaluation de vos réponses.

Problème 1 (8 points)

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, sans oublier de simplifier le résultat.

a) $f(x) = \ln \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right)$

b) $g(t) = \frac{t}{1 - \sqrt{t}}$

Problème 2 (10 points)

Calculer, lorsqu'elle existe, la valeur de chaque limite.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x} - x}{x - \sqrt{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - e^x} + \frac{1}{x} \right)$

Problème 3 (8 points)

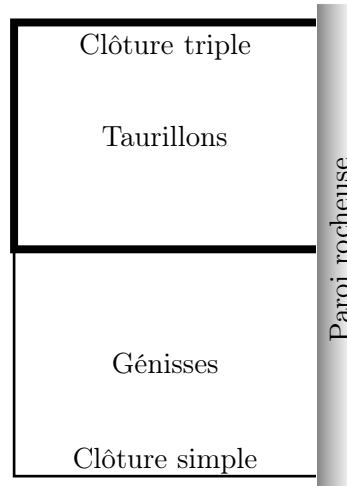
Soit f la fonction définie par $f(x) = ax + b + e^{-cx}$ où a , b et c sont des paramètres réels avec $c > 0$.

- a) Déterminer a , b et c pour que $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 4$.
- b) Quel est, dans ce cas, le polynôme de Taylor d'ordre 3 de f en $x_0 = 0$?

Problème 4 (10 points)

Un éleveur dispose de 1400 mètres de fils barbelés pour clôturer deux pâturages rectangulaires de même dimension. Les deux pâturages sont contigus et partagent donc un côté. De plus, à l'est, le champs retenu est bordé par une paroi rocheuse et il n'y a donc pas besoin de clôture de ce côté-là. L'un des pâturages doit accueillir des génisses et une clôture simple, utilisant un seul fil barbelé, est suffisante. L'autre pâturage accueillera des taurillons et une clôture utilisant trois fils barbelés est nécessaire (voir l'illustration ci-contre).

Déterminer les dimensions de chaque pâturage afin de maximiser leur surface. Justifier qu'il s'agit bien d'un maximum.

**Problème 5 (7 points)**

On considère la matrice

$$\mathbf{P} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Calculer $\mathbf{P}^T \mathbf{P}$.
- Donner l'inverse de la matrice $\mathbf{P}$.
- Déduire des points précédents toutes les solutions du système

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Problème 6 (7 points)

En utilisant l'algorithme de Gauss(-Jordan), déterminer l'ensemble S des solutions du système d'équations linéaires qui suit. Préciser les étapes intermédiaires de votre résolution et, en particulier, les opérations élémentaires appliquées.

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - 11x_4 = 2 \end{cases}$$