

Calcul matriciel : Opérations matricielles et propriétés Solutions pour la série 2

Exercice 1

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -6 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} & \text{d) } \mathbf{CA} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 7 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix} \\ \text{b) } \mathbf{A} - 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} & \text{e) } 2\mathbf{CB} = \begin{bmatrix} -12 & 10 & 26 \\ 8 & -8 & -18 \end{bmatrix} \\ \text{c) } \mathbf{C}(\mathbf{A} - 2\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 8 & -7 & -19 \\ -5 & 5 & 13 \end{bmatrix} & \text{f) } \mathbf{CA} - 2\mathbf{CB} = \mathbf{C}(\mathbf{A} - 2\mathbf{B}) \end{array}$$

Exercice 2

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} & \text{e) } \mathbf{M}_5 = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix} \\ \text{b) } \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} & \text{f) } \mathbf{M}_6 = \begin{bmatrix} -12 & 4 & -8 \\ 15 & -5 & 10 \\ 21 & -7 & 14 \end{bmatrix} \\ \text{c) } \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \end{bmatrix} & \text{g) } \mathbf{M}_7 = \begin{bmatrix} 2x^2 - 2xy + y^2 \end{bmatrix} \\ \text{d) } \mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & x_1 - x_3 & -(x_1 + x_2 + x_3) \end{bmatrix} & \text{h) } \mathbf{M}_8 = \begin{bmatrix} 2x^2 - 2xy + y^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exercice 3

- | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| a) 3×4 | c) non défini | e) 2×4 | g) 3×4 | i) 3×3 |
| b) 2×2 | d) 3×3 | f) non défini | h) non défini | j) non défini |

Exercice 4

$$\text{a) } \mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}, \quad n \geq 1 \quad \text{b) } \mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2n & 1 \end{bmatrix}, \quad n \geq 1$$

Exercice 5

- a) $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}$ quel que soit $n \geq 1$.

Toute matrice $\mathbf{A}$ (forcément carrée) vérifiant $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ (et par conséquent $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}$ pour tout entier $n \geq 1$) est appelée une **matrice idempotente**.

$$\text{b) } \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{bmatrix} \text{ puis } \mathbf{A}^n = \mathbf{0} \text{ pour tout entier } n \geq 3.$$

Tout matrice $\mathbf{A}$ (forcément carrée) dont les puissances s'annulent à partir d'une certaine valeur est appelée une **matrice nilpotente**. La plus petite valeur k pour laquelle $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ est parfois appelée le *degré* ou l'*indice de nilpotence* de $\mathbf{A}$.

Exercice 6

$$\text{a) } \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{BA} = \mathbf{0}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 7

$$\text{a) } \mathbf{AB} = \mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -1 & 2 \\ -5 & -11 & 2 & -3 \\ -2 & -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) La règle n'est plus vraie avec des matrices.
Il n'est donc pas possible, en général,
de simplifier par une matrice non nulle.

Exercice 8

Le produit matriciel n'étant pas commutatif on a, en général, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ et $\mathbf{AB} + \mathbf{BA} \neq 2\mathbf{AB}$.

Exercice 9

a) **FONCTION** ProduitMatriciel($A : m \times r, B : r \times n$)

Début

Allouer une matrice C de taille $m \times n$ et l'initialiser à zéro

Pour i de 1 à m **faire**

Pour j de 1 à n **faire**

Pour k de 1 à r **faire**

$C[i, j] \leftarrow C[i, j] + A[i, k] \cdot B[k, j]$

Fin Pour

Fin Pour

Fin Pour

Retourner C

Fin

b) Le calcul du produit matriciel $\mathbf{AB}$ avec $\mathbf{A} : m \times r$ et $\mathbf{B} : r \times n$ nécessite $m \cdot r \cdot n$ multiplications.
En particulier le produit de deux matrices carrées d'ordre n nécessite n^3 multiplications.

Exercice 10

Le calcul de $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ nécessite 36 000 multiplications alors que celui de $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ n'en demande que 14 000.

Exercice 11

On doit vérifier que $c_{ij} = 0$ si $1 \leq j < i \leq n$. Soit donc $i > j$, on a

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik}b_{kj}$$

Or, pour $1 \leq k \leq i-1$, $a_{ik} = 0$ car $\mathbf{A}$ est triangulaire supérieure. De même, pour $i \leq k \leq n$, $b_{kj} = 0$ car $k \geq i > j$ et $\mathbf{B}$ est triangulaire supérieure. Ainsi les deux sommes précédentes sont nulles (en fait chacun des termes sommés est nul car dans chaque produit $a_{ik}b_{kj}$ au moins un des deux facteurs est nul) et $c_{ij} = 0$ lorsque $i > j$ ce qui montre que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure.