

Algorithme de Gauss-Jordan

Solutions pour la série 6

Exercice 1

On échelonne et on réduit la matrice augmentée du système :

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 13 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ \end{array} \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \\ \end{array} \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Toutes les variables sont dépendantes, l'unique solution du système est donc : $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Exercice 2

Rappelons que les coefficients a , b et c définissant $q(x)$ sont solution du système

$$\begin{cases} a + b + c = -2 & (\iff q(1) = -2) \\ 4a + 2b + c = -3 & (\iff q(2) = -3) \\ 9a + 3b + c = 2 & (\iff q(3) = 2) \end{cases}$$

et que la matrice augmentée associée est

$$\overline{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right].$$

On échelonne et on réduit $\overline{\mathbf{A}}$ à l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -6 & -8 & 20 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ \end{array} \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & -6 & -8 & 20 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3/2L_3 \\ \\ \end{array} \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Les coefficients du polynôme $q(x)$ sont donc $a = 3$, $b = -10$ et $c = 5$.

Exercice 3

a) On échelonne et on réduit la matrice augmentée du système :

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array} \\
 & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \text{M.E.} \end{array} \\
 & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{M.E.R.}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions du système est

$$S = \left\{ \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^4 \mid \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{array} \right] + s \left[\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right], s \in \mathbb{R} \right\}.$$

- b) Oui. Cette solution est unique et s'obtient pour $s = 1$. Il s'agit de $\vec{x} = [1 \ 3 \ 1 \ 5]^T$.
- c) Oui. Il en existe même une infinité. Il s'agit de l'ensemble des solutions du système donné au point a).
- d) Non. Le point a) montre que dans toute solution, on a nécessairement $x_4 = 5$.
- e) Non. En effet, si $x_1 = 1$ on doit avoir $s = 1$, alors que si $x_3 = 2$ on doit avoir $s = 2$.

Exercice 4

On échelonne et on réduit la matrice augmentée du système :

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & p \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & p-1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right] L_2 \leftarrow -L_2 \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-p \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right] L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 3p-1 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

La dernière ligne de la matrice correspond à l'équation $0 = 3p - 1$ qu'il n'est possible de satisfaire que si $p = 1/3$. On continue donc avec $p = 1/3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

▷ Si $p = 1/3$, l'ensemble S des solutions du système est

$$S = \left\{ \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^3 \mid \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right] = \frac{1}{3} \left[\begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right] + s \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right], s \in \mathbb{R} \right\}$$

▷ Si $p \neq 1/3$ le système est inconsistant et $S = \emptyset$.

Exercice 5

a) On échelonne et on réduit la matrice augmentée du système :

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_2 \end{array} \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -5 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5 + 3L_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array} \quad (\text{mat. éch.}) \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{M.E.R.})
 \end{aligned}$$

L'ensemble S des solutions du système est

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 3 \\ 0 \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) L'ensemble S_0 des solutions du système homogène s'obtient en prenant le vecteur nul comme solution particulière :

$$S_0 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 6

Rappelons que si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ dénote le polynôme cherché, ses coefficients a_i , $i = 0, 1, 2, 3$, doivent vérifier

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 1 & (\iff p(-1) = g(-1) = 1) \\ a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 2 & (\iff p'(-1) = g'(-1) = 2) \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 & (\iff p(1) = h(1) = 0) \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 1 & (\iff p'(1) = h'(1) = 1) \end{cases}$$

On écheleonne et réduit la matrice augmentée associée à ce système :

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right] & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \end{array} \right] & L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5/4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \end{array} \right] & L_4 \leftarrow L_4 - 4L_3 \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right] & L_4 \leftarrow \frac{1}{4}L_4 \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_4 \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 9/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & \text{(matrice échelonnée réduite)}
\end{aligned}$$

La solution (unique) du système est

$$a_0 = \frac{3}{4}, \quad a_1 = -\frac{3}{2}, \quad a_2 = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad a_3 = 1$$

et le polynôme recherché est $p(x) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + x^3$.