
Calcul différentiel : Approximations linéaires

Série 9

Exercice 1

Dans chaque cas, linéariser la fonction $f(x)$ autour du point x_0 donné.

- | | |
|---|--|
| a) $f(x) = x^3$ en $x_0 = 1$ | d) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{ x +1}\right)$ en $x_0 = 0$ |
| b) $f(x) = x^2 - 4$ en $x_0 = -2$ | e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ en $x_0 = 2$ |
| c) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{ x +1}\right)$ en $x_0 = -3$ | f) $f(x) = x^x$ en $x_0 = 1$ |

Exercice 2

Évaluer $\sqrt[3]{10}$ en utilisant une approximation linéaire de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (choisir un point de référence x_0 permettant d'effectuer les calculs sans machine). Comparer avec le résultat exact.

Exercice 3

Évaluer $\arctan(0,9)$ en utilisant une approximation linéaire de la fonction $f(x) = \arctan(x)$. Comparer avec le résultat exact.

Exercice 4

On souhaite déterminer une solution approchée de l'équation $\cos(x) = x$ ou, de manière équivalente, une solution approchée de l'équation $f(x) = 0$ avec la fonction $f(x) = \cos(x) - x$. Utiliser une approximation linéaire de $f(x)$ autour de $\pi/4$ pour établir une telle solution approchée.

Exercice 5

Déterminer une solution approchée de l'équation $\arctan(x) = 1/x$ en utilisant une approximation linéaire au voisinage de $x_0 = 1$.

_____ Solutions _____

Exercice 1

- | | |
|--|--|
| a) $x^3 \approx 3x - 2$ au voisinage de 1 | d) la fonction n'est pas différentiable en 0 |
| b) $x^2 - 4 \approx -4x - 8$ au voisinage de -2 | e) $\frac{1}{\sqrt{x+2}} \approx 5/8 - x/16$ au voisinage de 2 |
| c) $\ln\left(\frac{1}{ x +1}\right) \approx (x+3)/4 - \ln(4)$ au vois. de -3 | f) $x^x \approx x$ au voisinage de 1 |

Exercice 2

Pour $x_0 = 8$, on obtient l'approximation $\sqrt[3]{10} \approx 13/6 = 2,1\bar{6}$ à comparer à la valeur exacte $\sqrt[3]{10} = 2,1544\dots$

Exercice 3

Pour $x_0 = 1$, on obtient l'approximation $\arctan(0,9) \approx \frac{\pi}{4} - \frac{1}{20} = 0,7354\dots$ alors que la valeur exacte est $\arctan(0,9) = 0,7328\dots$

Exercice 4

On obtient la solution approchée $x = \frac{1+\pi/4}{1+\sqrt{2}} \approx 0,7395$ (la solution étant $0,739085\dots$).

Exercice 5

On obtient la solution approchée $x = \frac{10-\pi}{6} \approx 1,14307$ (la solution étant $1,16234\dots$).