

Algorithme de Gauss-Jordan

Solutions pour la série 7

Exercice 1

On échelonne et on réduit la matrice augmentée du système :

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -3 & -4 & -2 & -5 \\ -5 & 3 & 13 & 16 & 4 & 11 \\ 4 & -2 & -10 & -11 & -1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array} \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -3 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & -6 & -14 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 7 & 20 \end{array} \right] L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -3 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 7 & 20 \end{array} \right] L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -3 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -3 & 0 & 2 & 19 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right] L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right] \text{ (matrice échelonnée réduite) }
 \end{aligned}$$

L'ensemble S des solutions du système est donc

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \left| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 2

On échelonne et on réduit la matrice augmentée du système :

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 1 & p \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 & 7 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array} \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -5 & p-10 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -5 & -13 \end{array} \right] L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -5 & p-10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(p+3) \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Si $p + 3$ est non nul, c.-à-d. si $p \neq -3$, le système est inconsistant. On pose donc $p = -3$ et on passe à la phase de réduction :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 7 & 5 & 8 & 18 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{matrice échelonnée réduite}) \end{aligned}$$

Solution :

▷ Si $p = -3$, l'ensemble S des solutions du système est

$$S = \left\{ \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^5 \left| \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 18 \\ -13 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] + s_3 \left[\begin{array}{c} -7 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] + s_4 \left[\begin{array}{c} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] + s_5 \left[\begin{array}{c} -8 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right], s_3, s_4, s_5 \in \mathbb{R} \right. \right\}.$$

▷ Si $p \neq -3$ le système est inconsistant et son ensemble S de solutions est vide.

Exercice 3

a) On échelonne et on réduit la matrice augmentée $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow -L_3 \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \quad (\text{mat. éch. réd.}) \end{aligned}$$

On a obtenu l'identité à gauche, la partie droite est égale à l'inverse de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) On échelonne et on réduit la matrice augmentée $[\mathbf{B} \mid \mathbf{I}]$:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{B} \mid \mathbf{I}] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 15 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2 \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 & 1/6 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1/2} & \mathbf{-1/2} & \mathbf{1} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

On s'arrête, une ligne de zéros est apparue à gauche, la matrice $\mathbf{B}$ n'est pas inversible.

c) On échelonne et on réduit la matrice augmentée $[\mathbf{C} \mid \mathbf{I}]$:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{C} \mid \mathbf{I}] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] L_1 \leftarrow -L_1 \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3/2 & 1 \end{array} \right] L_3 \leftarrow -L_3 \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3/2 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 8 & 9/2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3/2 & -1 \end{array} \right] L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 5/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3/2 & -1 \end{array} \right] (\text{mat. éch. réd.})
\end{aligned}$$

On a obtenu l'identité à gauche, la partie droite est égale à l'inverse de $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 5/2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 3/2 & -1 \end{bmatrix}.$$

d) On écheleonne et on réduit la matrice augmentée $[\mathbf{D} \mid \mathbf{I}]$:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{D} \mid \mathbf{I}] &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad L_2 \leftarrow \frac{2}{3}L_2 \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 & 1/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow \frac{3}{4}L_3 \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/4 & 1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/4 & 1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 & 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1 \end{array} \right] \quad L_4 \leftarrow \frac{4}{5}L_4 \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/4 & 1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{4}L_4 \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & 4/5 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 \end{array} \right] \quad L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{3}L_3 \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/5 & 6/5 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & 4/5 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 \end{array} \right] \quad L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2 \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & 3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/5 & 6/5 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & 4/5 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 \end{array} \right] \quad (\text{mat. éch. red.})
\end{aligned}$$

On a obtenu l'identité à gauche, la partie droite est égale à l'inverse de $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exercice 4

a) Pour résoudre l'équation matricielle $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ on échelonne et réduit la matrice augmentée $[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}]$. Si une ligne de zéros apparaît à gauche avec des termes non nuls à droite, l'équation est inconsistante (et on peut arrêter l'algorithme dès son apparition) sinon on reconstruit la matrice $\mathbf{X}$ colonne par colonne à partir de la matrice échelonnée réduite.

b) (1) On échelonne et on réduit la matrice augmentée $[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}]$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \mid \mathbf{B}] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -10 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \end{array} \right] L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{mat. éch. red.}) \end{aligned}$$

Pour obtenir la première colonne $\vec{x}_1$ de $\mathbf{X}$ on masque la 4^e colonne de la matrice échelonnée réduite :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{et} \quad \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Pour obtenir la deuxième colonne $\vec{x}_2$ de $\mathbf{X}$ on masque la 3^e colonne de la matrice échelonnée réduite :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{et} \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

L'unique solution de l'équation matricielle $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ est donc

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}.$$

(2) On échebonne et on réduit la matrice augmentée $[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}]$:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}] &= \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right] \quad L_1 \leftarrow -L_1 \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 10 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 10 & 2 & 3 & 10 \end{array} \right] \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{10}L_2 \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1/5 & 3/10 & 1 \\ 0 & 10 & 2 & 3 & 10 \end{array} \right] \quad L_3 \leftarrow L_3 - 10L_2 \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -3 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1/5 & 3/10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2/5 & -1/10 & -1 \\ 0 & 1 & 1/5 & 3/10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{mat. éch. réd.})
\end{aligned}$$

Pour obtenir la première colonne $\vec{x}_1$ de $\mathbf{X}$ on masque la 5^e colonne de la matrice échelonnée réduite :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/5 & -1/10 \\ 0 & 1 & 1/5 & 3/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{et} \quad \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -1/10 \\ 3/10 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

Pour obtenir la deuxième colonne $\vec{x}_2$ de $\mathbf{X}$ on masque la 4^e colonne de la matrice échelonnée réduite :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/5 & -1 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{et} \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble S des solutions de l'équation matricielle est alors

$$S = \left\{ \mathbf{X} \in M_{3,2}(\mathbb{R}) \mid \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1/10 & -1 \\ 3/10 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & t \end{bmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(3) On échelonne et on réduit la matrice augmentée $[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}]$:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}] &= \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_2 \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{5/2} & \mathbf{2} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

On s'arrête, une ligne de zéros est apparue à gauche mais elle contient des éléments non nuls à droite. L'équation $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ n'admet aucune solution.