

Systèmes d'équations linéaires

Solutions pour la série 5

Exercice 1

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 2

a) ▷ Les systèmes (1) et (4) sont linéaires.

▷ Le système (2) n'est pas linéaire à cause du produit $x_1 x_2$ dans la première équation.

▷ Le système (3) n'est pas linéaire car $\cos(\frac{\pi}{5}x_i)$ n'est pas linéaire, pas plus que $\sin(\frac{\pi}{5}x_i)$.

b) ▷ La matrice augmentée correspondant au système (1) est $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 7 \end{array} \right]$.

▷ La matrice augmentée correspondant au système (4) est $\left[\begin{array}{cc|c} \cos(\frac{\pi}{5}) & -\sin(\frac{\pi}{5}) & 5 \\ \sin(\frac{\pi}{5}) & \cos(\frac{\pi}{5}) & 3 \end{array} \right]$.

Exercice 3

Matrice	A	B	C	D	E	F
– échelonnée		✓	✓	✓		✓
– échelonnée réduite		✓	✓	✓		

Exercice 4

a) Le système d'équations linéaires associé à $\overline{\mathbf{A}}$ est

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 & + x_5 = 7 \\ & x_3 + 2x_5 = 0 \\ & x_4 + x_5 = -3. \end{cases}$$

b) Sous forme paramétrique, l'ensemble S des solutions du système précédent est

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, s_2, s_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 5

Les coefficients a , b et c définissant $q(x)$ sont solution du système

$$\begin{cases} a + b + c = -2 & (\iff q(1) = -2) \\ 4a + 2b + c = -3 & (\iff q(2) = -3) \\ 9a + 3b + c = 2 & (\iff q(3) = 2) \end{cases}$$

et la matrice augmentée associée est

$$\overline{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right].$$

Exercice 6

Soit $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, avec $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3$, le polynôme cherché. Sa dérivée est

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

alors que celles des fonctions $g(x)$ et $h(x)$ sont

$$g'(x) = 2(x + 2) = 2x + 4 \quad \text{et} \quad h'(x) = -(x - 2) = 2 - x.$$

Pour avoir un raccordement sans saut ni angle on doit avoir égalité entre les valeurs des fonctions aux abscisses des points de jonction mais également égalité de leurs dérivées en ces points (afin d'avoir les mêmes tangentes). Les coefficients $a_i, i = 0, 1, 2, 3$, doivent donc être solution du système linéaire

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 1 & (\iff p(-1) = g(-1) = 1) \\ a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 2 & (\iff p'(-1) = g'(-1) = 2) \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 & (\iff p(1) = h(1) = 0) \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 1. & (\iff p'(1) = h'(1) = 1) \end{cases}$$

La matrice augmentée associée est

$$\overline{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right].$$