

Mathématiques 1

Partie 2 : Calcul différentiel

Jean-François Hêche

Automne 2024

J.-F. HÊCHE, Mathématiques 1, 2024 – 1

Chapitre 1

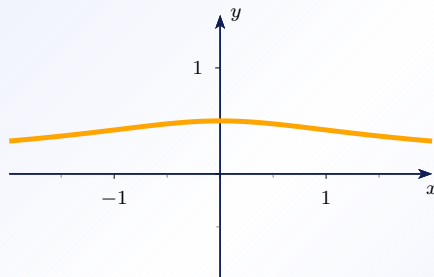
Limites et continuité

J.-F. HÊCHE, Mathématiques 1, 2024 – 2

Exemple introductif

- Considérons la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2}$.

Elle n'est pas définie en $x = 0$ mais si on observe les valeurs de f ainsi que son graphe représentatif au voisinage de $x = 0$



x	$f(x)$
-0,1	0,4987562
-0,01	0,4999875
-0,001	0,4999999
0,001	0,4999999
0,01	0,4999875
0,1	0,4987562

on constate que la fonction se comporte comme si sa valeur en $x = 0$ était égale à $1/2$.

J.-F. HÊCHE, Mathématiques 1, 2024 – 3

Limite de f au point x_0

- Soient $f(x)$ une fonction définie au voisinage de x_0 , mais pas forcément en x_0 , et L un nombre réel.
On dit que **la limite de la fonction $f(x)$ est égale à L lorsque x tend vers x_0** et on note

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

si les valeurs de $f(x)$ deviennent arbitrairement proches de L en prenant x suffisamment proche de x_0 mais différent de x_0 .

- Dit autrement, **la fonction $f(x)$ a pour limite le nombre L quand x tend vers x_0** si l'écart entre $f(x)$ et L finit toujours par être plus petit que n'importe quelle marge fixée, pourvu que x soit suffisamment proche de x_0 , mais non égal à x_0 .
- Mathématiquement cela s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

J.-F. HÊCHE, Mathématiques 1, 2024 – 4

Limite de f au point x_0 (2)

- La fonction $f(x)$ peut être définie en x_0 et sa limite lorsque x tend vers x_0 simplement égale à $f(x_0)$, la valeur de la fonction en x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Dans un tel cas, la fonction f est dite **continue en x_0** .

- Les fonction « classiques », c.-à-d. les fonctions polynomiales et rationnelles, les exponentielles et les logarithmes, les fonctions trigonométriques et leurs réciproques ainsi que les sommes, produits, quotients et composées de ces fonctions sont continues sur leur domaine définition (c.-à-d. qu'elles sont continues en tout point de leur domaine de définition). Dans de tels cas, calculer la limite de $f(x)$ en un point x_0 de son domaine de définition revient simplement à calculer la valeur $f(x_0)$ de la fonction en x_0 .

- EXEMPLES. On a simplement

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x}}{1 + \ln(x-1)} = \frac{\sqrt{4}}{1 + \ln(1)} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \tan(x) = \sqrt{3}.$$

Limite de f au point x_0 (3)

- La fonction $f(x)$ peut être définie en x_0 mais sa limite lorsque x tend vers x_0 est différente de $f(x_0)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq f(x_0).$$

- EXEMPLE. La fonction $f(x) = \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et on a

$$f(x) = \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ainsi si x_0 est entier

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \text{ alors que } f(x_0) = 0$$

et la fonction $f(x)$ est discontinue pour toute valeur entière de x .

En revanche si x_0 n'est pas entier, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 = f(x_0)$ est la fonction est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Limite de f au point x_0 (4)

- D'autres fois la fonction $f(x)$ n'est pas définie en x_0 mais admet une limite lorsque x tend vers x_0 .

- EXEMPLES.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)^2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1) - 1}{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}$$

Limites à gauche et à droite en x_0

- Dans la définition de la limite de $f(x)$ en x_0 on exigeait que, pour tout écart $\varepsilon > 0$ que l'on se fixe, la distance entre $f(x)$ et L (c.-à-d. $|f(x) - L|$) ne dépasse jamais ε dès que x est suffisamment proche de x_0 .

- La limite à gauche de $f(x)$ en x_0** (ou **la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 par la gauche**) est égale à L et on note

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = L$$

si les valeurs de $f(x)$ deviennent arbitrairement proches de L en prenant x suffisamment proche de x_0 mais strictement inférieur à x_0 .

- Mathématiquement cela s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < x_0 - x < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Limites à gauche et à droite en x_0 (2)

- De même, la limite à droite de $f(x)$ en x_0 (ou la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 par la droite) est égale à L et on note

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = L$$

si les valeurs de $f(x)$ deviennent arbitrairement proches de L en prenant x suffisamment proche de x_0 mais strictement supérieur à x_0 .

- EXEMPLE. Pour la fonction $f(x) = \frac{|x|}{x}$ on a

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = 1$$

- PROPRIÉTÉ.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = L \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = L$$

Fonction tendant vers $\pm\infty$ en x_0

- On dit que la fonction $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0 et on note

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

si la fonction $f(x)$ prend des valeurs arbitrairement grandes lorsque x est suffisamment proche de x_0 (mais différent de x_0) :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall \alpha > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > \alpha.$$

- On définit sur le même modèle une fonction $f(x)$ qui tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers x_0 et on note alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

- Les définitions précédentes s'adaptent également directement au cas des limites unilatérales (à gauche ou à droite).

Exemples et remarque

- EXEMPLES.

- La fonction rationnelle $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ possède un pôle double en $x = 1$ et on a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

- La fonction rationnelle $f(x) = \frac{x}{x+1}$ possède un pôle simple en $x = -1$ et on a

$$\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x}{x+1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x}{x+1} = -\infty \quad \text{mais} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1} \text{ n'existe pas.}$$

- REMARQUE. La notation $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ et ses formes apparentées sont des facilités d'écriture. Cela ne signifie en aucun cas que la limite de la fonction $f(x)$ existe au point x_0 . Ni que les valeurs de $f(x)$ convergent lorsque x tend vers x_0 mais bien que ces valeurs divergent vers $+\infty$ en x_0 car elles sont toutes arbitrairement grandes dès que x est suffisamment proche de x_0 .

Propriétés algébriques des limites

- Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions définies au voisinage de x_0 , mais pas forcément en x_0 , telles que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2.$$

Alors

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \lambda f(x) = \lambda L_1$, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = L_1 L_2$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$

- Les propriétés précédentes s'appliquent aussi lors du calcul de limites unilatérales.

Théorème des gendarmes

- Soient f , g et h des fonctions définies au voisinage de x_0 , mais pas forcément en x_0 , telles que

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

pour tout x dans un voisinage de x_0 (mais avec $x \neq x_0$). Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L.$$

- Le résultat précédent s'applique aussi lors du calcul de limites unilatérales.
- EXEMPLE. Quel que soit $x \neq 0$ on a

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \quad \text{et} \quad -|x| \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, le thm. des gendarmes permet de conclure que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

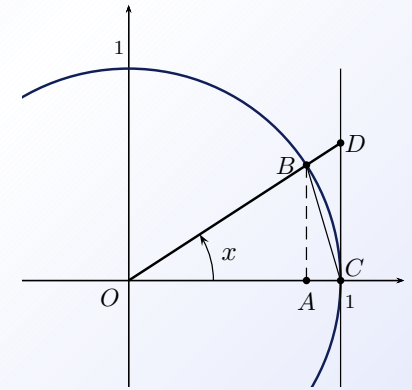
Limite de $\sin(x)/x$ en 0

- Le théorème des gendarmes permet d'établir la limite classique

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

- Considérons la figure ci-contre, pour $x \in]0, \pi/2[$ on a

- l'aire du triangle OBC est $\frac{\sin(x)}{2}$,
- celle du secteur OBC est $\frac{x}{2}$,
- celle du triangle OCD est $\frac{\tan(x)}{2}$.



Limite de $\sin(x)/x$ en 0 (2)

- Les trois aires précédentes vérifient

$$\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2}.$$

- De la première inégalité on obtient

$$\frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

alors que de la seconde on obtient

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x}.$$

- Pour $x \in]0, \pi/2[$ on a donc

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

et comme $\lim_{x \rightarrow 0+} \cos(x) = 1$ on peut conclure que

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Limite de $\sin(x)/x$ en 0 (3)

- Si x est négatif un développement similaire permet de montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

- APPLICATIONS.

- Pour le calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan(x)}{2x}$ on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

- Pour le calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(2x)}$ on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(2x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin(2x)} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin(t)} = \frac{1}{2}.$$

Calculs avec $\pm\infty$ et formes indéterminées

Moyennant certaines précautions, on peut "faire des calculs" avec des limites tendant vers $\pm\infty$

■ Addition ($l \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} (+\infty) + (+\infty) &= +\infty & (+\infty) + l &= +\infty \\ (-\infty) + (-\infty) &= -\infty & (-\infty) + l &= -\infty \end{aligned}$$

■ Multiplication/division ($l \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} (+\infty) \cdot (+\infty) &= +\infty & (+\infty) \cdot l &= \begin{cases} +\infty & \text{si } l > 0 \\ -\infty & \text{si } l < 0 \end{cases} \\ (-\infty) \cdot (-\infty) &= +\infty & (-\infty) \cdot l &= \begin{cases} -\infty & \text{si } l > 0 \\ +\infty & \text{si } l < 0 \end{cases} \\ (+\infty) \cdot (-\infty) &= -\infty & \frac{l}{+\infty} &= \frac{l}{-\infty} = 0 \\ \frac{+\infty}{0_+} &= \frac{-\infty}{0_-} = +\infty & \frac{+\infty}{0_-} &= \frac{-\infty}{0_+} = -\infty \end{aligned}$$

■ Les formes suivantes sont, en revanche, **indéterminées**, toute valeur étant alors possible.

$$+\infty - \infty \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 0 \cdot (\pm\infty)$$

J.-F. HÉCHE, Mathématiques 1, 2024 – 17

Lever une indétermination

■ Pour lever une indétermination lors du calcul d'une limite un petit nombre de techniques reviennent régulièrement.

- ▶ Appliquer des manipulations algébriques (réduction au même dénominateur, mise en évidence, factorisation, utilisation d'identités remarquables, changement de variable, ...) afin de simplifier des facteurs communs entre le numérateur et le dénominateur d'une forme indéterminée de type $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.
- ▶ Amplifier par le conjugué algébrique afin d'utiliser l'identité $(a-b)(a+b) = (a^2-b^2)$ face à une indétermination du type $\infty - \infty$.
- ▶ Réécrire l'expression à étudier afin de faire apparaître des limites connues telles que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
- ▶ Utiliser les propriétés algébriques des limites ou le théorème d'encadrement.

■ Nous verrons plus tard dans le cours des techniques plus générales basées sur les dérivées (règle de Bernoulli-L'Hôpital, développements limités) applicables à des situations difficiles à gérer avec les outils actuellement disponibles.

J.-F. HÉCHE, Mathématiques 1, 2024 – 18

Exemples

■ La limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{1 - x^2}$ est de la forme $\frac{0}{0}$. On factorise et simplifie pour obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{1 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x+1)(x-1)}{(1+x)(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{(3x+1)(x-1)}{(1+x)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{3x+1}{1+x} = -\frac{3+1}{1+1} = -2 \end{aligned}$$

■ La limite $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2}}{4x - 1}$ est de la forme $\frac{0}{0}$. On amplifie par $(\sqrt{x} + \frac{1}{2})$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2}}{4x - 1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2}}{4x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{2}}{\sqrt{x} + \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{x - \frac{1}{4}}{4(x - \frac{1}{4})(\sqrt{x} + \frac{1}{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{1}{4\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

J.-F. HÉCHE, Mathématiques 1, 2024 – 19

Exemples (2)

■ La limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}}{x}$ est de la forme $\frac{0}{0}$. En utilisant l'identité

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{avec } a = \sqrt[3]{x+1} \text{ et } b = \sqrt[3]{x-1}$$

on obtient

$$(x+1) + (x-1) = (\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}) \left((\sqrt[3]{x+1})^2 - \sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x-1} + (\sqrt[3]{x-1})^2 \right)$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x \left((\sqrt[3]{x+1})^2 - \sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x-1} + (\sqrt[3]{x-1})^2 \right)} \\ &= \frac{2}{1^2 - (-1) + (-1)^2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

J.-F. HÉCHE, Mathématiques 1, 2024 – 20

Exemples (3)

- La limite $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t-2}{\sin(\pi t)}$ est de la forme $\frac{0}{0}$. En posant $u = t - 2$ (et donc $t = u + 2$) on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t-2}{\sin(\pi t)} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin(\pi(u+2))} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin(\pi u + 2\pi)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin(\pi u)} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi u}{\sin(\pi u)} = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

- Pour la limite $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{\lceil x \rceil} \right)$, on remarque premièrement que $\lceil x \rceil = 1$ pour $x \in]0, 1]$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{\lceil x \rceil} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{1} \right) = \frac{3}{0+} - 1 = +\infty - 1 = +\infty$$

Limite de f lorsque x tend vers $\pm\infty$

- Soient $f(x)$ une fonction définie vers $+\infty$, c.-à-d. dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme $]a, +\infty[$, et L un nombre réel.

On dit que **la limite de la fonction $f(x)$ est égale à L lorsque x tend vers $+\infty$** et on note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

si les valeurs de $f(x)$ deviennent arbitrairement proches de L lorsque x prend des valeurs suffisamment grandes, autrement dit si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } x > \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

- Si $f(x)$ est définie vers $-\infty$, on définit de manière similaire **la limite de la fonction $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$** , notée

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Exemples

- Pour calculer la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 3x + 1}{1 - 3x^2}$ de la forme $\frac{+\infty}{-\infty}$ on met en évidence x^2 au numérateur et au dénominateur.

On obtient alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 3x + 1}{1 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(\frac{1}{x^2} - 3 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - 3} = -\frac{4}{3}$$

- L'approche précédente se généralise à toutes les fonctions rationnelles $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$.

On retrouve ainsi des résultats déjà énoncés.

- Si $\text{degre}(n(x)) < \text{degre}(d(x))$ la limite de $f(x)$ est égale à 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$.
- Si $\text{degre}(n(x)) = \text{degre}(d(x))$ la limite de $f(x)$ est égale au quotient des coefficients dominants de $n(x)$ et $d(x)$ lorsque x tend vers $\pm\infty$.
- Si $\text{degre}(n(x)) > \text{degre}(d(x))$ la limite de $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque x tend vers $\pm\infty$.

Exemples (2)

- Les mises en évidence sont aussi utiles pour des fractions non rationnelles :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2 + x - 4}}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(5 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} \right)}}{x \left(2 - \frac{3}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{5 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}}}{x \left(2 - \frac{3}{x} \right)} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

- Mais attention : $\sqrt{x^2} = |x|$. Pour x négatif on a donc $\sqrt{x^2} = -x$ et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5x^2 + x - 4}}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(5 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} \right)}}{x \left(2 - \frac{3}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{5 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}}}{x \left(2 - \frac{3}{x} \right)} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

- On a simplement $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} + x) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$. Mais

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} + x) \cdot \frac{(\sqrt{x^2 - 3x} - x)}{(\sqrt{x^2 - 3x} - x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x - x^2}{|x| \sqrt{1 - \frac{3}{x}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{-x \left(\sqrt{1 - \frac{3}{x}} + 1 \right)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

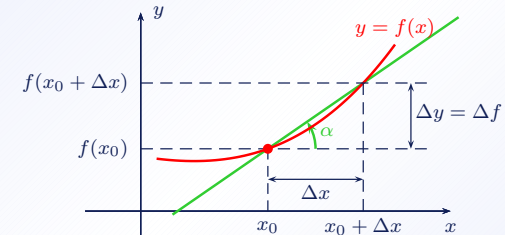
Chapitre 2

Fonction dérivée et règles de dérivation



Taux de variation

- On considère une fonction $y = f(x)$ définie au voisinage de x_0 et un accroissement Δx de la variable x . La variation Δf de f en x_0 est $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.



- Le **taux de variation** de f entre x_0 et $x_0 + \Delta x$ est

$$\left. \frac{\Delta f}{\Delta x} \right|_{x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \tan(\alpha)$$

et est égal à la pente de la droite sécante passant par les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.

Dérivée de f au point x_0

- La **dérivée de f en x_0** , notée $f'(x_0)$, est égale à la limite, si elle existe, du taux de variation de f entre x_0 et $x_0 + \Delta x$ lorsque Δx tend vers 0 :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left. \frac{\Delta f}{\Delta x} \right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Si la dérivée de f existe en x_0 , la fonction est dite **dérivable** ou **différentiable** en x_0 .

- Notations équivalentes :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

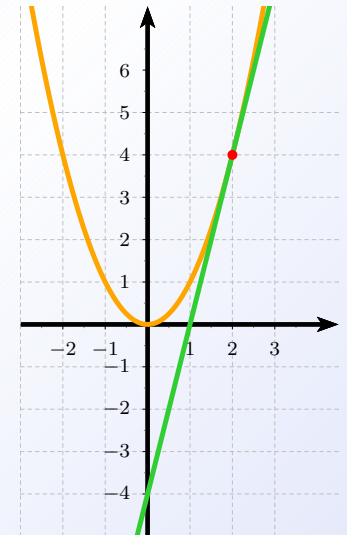
Dérivée en un point x_0 : Exemple

- Soit la fonction $y = f(x) = x^2$, sa dérivée en $x_0 = 2$ est

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x - 2)(2 + \Delta x + 2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4 + \Delta x)}{\Delta x} = 4 \end{aligned}$$

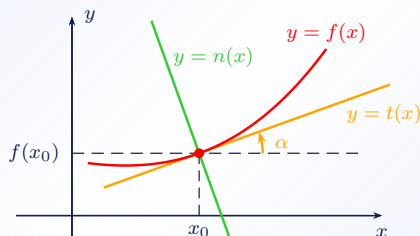
- L'équation de la tangente t au point $(x_0, f(x_0)) = (2, 4)$ du graphe représentatif de $f(x) = x^2$ est

$$t(x) = f(2) + f'(2)(x - 2) = 4 + 4(x - 2) = 4x - 4$$



Équation de la tangente et de la normale en x_0

- La dérivée $f'(x_0)$ est égale au taux de variation instantané de f en x_0 . Elle correspond à la pente de la **tangente** au graphe représentatif de la fonction f au point $(x_0, f(x_0))$.



- L'équation de la tangente t au graphe de f en x_0 est

$$y = t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

et celle de la normale n est

$$y = n(x) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (\text{si } f'(x_0) \neq 0).$$

Fonction dérivée

- Si la fonction f est définie sur un intervalle ouvert I et si elle est dérivable en tout point de I on peut définir la fonction f' :

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

appelée la **fonction dérivée** ou simplement la **dérivée** de f .

- Il existe plusieurs notations pour la dérivée d'une fonction $y = f(x)$. Les plus courantes sont

► La notation de Lagrange : y' ou $f'(x)$

► La notation de Leibniz : $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{df}{dx}$ ou $\frac{d}{dx}f$

► La notation de Newton : $\dot{y}$ ou $\dot{f}$, réservée aux fonctions du temps $y = f(t)$

Fonction dérivée : Exemples

- La dérivée de la fonction carrée $y = f(x) = x^2$ est

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)(x+h+x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x \end{aligned}$$

- La dérivée de la fonction $y = f(x) = 1/x = x^{-1}$ est

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2} \end{aligned}$$

Fonction dérivée : Exemples (2)

- La dérivée de la fonction racine carrée $y = f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ est

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

- On montre que le schéma observé est valable pour n'importe quelle puissance : **La dérivée de la fonction $f(x) = x^n$ est**

$$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$$

Ce résultat n'a de sens que si la puissance est définie. En particulier si n n'est pas entier on doit avoir (sauf exceptions) $x > 0$ et si n est un entier négatif on doit avoir $x \neq 0$.

Règles de dérivation

Soient f et g deux fonctions différentiables.

- La dérivation est une opération **linéaire** :

$$[\lambda \cdot f(x)]' = \lambda \cdot f'(x) \quad \text{quel que soit } \lambda \in \mathbb{R}$$

et

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

- Dérivée d'un produit

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- Dérivée d'un quotient

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad \text{si } g(x) \neq 0$$

Linéarité de la dérivation

- La dérivation est une opération **linéaire** :

- Si on multiplie une fonction par une constante sa dérivée est multipliée par cette constante.
- La dérivée de la somme (ou de la différence) de deux fonctions est égale à la somme (ou la différence) de leurs dérivées.

- EXEMPLES.

- La dérivée de x^3 est $3x^2$ et celle de $5x^3$ est $5 \cdot (x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$.
- La dérivée de $\sqrt[5]{x^2}$ est $\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$ et celle de $-5\sqrt[5]{x^2}$ est $-\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}$.
- La dérivée de $f(x) = ax^2 + bx + c$ est $f'(x) = (ax^2)' + (bx)' + (c)' = 2ax + b$.
- La dérivée de $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} - 4x$ est $f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)' - (4x)' = \frac{1}{4\sqrt{x}} - 4$.

Règle de dérivation d'un produit : Démonstration

- Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions dérivables. La dérivée de leur produit est

$$\begin{aligned} [f(x) \cdot g(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Fonction dérivée : Exemples (3)

- Pour une fonction $f(x)$ quelconque (mais définie et dérivable) la dérivée de son carré est

$$\begin{aligned} [(f(x))^2]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h))^2 - (f(x))^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + f(x))(f(x+h) - f(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) + f(x)) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2f(x) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

- Le résultat précédent se généralise aux puissances réelles d'une fonction quelconque (du moment que cette puissance est bien définie et dérivable) :

$$[(f(x))^n]' = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

- EXEMPLE. La dérivée de $f(x) = (3x^2 + 4x - 5)^4$ est

$$f'(x) = 4(3x^2 + 4x - 5)^{4-1} \cdot (3x^2 + 4x - 5)' = 4(3x^2 + 4x - 5)^3(6x + 4)$$

Quelques dérivées de base

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
ax	a
x^2	$2x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$(f(x))^n$	$n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$

quelque soit $c \in \mathbb{R}$

quelque soit $a \in \mathbb{R}$

$x > 0$

$(x > 0 \text{ si } n \notin \mathbb{Z})$

$(f(x) > 0 \text{ si } n \notin \mathbb{Z})$

Dérivées à gauche et à droite

- Si une fonction f est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0 .
- La réciproque n'est pas toujours vraie !
- Comme pour les limites et la continuité, on peut définir une dérivée à gauche en x_0 :

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

et une dérivée à droite en x_0 :

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si ces deux dérivées sont égales et on a alors

$$f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0).$$

Exemples

- La fonction valeur absolue est définie et continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas différentiable en $x_0 = 0$. Elle possède cependant une dérivée à gauche en $x_0 = 0$ égale à -1 et une dérivée à droite en $x_0 = 0$ égale à 1 .
- La fonction partie entière inférieure est définie sur $\mathbb{R}$ mais est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$. En tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ la fonction est continue et dérivable et sa dérivée est nulle (la fonction est constante entre deux entiers).

Pour x_0 entier on a $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \lfloor x \rfloor = x_0 - 1 \neq \lfloor x_0 \rfloor = x_0$ (la fonction n'est pas continue à gauche en x_0) et

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{\lfloor x \rfloor - \lfloor x_0 \rfloor}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{(x_0 - 1) - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{-1}{x - x_0} = +\infty$$

et la dérivée à gauche n'existe pas en x_0 alors que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \lfloor x \rfloor = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\lfloor x \rfloor - \lfloor x_0 \rfloor}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{x_0 - x_0}{x - x_0} = 0$$

et la fonction est continue à droite et dérivable à droite.

Dérivée de la fonction sinus

- En partant de l'identité trigonométrique

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

on peut calculer la dérivée de la fonction sinus

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \cos(h) + \cos(x) \sin(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) (\cos(h) - 1) + \cos(x) \sin(h)}{h} \\ &= \sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\ &= \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 = \cos(x) \end{aligned}$$

- La dérivée de la fonction sinus est donc $\sin'(x) = \cos(x)$.

Dérivée d'une composition

- La règle de dérivation

$$(f(x))^n = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$$

est un cas particulier de la règle de dérivation des fonctions composées :

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

ou

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \cdot f'(x)$$

- EXEMPLE. Pour la fonction $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ on a $h = g \circ f$ avec $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Ainsi la dérivée de la fonction h est

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- La règle se généralise à la composition de plus de deux fonctions :

$$(h \circ g \circ f)'(x) = [h(g(f(x)))]' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Dérivée des fonctions exponentielles

- L'exponentielle de base e est définie, pour tout nombre réel x , par

$$e^x = \exp(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

- En utilisant la linéarité de la dérivation on obtient

$$(e^x)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{x^k}{k!} \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{kx^{k-1}}{k!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = e^x.$$

- Ainsi la fonction dérivée de l'exponentielle de base e n'est rien d'autre qu'elle-même :

$$(e^x)' = e^x.$$

- Pour dériver l'exponentielle de base a on utilise l'identité $a^x = e^{\ln(a)x}$ ce qui donne

$$(a^x)' = \ln(a)a^x \quad \text{quel que soit } a \in \mathbb{R}_+^*.$$

Dérivée de la fonction réciproque

- Soient $f : E \rightarrow F$ une fonction inversible et $f^{-1} : F \rightarrow E$ sa réciproque. Les deux fonctions vérifient

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \forall x \in F$$

- Si f et f^{-1} sont différentiables on obtient, en utilisant la règle de dérivation des fonctions composées,

$$\frac{d}{dx} (f \circ f^{-1})(x) = [f(f^{-1}(x))]' = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = 1$$

et la dérivée de f^{-1} est la fonction

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Dérivée de la fonction arc tangente

- Rappelons que la fonction arc tangente est la réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$:

$$\begin{array}{ccc} \tan :] -\pi/2; \pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \arctan : \mathbb{R} & \longrightarrow &] -\pi/2; \pi/2[\\ x & \longmapsto & \arctan(x) \end{array}$$

- En utilisant la règle de la dérivée de la fonction réciproque et le résultat (démontré en exercices)

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

on obtient

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

- La dérivée de la fonction arc tangente est donc

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Règles de dérivation

Soient f et g deux fonctions différentiables.

1. Dérivée du produit par un scalaire : $[\lambda \cdot f(x)]' = \lambda \cdot f'(x)$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$

2. Dérivée d'une somme : $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

3. Dérivée d'un produit : $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

4. Dérivée d'un quotient : $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ si $g(x) \neq 0$

5. Dérivée d'une composition : $[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Dérivée des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
$c \in \mathbb{R}$	0
x^a	ax^{a-1}
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Pour $a > 0$, on a $a = e^{\ln(a)}$ et la dérivée de a^x est $(a^x)' = (e^{x \ln(a)})' = \ln(a)e^{x \ln(a)} = \ln(a)a^x$.

De même, pour $a > 0$ et $a \neq 1$, on a $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ et $\log'_a(x) = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)x}$.

Chapitre 3

Règle de Bernoulli-L'Hôpital



Règle de Bernoulli-L'Hôpital

- La **règle de Bernoulli-L'Hôpital** (aussi orthographié **L'Hospital**) est un résultat puissant (mais pas universel) pour lever des indéterminations du type " $\frac{0}{0}$ " ou " $\frac{\infty}{\infty}$ ".
- La règle s'applique lors du calcul de la limite du quotient de deux fonctions f et g , définies et dérivables au voisinage de x_0 (sauf peut-être en x_0) et qui tendent toutes les deux vers zéro ou toutes les deux vers l'infini en x_0 :

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{"}\frac{0}{0}\text{" ou "}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

Dans une telle situation, si la limite en x_0 du quotient f'/g' est égale à l (avec $l \in \mathbb{R}$ ou $l = \pm\infty$) alors la limite du quotient f/g est, elle aussi, égale à l :

$$\text{et si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

- La règle est applicable pour le calcul de limites unilatérales, à gauche ou à droite, ou bilatérales en x_0 ainsi que pour des limites vers $+\infty$ ou vers $-\infty$

Règle de Bernoulli-L'Hôpital (2)

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ ainsi que deux fonctions f et g définies et dérivables au voisinage de x_0 (mais pas forcément en x_0) et telles que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty.$$

Si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad \text{avec } l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

- La règle s'applique également lors du calcul de limites unilatérales ou de limites vers $\pm\infty$.
- Il est parfois nécessaire d'appliquer la règle plusieurs fois de suite.
- La règle permet également de lever certaines indéterminations de la forme $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ voire même $\infty - \infty$. Dans de tels cas il est cependant nécessaire de commencer par reformuler l'expression en lui appliquant des transformations algébriques adéquates.

Exemples

- Limites du type ' $\frac{0}{0}$ ' :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \stackrel{\text{B.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \stackrel{\text{B.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0+} 2\sqrt{x} \cos(x) = 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x^2 - 6x + 5} \stackrel{\text{B.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x - 6} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{2\sqrt{x}(2x - 6)} = \frac{1}{2\sqrt{5}(10 - 6)} = \frac{1}{8\sqrt{5}}$$

- Limites du type ' $\frac{\infty}{\infty}$ ' :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\text{B.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{\text{B.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\text{B.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2 \cdot 1} = +\infty$$

Exemples (2)

■ Limites du type ' $\frac{\infty}{\infty}$ ' :

► Plus généralement, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} &\stackrel{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} \stackrel{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} \stackrel{\text{B.-H.}}{=} \dots \\ &\stackrel{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n(n-1) \cdots 2 \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty \end{aligned}$$

■ Limites du type ' $0 \cdot \infty$ ' : on se ramène à la forme ' $\frac{0}{0}$ ' ou ' $\frac{\infty}{\infty}$ '

$$\text{► } \lim_{x \rightarrow 0_+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0_+} -x = 0$$

$$\text{► } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Exemples (3)

■ Limites du type ' $\infty - \infty$ ' : on se ramène à la forme ' $\frac{0}{0}$ ' ou ' $\frac{\infty}{\infty}$ '

$$\begin{aligned} \text{► } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)} \stackrel{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x \cos(x)} \\ &\stackrel{\text{B.-H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x \sin(x)} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

■ Limites du type ' 0^0 ' ou ' 1^∞ ' : on passe par l'exponentielle

$$\text{► } \lim_{x \rightarrow 0_+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{x \ln(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} x \ln(x)} = e^0 = 1$$

$$\text{► } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} \stackrel{\text{B.-H.}}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = e$$

Chapitre 4

Dérivées d'ordre supérieur



Fonction dérivable et fonction dérivée (rappels)

- Soit une fonction

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

définie sur un intervalle réel I ouvert (et non vide).

- La fonction f est dite **dérivable** (ou **différentiable**) au point $x_0 \in I$ si sa dérivée existe en x_0 .
- La fonction f est dite **dérivable** (ou **différentiable**) sur I si sa dérivée existe en tout point de l'intervalle I .
- Si f est dérivable sur I on peut lui associer sa **(fonction) dérivée** que l'on note

$$f' \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}(f)$$

- Si cette dérivée est continue, la fonction f est dite **continûment dérivable**, **continûment différentiable** ou, encore, **de classe C^1** .

Dérivée d'ordre 2

- Si la (fonction) dérivée f' est elle-même dérivable sur I , sa (fonction) dérivée est notée

$$f'' = (f')' \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2}{dx^2}(f)$$

et est appelée la **dérivée d'ordre 2** ou **dérivée seconde** de f .

- EXEMPLE. Pour la fonction $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$, sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 5x + 4) = 6x - 5$$

et sa dérivée d'ordre 2 est

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}(6x - 5) = 6.$$

- Si la dérivée seconde est continue, la fonction f est dite **deux fois continûment dérivable** ou **de classe C^2** .

Dérivée d'ordre n

- Lorsqu'elle existe, on définit de manière similaire la **dérivée d'ordre 3** de f , notée

$$f''' = (f'')' \quad \text{ou} \quad \frac{d^3 f}{dx^3} \quad \text{ou} \quad \frac{d^3}{dx^3}(f)$$

et, plus généralement, la **dérivée d'ordre n** de f , notée

$$f^{(n)} = [f^{(n-1)}]' \quad \text{ou} \quad \frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{ou} \quad \frac{d^n}{dx^n}(f)$$

- EXEMPLE. Pour la fonction $f(x) = \sin(2x)$, on a

$$f'(x) = (\sin(2x))' = 2 \cos(2x) \quad f''(x) = (2 \cos(2x))' = -4 \sin(2x)$$

$$f'''(x) = (-4 \sin(2x))' = -8 \cos(2x) \quad f^{(4)}(x) = (-8 \cos(2x))' = 16 \sin(2x)$$

et plus généralement pour tout $n \geq 0$,

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot \sin(2x) \quad \text{et} \quad f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cdot 2^{2n+1} \cdot \cos(2x)$$

Interprétation géométrique des dérivées première et seconde

- La dérivée première $f'(x)$ est égale à la pente de la tangente au graphe de $f(x)$ (au point d'abscisse x).
- La dérivée seconde $f''(x)$ indique comment varie la pente $f'(x)$ de la tangente au graphe de $f(x)$.
- Elle nous renseigne sur la **courbure** du graphe de $f(x)$.

En fait pour une fonction $y = f(x)$ la courbure est égale à

$$\gamma(x) = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

- Elle joue également un rôle important dans l'étude des **extremums** de $f(x)$ (maximums et minimums) ainsi que dans l'étude de la **convexité** de $f(x)$ et dans la recherche de ses **points d'inflexion**.

Interprétation cinématique des dérivées première et seconde

- Si $s(t)$ désigne le chemin parcouru au temps t (la distance parcourue entre la position initiale au temps 0 et la position au temps t),

- ▶ la première dérivée

$$\dot{s}(t) = \frac{ds}{dt} = v(t)$$

représente la vitesse instantanée au temps t .

- ▶ la deuxième dérivée

$$\ddot{s}(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv}{dt} = a(t)$$

représente l'accélération instantanée au temps t .

Chapitre 5

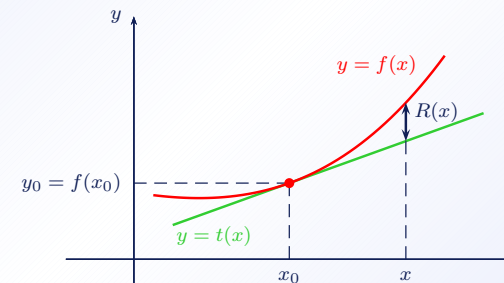
Approximation linéaire



Retour sur la tangente

- Soit $f(x)$ une fonction dérivable dans un intervalle I et x_0 un point de cet intervalle. L'équation de la tangente $t(x)$ au graphe représentatif la fonction $f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$ est

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



- Parmi toutes les droites passant par le point $(x_0, f(x_0))$, la tangente $t(x)$ est celle qui approche « au mieux » la fonction f au voisinage de x_0 .

Qualité de l'approximation

- Si on note $R(x)$ l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $t(x)$:

$$R(x) = f(x) - t(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

on a clairement

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$$

mais également

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$$

car

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

Approximation linéaire

- La tangente $t(x)$ à la fonction $f(x)$ en x_0 est la **meilleure approximation linéaire** (on dit aussi **affine**) de $f(x)$ autour de x_0 .

- Pour x proche de x_0 , les valeurs des deux fonctions sont proches

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{t(x)}$$

- De plus, l'erreur d'approximation $R(x)$ commise en remplaçant $f(x)$ par $t(x)$ (généralement appelée le **reste**) décroît plus vite que l'accroissement $h = x - x_0$ (lorsque celui-ci tend vers zéro). On dit que ce reste est **négligeable** par rapport à h .
- Pour cette raison, la tangente est dite l'**approximation du premier ordre** (ou **d'ordre 1**) de la fonction f autour de x_0 .
- La tangente est également appelée la **linéarisation** de f en x_0 .

Exemple

- Pour la fonction $f(x) = \sqrt{x+5}$, définie et dérivable pour tout $x > -5$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}.$$

- Pour $x_0 = 4$ on a

$$f(x_0) = f(4) = \sqrt{4+5} = 3 \quad \text{et} \quad f'(x_0) = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4+5}} = \frac{1}{6}.$$

Ainsi, au voisinage de $x_0 = 4$, on a

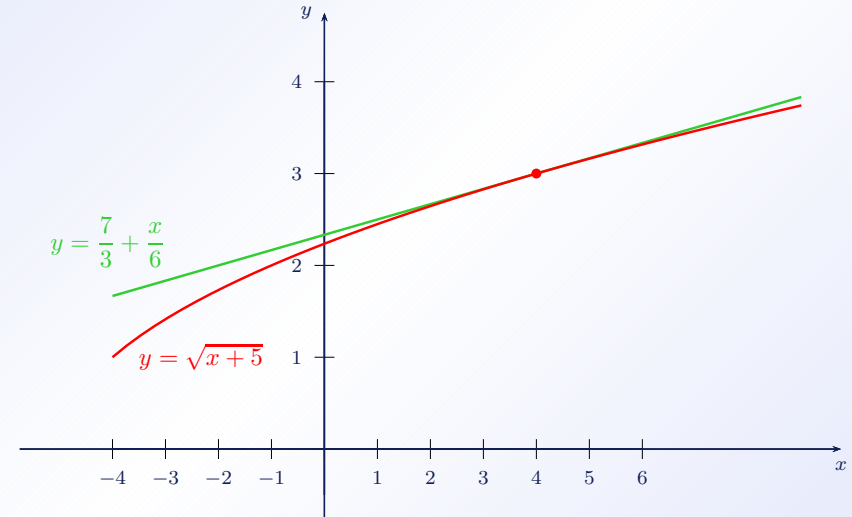
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \iff \sqrt{x+5} \approx 3 + \frac{1}{6}(x - 4) = \frac{7}{3} + \frac{x}{6}.$$

- En prenant $x = 1$, la linéarisation précédente de f fournit la valeur approchée

$$f(1) = \sqrt{1+5} = \sqrt{6} \approx \frac{7}{3} + \frac{1}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Valeur à comparer à celle « de la machine » : $\sqrt{6} = 2,44948\dots$

Exemple (2)

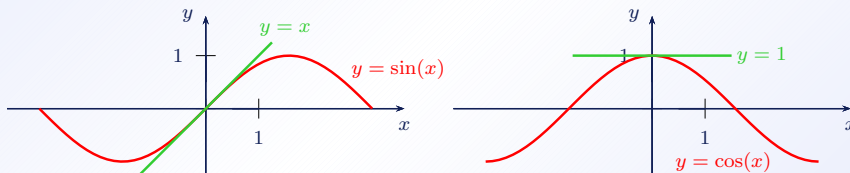


Exemple (3)

- Pour $f(x) = \sin(x)$ on a $f'(x) = \cos(x)$ et, en $x_0 = 0$,

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x - 0) = \sin(0) + \cos(0)x = x.$$

Ainsi $\sin(x) \approx x$ au voisinage de 0.



- Pour $f(x) = \cos(x)$ on a $f'(x) = -\sin(x)$ et, toujours en $x_0 = 0$,

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x - 0) = \cos(0) - \sin(0)x = 1.$$

Ainsi $\cos(x) \approx 1$ au voisinage de 0.

Exemple (4)

- Pour obtenir une valeur approchée de $\cos(61^\circ)$, c.-à-d. de $\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180})$ on peut linéariser la fonction cosinus en $x_0 = \frac{\pi}{3}$. On a

$$\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \cos'(\frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi, pour x proche de $\frac{\pi}{3}$,

$$\cos(x) \approx \cos(\frac{\pi}{3}) + \cos'(\frac{\pi}{3})(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3}).$$

- Pour $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}$ on obtient

$$\cos(61^\circ) = \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}) \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = 0,484885\dots$$

alors que la machine fournit la valeur

$$\cos(61^\circ) = \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}) = 0,4848096\dots$$

Chapitre 6

Développements limités et séries de Taylor



Approximation linéaire (rappels)

- Soit f une fonction définie dans un intervalle I et dérivable en $x_0 \in I$. La tangente au graphe représentatif de f en x_0 est la droite d'équation

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- Le polynôme $T_1(x)$ est le seul polynôme de degré 1 vérifiant

$$\begin{cases} T_1(x_0) = f(x_0) \\ T_1'(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$$

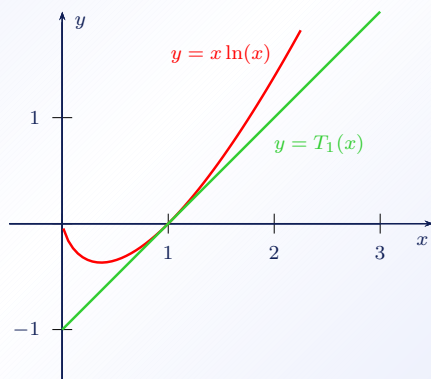
et il correspond à la meilleure **approximation linéaire** de f en x_0 :

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T_1(x)} \quad \text{pour } x \text{ proche de } x_0.$$

Exemple

- Pour la fonction $f(x) = x \ln(x)$, on a $f'(x) = 1 + \ln(x)$ et en $x_0 = 1$ on a

$$f(x) \approx T_1(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 \cdot \ln(1) + (1 + \ln(1))(x - 1) = x - 1$$



Approximation quadratique

- Si f est deux fois dérivable en x_0 on peut chercher un polynôme $T_2(x)$ de degré 2 vérifiant

$$\begin{cases} T_2(x_0) = f(x_0) \\ T_2'(x_0) = f'(x_0) \\ T_2''(x_0) = f''(x_0) \end{cases}$$

- Ce polynôme est égal à

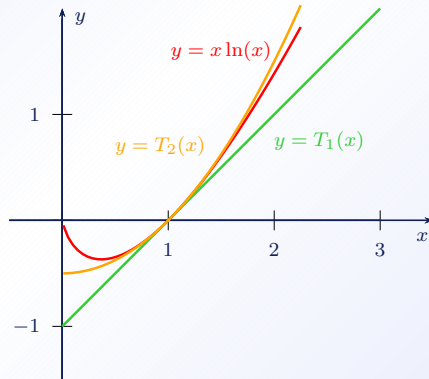
$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

et est la meilleure **approximation quadratique** de f autour de x_0 .

Exemple

- Toujours pour $f(x) = x \ln(x)$, on a $f'(x) = 1 + \ln(x)$, $f''(x) = 1/x$ et en $x_0 = 1$ on a

$$f(x) \approx T_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2$$



Polynôme de Taylor : Formule de Taylor-Young

- Soit f une fonction dérivable n fois en x_0 , son **polynôme de Taylor d'ordre n** en x_0 est

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

qui s'écrit aussi, de manière plus compacte,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

- En x_0 , la fonction f et le polynôme T_n prennent la même valeur : $f(x_0) = T_n(x_0)$. Mais les deux fonctions prennent également la même valeur en x_0 pour leurs n premières dérivées. Le polynôme T_n est en ce sens la meilleure **approximation d'ordre n** de f en x_0 .

Exemple

- Pour la fonction $f(x) = e^x$ on a simplement $f^{(k)}(x) = e^x$ et le polynôme de Taylor d'ordre n de l'exponentielle en x_0 est

$$T_n(x) = e^{x_0} + e^{x_0}(x-x_0) + \frac{e^{x_0}}{2}(x-x_0)^2 + \frac{e^{x_0}}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{e^{x_0}}{n!}(x-x_0)^n.$$

- Pour $x_0 = 0$ on a

$$e^x \approx T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

Remarques

- Pour une fonction f dérivable en x_0 , son polynôme de Taylor $T_1(x)$ d'ordre 1 en x_0 n'est rien d'autre que sa tangente $t(x)$ en x_0 : $T_1(x) = t(x)$

- Si f est un polynôme de degré n , son polynôme de Taylor d'ordre n en x_0 est simplement la fonction f .

De plus on a $T_k(x) = f(x)$ pour tout ordre $k \geq n$ et quel que soit x_0 car les dérivées d'ordre k d'un polynôme de degré n sont toutes nulles dès que k dépasse n .

- Dans le cas, fréquent, où x_0 est nul, la formule de Taylor-Young se simplifie en peu et le **polynôme de Taylor d'ordre n de la fonction f en $x_0 = 0$** est

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Développement limité

- L'erreur d'approximation $R_n(x)$, aussi appelée le **reste**, est égal à l'écart entre la valeur de la fonction f et celle de son polynôme de Taylor d'ordre n :

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

- Le reste est nul en x_0 : $R_n(x_0) = f(x_0) - T_n(x_0) = 0$. Mais, en général, il ne l'est pas pour d'autres valeurs de x , même proches de x_0 .
- L'erreur $R_n(x)$ est cependant **négligeable** par rapport à $(x - x_0)^n$: elle converge vers 0 « plus vite » que $(x - x_0)^n$ lorsque x tend vers x_0 . Cette propriété se note

$$R_n(x) \in o((x - x_0)^n) \quad \text{ou} \quad R_n(x) = o((x - x_0)^n)$$

- On obtient alors le **développement limité d'ordre n de f en x_0** (on dit aussi **au voisinage de x_0** ou **autour de x_0**)

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{\text{polynôme de Taylor } T_n(x) \text{ d'ordre } n \text{ de } f \text{ en } x_0} + \underbrace{o((x - x_0)^n)}_{\text{reste}}$$

« Petits o »

- Une fonction $g(x)$ est « **en/un petit o** » de $(x - x_0)^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$) si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = 0$ ou, de manière équivalente, si $g(x) = \varepsilon(x)(x - x_0)^n$ avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

- Lorsque $x_0 = 0$ (seul cas intéressant pour nous), la fonction $g(x)$ est en/un $o(x^n)$, noté $g(x) \in o(x^n)$ ou $g(x) = o(x^n)$, si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n} = 0$.

- EXEMPLES.

► $g(x) = \ln(x + 1)$ est en $o(x^0) = o(1)$ car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^0} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x + 1) = 0$

► $g(x) = \ln(x + 1)$ n'est pas en $o(x)$ car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1 \neq 0$

► $g(x) = \sin^3(x)$ est en $o(x^2)$ (mais pas en $o(x^3)$) car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(x)}{x^2} = 0$

► $g(x) = 3x^4 - x^3\sqrt{2x}$ est en $o(x^3)$ (mais pas en $o(x^4)$) car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4 - x^3\sqrt{2x}}{x^3} = 0$

Quelques propriétés des « petits o »

- Si $g(x)$ est un petit o de x^n alors c'est également un petit o de x^k pour tout entier k entre 0 et n :

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n} = 0 \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^k} = 0 \quad \text{pour } k = 0, \dots, n.$$

- On peut additionner/soustraire (en nombre fini) des petits o de même ordre :

$$o(x^2) + o(x^2) = o(x^2) \quad \text{et} \quad o(x) - o(x) = o(x)$$

$$o(x^3) + o(x^2) = o(x^2) \quad \text{mais} \quad o(x^3) + o(x^2) \neq o(x^3)$$

- On peut multiplier des petits o :

$$-4o(x) = o(x) \quad x^3o(x^2) = o(x^5)$$

$$o(x)o(x^2) = o(x^3) \quad \frac{o(x^2)}{x} = o(x)$$

Application : Calcul de limites

- On désire calculer la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + x)}{x(e^x - 1)}$.

- On peut appliquer la règle de Bernoulli-L'Hôpital deux fois de suite.

- On peut aussi utiliser les développements limités : On sait qu'au voisinage de $x_0 = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + x)}{x(e^x - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (1 + x)}{x(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + \frac{x^3}{2} + xo(x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\frac{1}{2} + o(1))}{x^2(1 + \frac{x}{2} + o(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + \frac{x}{2} + o(x)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Manipulation de développements limités

- On peut manipuler et combiner un ou plusieurs développements limités d'ordre n . En particulier on peut
 - ▶ **multiplier par un scalaire** λ le polynôme de Taylor d'ordre n de $f(x)$ pour obtenir le polynôme de Taylor d'ordre n de $\lambda f(x)$;
 - ▶ **additionner/soustraire** les polynômes de Taylor d'ordre n de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ afin d'obtenir le polynôme de Taylor d'ordre n de leur somme/différence ;
 - ▶ **multiplier** les polynômes de Taylor d'ordre n de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ afin d'obtenir le polynôme de Taylor d'ordre n de leur produit ;
 - ▶ **composer** les polynômes de Taylor d'ordre n de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ afin d'obtenir le polynôme de Taylor d'ordre n de leur composition ;
 - ▶ **dériver** le polynôme de Taylor d'ordre n de $f(x)$ pour obtenir le polynôme de Taylor d'ordre $n-1$ de $f'(x)$;
- **Sauf cas exceptionnels, aucune de ces opérations ne peut augmenter la qualité de l'approximation, c.-à-d. l'ordre du reste !**

J.-F. HÉCHE, Mathématiques 1, 2024 – 79

Manipulation de développements limités (2)

- On peut **additionner** et **soustraire** deux développements limités d'ordre n . On peut également **multiplier par un scalaire** un développement limité.

■ EXEMPLE. On a

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x}.$$

De plus, à l'ordre 4 et au voisinage de $x_0 = 0$, on a

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4).$$

Ainsi, le développement limité d'ordre 4 de $1/(1-x^2)$ au voisinage de $x_0 = 0$ est

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^2} &= \frac{1}{2} (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)) + \frac{1}{2} (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)) \\ &= \frac{1}{2} (2 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)) = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

J.-F. HÉCHE, Mathématiques 1, 2024 – 80

Manipulation de développements limités (3)

- On peut **multiplier** deux développements limités d'ordre n mais **il ne faut conserver que les termes de degré inférieur ou égal à n** .
- EXEMPLE. Au voisinage de $x_0 = 0$ et à l'ordre 2 on a

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2) \quad \text{et} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Ainsi, le développement limité d'ordre 2 de $\frac{e^x}{1+x}$ au voisinage de $x_0 = 0$ est

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{1+x} &= (1 - x + x^2 + o(x^2)) \cdot (1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \underbrace{\frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{2} + o(x^2) \left(2 + \frac{3x^2}{2} + o(x^2) \right)}_{o(x^2)} \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

J.-F. HÉCHE, Mathématiques 1, 2024 – 81

Suite de l'exemple

- À l'ordre 4 et toujours en $x_0 = 0$, on a

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4) \quad \text{et} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Ainsi, le développement limité d'ordre 4 de $\frac{e^x}{1+x}$ en 0 est

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{1+x} &= (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)) \cdot (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)) \\ &= 1 + x - x + \frac{x^2}{2} - x^2 + x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + x^3 - x^3 + \\ &\quad + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{2} - x^4 + x^4 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4). \end{aligned}$$

J.-F. HÉCHE, Mathématiques 1, 2024 – 82

Manipulation de développements limités (4)

- On peut **composer** deux développements limités d'ordre n mais si on veut développer la fonction composée $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ en x_0 il faut

- **composer le développement de $f(x)$ et x_0 avec celui de $g(y)$ en $y_0 = f(x_0)$,**
- **conserver uniquement les termes de degré inférieur ou égal à n .**

- EXEMPLE. La fonction $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$ est la composition de $f(x) = x^2$ par $g(y) = \frac{1}{1-y}$.

En $x_0 = 0$, on a $y_0 = f(x_0) = 0^2 = 0$ et il faut développer les deux fonctions f et g en 0.

À l'ordre 4 et en 0, les polynômes de Taylor $F_4(x)$ de f et $G_4(y)$ de g sont

$$F_4(x) = x^2 \quad \text{et} \quad G_4(y) = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4.$$

On a alors

$$G_4(F_4(x)) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8$$

et le polynôme de Taylor d'ordre 4 de $h(x) = g(f(x))$ en 0 est $H_4(x) = 1 + x^2 + x^4$.

Exemple

- Pour la fonction $h(x) = e^{1-\cos(x)}$, son développement limité d'ordre 2 en $x_0 = 0$ s'obtient en composant

- celui de $f(x) = 1 - \cos(x)$ en $x_0 = 0$ et

- celui de $g(y) = e^y$ en $y_0 = f(x_0) = 1 - \cos(x_0) = 1 - 1 = 0$.

- À l'ordre 2 et en 0 on a

$$1 - \cos(x) \approx 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} = F_2(x) \quad \text{et} \quad e^y \approx 1 + y + \frac{y^2}{2} = G_2(y).$$

$$\text{En composant on obtient } G_2(F_2(x)) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}$$

et le polynôme de Taylor d'ordre 2 de $h(x)$ en 0 est $H_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$.

- **Attention !** Le terme de degré 4 dans $G_2(F_2(x))$ n'est pas correct. On vérifie que

$$H_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}.$$

Exemple (2)

- Pour développer $h(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ on réécrit le dénominateur : $\cos(x) = 1 - (1 - \cos(x))$.

On a alors

$$h(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - (1 - \cos(x))} = g(f(x))$$

avec $f(x) = 1 - \cos(x)$ et $g(y) = \frac{1}{1-y}$.

- En $x_0 = 0$ on a $y_0 = f(x_0) = 1 - \cos(0) = 0$ et pour développer h à l'ordre 4 en 0 on compose les polynômes de Taylor d'ordre 4 de f et g en 0. On a

$$F_4(x) = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \quad \text{et} \quad G_4(y) = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4.$$

- En composant on obtient

$$\begin{aligned} G_4(F_4(x)) &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + \overbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^3}^{\text{termes de degré } > 4} + \overbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^4}^{\text{termes de degré } > 4} \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \frac{x^8}{576} + \dots = 1 + \underbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}}_{H_4(x)} + \dots \end{aligned}$$

Exemple (3)

- Pour la fonction $h(x) = e^{\frac{1}{1+x}}$, son développement limité d'ordre 2 en $x_0 = 0$ s'obtient en composant

- celui de $f(x) = \frac{1}{1+x}$ en $x_0 = 0$ et

- celui de $g(y) = e^y$ en $y_0 = f(x_0) = \frac{1}{1+x_0} = 1$.

- À l'ordre 2 et en $x_0 = 0$ on a $f(x) = \frac{1}{1+x} \approx F_2(x) = 1 - x + x^2$.

- À l'ordre 2 et en $y_0 = 1$ on a

$$g(y) = e^y \approx G_2(y) = g(1) + g'(1)(y-1) + \frac{g''(1)}{2}(y-1)^2 = e \left(1 + (y-1) + \frac{(y-1)^2}{2} \right).$$

- En composant on obtient $G_2(F_2(x)) = e \left(1 - x + \frac{3x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2} \right)$

et le polynôme de Taylor d'ordre 2 de $h(x)$ en 0 est $H_2(x) = e \left(1 - x + \frac{3x^2}{2} \right)$.

Exemple (4)

- On peut aussi écrire $h(x) = e^{\frac{1}{1+x}} = e^{1+\frac{1}{1+x}-1} = e \cdot e^{\frac{1}{1+x}-1}$ et son développement limité d'ordre 2 en $x_0 = 0$ s'obtient en composant
 - ▶ celui de $f(x) = \frac{1}{1+x} - 1$ en $x_0 = 0$ et
 - ▶ celui de $g(y) = e^y$ en $y_0 = f(x_0) = \frac{1}{1+x_0} - 1 = 0$.
- À l'ordre 2 et en $x_0 = 0$ on a $f(x) = \frac{1}{1+x} - 1 \approx F_2(x) = (1 - x + x^2) - 1 = -x + x^2$.
- À l'ordre 2 et en $y_0 = 0$ on a $g(y) = e^y \approx G_2(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2}$.
- En composant on obtient

$$G_2(F_2(x)) = 1 - x + x^2 + \frac{1}{2}(-x + x^2)^2 = 1 - x + \frac{3x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2}$$

et le polynôme de Taylor d'ordre 2 de $h(x)$ en 0 est $H_2(x) = e \left(1 - x + \frac{3x^2}{2} \right)$.

Séries de Taylor

- Si la fonction f est dérivable une infinité de fois au voisinage de x_0 on peut faire tendre l'ordre du développement limité de f en x_0 vers l'infini. On obtient ainsi la **série de Taylor** de la fonction f en x_0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

- L'égalité dans la formule précédente (car il s'agit bien d'une égalité) est valable pour x dans un intervalle centré en x_0 et donc de la forme

$$]x_0 - R; x_0 + R[.$$

Le nombre R est le **rayon de convergence de la série de Taylor**.

- Lorsque $x_0 = 0$ on parle aussi de **série de Maclaurin**.

Exemple

- La série de Taylor de l'exponentielle e^x en 0 est

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Cette série converge pour tout nombre réel x et son rayon de convergence est infini.

- La série de Taylor de la fonction $\frac{1}{1-x}$ en 0 est

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

On reconnaît à droite une série géométrique de raison x qui converge uniquement si $|x| < 1$. Le rayon de convergence de la série de Taylor est donc égal à 1.

Chapitre 7

Zones de croissance et décroissance



Fonctions croissantes et décroissantes

■ On considère une fonction numérique f définie sur un intervalle I :

► La fonction f est dite **croissante** sur I si pour toute valeur x_1 et x_2 dans I on a

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

et est même dite **strictement croissante** si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) < f(x_2)$.

► La fonction f est dite **décroissante** sur I si pour toute valeur x_1 et x_2 dans I on a

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

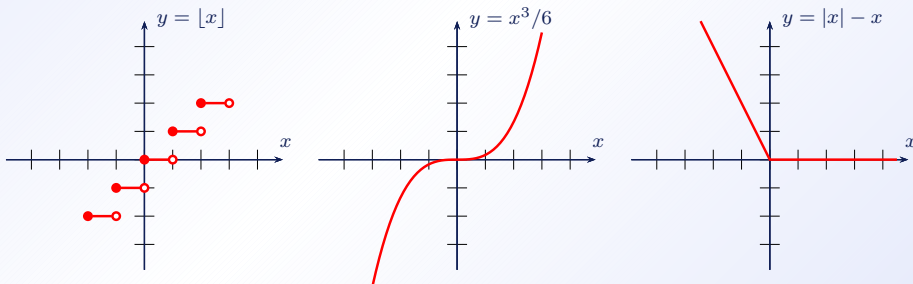
et est même dite **strictement décroissante** si $x_1 < x_2$ implique $f(x_1) > f(x_2)$.

■ REMARQUE. Une fonction f est croissante sur I si et seulement si sa fonction opposée $-f$ est décroissante sur I .

■ Une fonction **monotone** sur I est une fonction croissante ou décroissante sur I .

Exemples

- La fonction $f(x) = \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$ mais pas strictement croissante.
- La fonction $g(x) = x^3/6$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $h(x) = |x| - x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.



Croissance et première dérivée

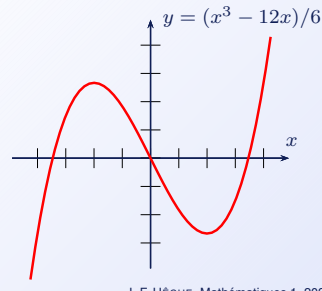
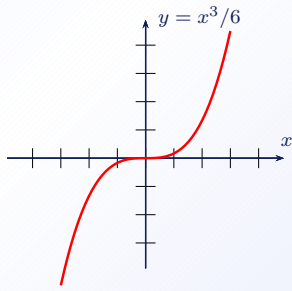
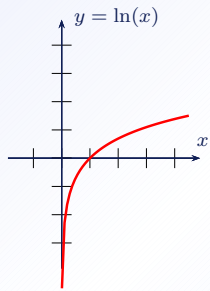
■ Si la fonction f est dérivable sur l'intervalle I , le signe de sa dérivée (autrement dit le signe de la pente de sa tangente) indique si la fonction est (localement) croissante ou décroissante :

$f' \geq 0$ sur I	$\implies$	f croissante sur I
$f' > 0$ sur I	$\implies$	f strictement croissante sur I
$f' \leq 0$ sur I	$\implies$	f décroissante sur I
$f' < 0$ sur I	$\implies$	f strictement décroissante sur I

■ REMARQUE. Lorsqu'on note « $f' \geq 0$ sur I » cela signifie que la dérivée est positive ou nulle en tout point de l'intervalle I , c.-à-d. que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Exemples

- La fonction $f(x) = \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ car sa dérivée $f'(x) = 1/x$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction $g(x) = x^3/6$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée $g'(x) = x^2/2$ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$. En fait la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$ et au final sur $\mathbb{R}$ tout entier (la dérivée est nulle en $x = 0$ mais il s'agit d'un point d'inflexion et non pas d'un extremum).
- La fonction $h(x) = (x^3 - 12x)/6$ est strictement croissante sur $] -\infty, -2]$ et sur $[2, \infty[$ et strictement décroissante sur $[-2, 2]$.



J.-F. HÉCHE, Mathématiques 1, 2024 – 94

Tableau de variations

- La dérivée de la fonction $h(x) = \frac{x^3 - 12x}{6} = \frac{x(x^2 - 12)}{6} = \frac{x(x + 2\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3})}{6}$ est

$$h'(x) = \frac{3x^2 - 12}{6} = \frac{x^2 - 4}{2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{2}$$

et l'étude du signe de cette dérivée aboutit au tableau de variations qui suit où on retrouve les trois zones de croissance/décroissance observées graphiquement dans l'exemple précédent.

x	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	-2	0	2	$2\sqrt{3}$	$+\infty$
$h(x)$	—	0	+	0	—	0	+
$h'(x)$		+	0	—	0	+	
C/D		↗		↘		↗	

J.-F. HÉCHE, Mathématiques 1, 2024 – 95

Chapitre 8

Fonctions convexes et points d'inflexion



Fonctions convexes et concaves

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

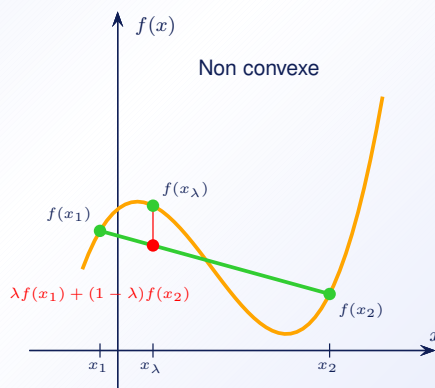
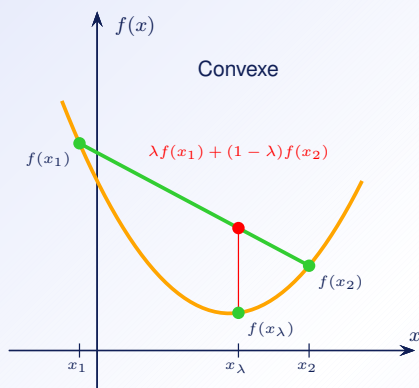
- La fonction f est dite **convexe** sur I si, quels que soient les points x_1 et x_2 de I , le graphe de la fonction entre x_1 et x_2 est situé sur ou en dessous de la corde reliant les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$:

$$f \text{ est convexe sur } I \iff f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \text{ pour tout } x_1 \text{ et } x_2 \text{ dans } I \text{ et pour tout } \lambda \in [0, 1]$$

- La fonction f est dite **concave** sur I si son graphe est situé sur ou en dessus de ses cordes :

$$f \text{ est concave sur } I \iff f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \text{ pour tout } x_1 \text{ et } x_2 \text{ dans } I \text{ et pour tout } \lambda \in [0, 1]$$

Illustration et exemples



- Les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = |x|$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $h(x) = (x^3 - 12x)/6$ est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction $i(x) = \ln(x)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Fonctions convexes et concaves (2)

Quelques propriétés :

- Une fonction f est concave sur un intervalle I si et seulement si son opposée $-f$ est convexe sur ce même intervalle.
- Une fonction convexe ou concave sur un intervalle ouvert I est toujours continue sur cet intervalle.
- Si la fonction f est dérivable sur I , elle est convexe si et seulement si son graphe est situé sur ou au-dessus de ses tangentes alors qu'elle est concave si et seulement si son graphe est situé sur ou au-dessous de ses tangentes.
- Les seules fonctions à la fois convexes et concaves sont les fonctions affines c'est-à-dire les fonctions de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Convexité et dérivée seconde

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est convexe sur I si sa dérivée première f' est croissante sur cet intervalle ce qui est le cas lorsque sa dérivée seconde est positive ou nulle sur I .
- De même, f est concave sur I si sa dérivée première f' est décroissante sur I autrement dit si sa dérivée seconde est négative ou nulle sur I .

$$\begin{aligned} f'' \geq 0 \text{ sur } I &\implies f \text{ convexe sur } I \\ f'' \leq 0 \text{ sur } I &\implies f \text{ concave sur } I \end{aligned}$$

- EXEMPLE. Pour $h(x) = (x^3 - 12x)/6$, la dérivée seconde est $h''(x) = x$ et la fonction est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$.

Points d'inflexion

- Une fonction peut être convexe sur certaines portions de son domaine de définition et concave sur d'autres. Les points de transition sont appelés les **points d'inflexion** de la fonction.

- Si f est deux fois dérivable sur l'intervalle I , la valeur $c \in I$ est l'abscisse d'un point d'inflexion de la fonction f si et seulement si

- ▶ la dérivée seconde s'annule en c :

$$f''(c) = 0,$$

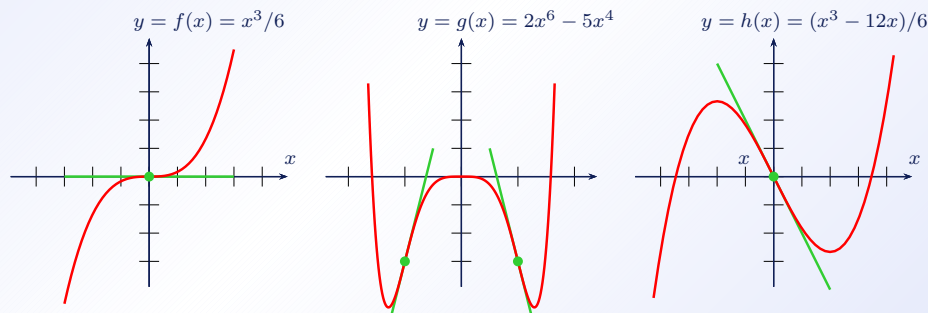
- ▶ et la dérivée seconde change de signe en c :

au voisinage de c , f'' est positive d'un côté et négative de l'autre.

- Si $(c, f(c))$ est un point d'inflexion de f alors le graphe de f « traverse » la tangente en ce point : au voisinage de c , le graphe de f est au-dessus de la tangente en $(c, f(c))$ d'un côté et au-dessous de l'autre.

Exemples

- La fonction $f(x) = x^3/6$ possède un point d'inflexion (à tangente horizontale) en $x = 0$.
- La fonction $g(x) = 2x^6 - 5x^4$ possède deux points d'inflexion en $x = -1$ et $x = 1$. Sa dérivée seconde s'annule aussi en $x = 0$ mais il s'agit d'un maximum local et non d'un point d'inflexion.
- La fonction $h(x) = (x^3 - 12x)/6$ possède un point d'inflexion en $x = 0$.



Chapitre 9

Extremums



Maximums et minimums

- On considère une fonction f de domaine de définition $D \subseteq \mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

- La fonction f atteint son **maximum global** ou **absolu** en c si

$$f(c) \geq f(x) \quad \text{pour tout } x \text{ de } D.$$

- La fonction f atteint son **minimum global** ou **absolu** en c si

$$f(c) \leq f(x) \quad \text{pour tout } x \text{ de } D.$$

- Un **extremum** de la fonction f est un maximum ou un minimum de f .

Extremums locaux

- La fonction f admet un **maximum local** ou **relatif** en c si

$$f(c) \geq f(x) \quad \text{pour tout } x \text{ dans un voisinage de } c.$$

- La fonction f admet un **minimum local** ou **relatif** en c si

$$f(c) \leq f(x) \quad \text{pour tout } x \text{ dans un voisinage de } c.$$

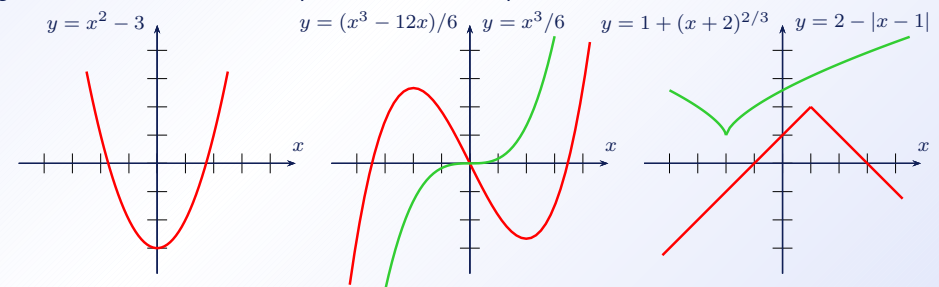
- REMARQUE. Tout extremum global est également local.

- Théorème (Fermat).** Si la fonction f est dérivable en c et si f admet un extremum local en c alors $f'(c) = 0$.

Autrement dit, si la fonction f admet un maximum ou un minimum local en c et que son graphe possède une tangente en ce point alors cette tangente doit être horizontale.

Exemples

- La fonction $f(x) = x^2 - 3$ admet un minimum global en $x = 0$.
- La fonction $g(x) = (x^3 - 12x)/6$ admet un maximum local en $x = -2$ et un minimum local en $x = 2$. Cette fonction ne possède aucun extremum global sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $h(x) = x^3/6$ ne possède aucun extremum sur $\mathbb{R}$ même si sa dérivée s'annule en $x = 0$.
- La fonction $i(x) = 2 - |x - 1|$ possède un maximum global en $x = 1$ mais n'est pas dérivable en ce point. De même la fonction $j(x) = 1 + (x + 2)^{2/3}$ possède un minimum global en $x = -2$ mais n'est pas dérivable en ce point.



Points stationnaires et critiques

- Le théorème de Fermat et les exemples qui précèdent nous indiquent que les extremums d'une fonction f doivent être recherchés parmi
 - les points où la dérivée première de f s'annule,
 - les points où f n'est pas dérivable,
 - les points de discontinuité de f ,
 - les points au bord de l'intervalle de définition de f si celui-ci est fermé et borné.

- Les points $(c, f(c))$ où la dérivée de f est nulle sont appelés les **points stationnaires** de f :

$$(c, f(c)) \text{ est un point stationnaire de } f \iff f'(c) = 0$$

- Les points $(c, f(c))$ où la dérivée de f s'annule ainsi que ceux où la fonction est continue mais pas dérivable sont appelés les **points critiques** de f .

$$(c, f(c)) \text{ est un point critique de } f \iff f'(c) = 0 \text{ ou } f \text{ continue mais pas dérivable en } c$$

Test de la dérivée première

- Soit c l'abscisse d'un **point critique** d'une fonction f continue et dérivable au voisinage de c .

- La fonction f admet un maximum local en c si f' passe du positif au négatif en c .
- La fonction f admet un minimum local en c si f' passe du négatif au positif en c .
- La fonction f ne possède ni un maximum local ni un minimum local en c si f' ne change pas de signe en c .

- EXEMPLE. La fonction $f(x) = 2 - |x - 1|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable partout sauf en $x = 1$ qui est donc l'abscisse d'un point critique de la fonction. De plus on a

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x \geq 1 \\ 1 + x & \text{si } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

et la fonction f admet un maximum local (en fait global) en $x = 1$.

Exemple

- Le polynôme $f(x) = x^5 - 5x^3 = x^3(x^2 - 5)$ s'annule en

$$x = 0 \text{ (multiplicité 3), } x = \sqrt{5} \text{ et } x = -\sqrt{5}.$$

- Sa dérivée est le polynôme $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3)$ qui s'annule en

$$x = 0 \text{ (multiplicité 2), } x = \sqrt{3} \text{ et } x = -\sqrt{3}.$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$+\infty$		
$f(x)$	$-\infty$	-	0	+	0	-	0	+	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	+	0	-	0	-	0	+	$+\infty$
$Ext.$	$-\infty$ $\nearrow$ 0 $\nearrow$ max $\searrow$ 0 $\searrow$ 0 $\searrow$ min $\nearrow$ 0 $\nearrow$ $+\infty$								

Test de la dérivée seconde

- Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur un intervalle ouvert I et $c \in I$ l'abscisse d'un **point stationnaire** de f (on a donc $f'(c) = 0$).

- Si $f''(c) < 0$ alors la fonction f admet un maximum local de en c (car f est concave au voisinage de c).
- Si $f''(c) > 0$ alors la fonction f admet un minimum local de c (car f est convexe au voisinage de c).
- Si $f''(c) = 0$ on ne peut pas conclure.

- EXEMPLE. La fonction $f(x) = x^2$ et sa dérivée $f'(x) = 2x$ s'annulent en $x = 0$. La dérivée seconde $f''(x) = 2$ étant positive (partout et donc en particulier en $x = 0$) on peut conclure que f admet un minimum local en $x = 0$.

La dérivée seconde étant toujours positive, on peut même conclure que la fonction est convexe sur $\mathbb{R}$ et que le minimum est global.

Exemple

- La fonction $f(x) = x^3$, sa dérivée première $f'(x) = 3x^2$ et sa dérivée seconde $f''(x) = 6x$ s'annulent toutes en $x = 0$.
- Le test de la dérivée seconde ne permet pas de conclure.
- L'étude du signe de la dérivée première montre qu'il ne s'agit pas d'un extremum.
- Celui de la dérivée seconde montre qu'il s'agit d'un point d'inflexion car la fonction est concave sur les négatifs et convexe sur les positifs.
- La dérivée première étant nulle en $x = 0$, ce point d'inflexion est à tangente horizontale.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^3$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x) = 3x^2$	$+\infty$	0	$+\infty$
$f''(x) = 6x$	$-\infty$	0	$+\infty$
<i>Ext.</i>	$-\infty$	0	$+\infty$
<i>Conv.</i>	$\cap$	P.I.	$\cup$

Exemple (2)

- La fonction $f(x) = x^4$, sa dérivée première $f'(x) = 4x^3$ et sa dérivée seconde $f''(x) = 12x^2$ s'annulent toutes en $x = 0$.
- Le test de la dérivée seconde ne permet pas de conclure.
- L'étude du signe de la dérivée première montre qu'il s'agit d'un minimum.
- Celui de la dérivée seconde montre que la fonction est convexe sur $\mathbb{R}$. Le minimum est donc global.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^4$	$+\infty$	0	$+\infty$
$f'(x) = 4x^3$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x) = 12x^2$	$+\infty$	0	$+\infty$
<i>Ext.</i>	$+\infty$	$\min$	$+\infty$
<i>Conv.</i>	$\cup$	$\cup$	$\cup$

Exemple (3)

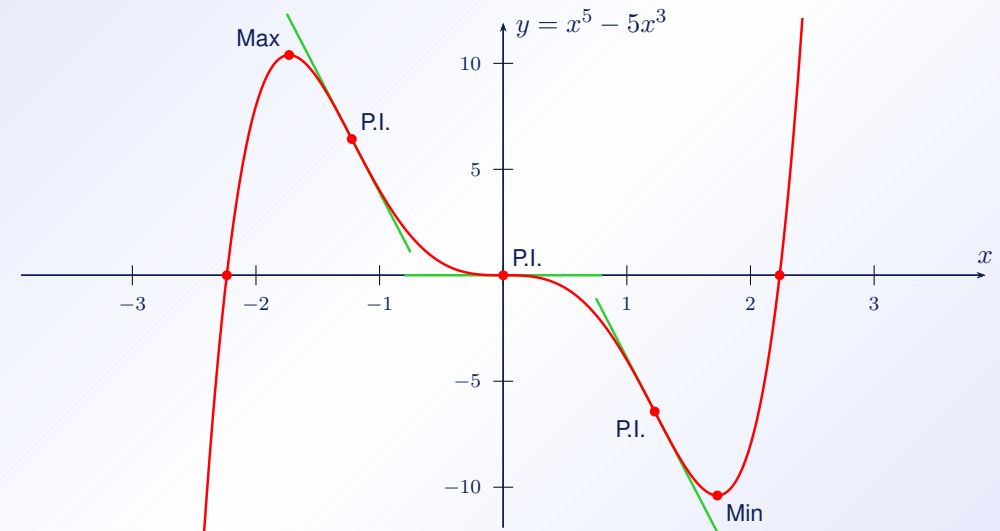
- La dérivée seconde du polynôme $f(x) = x^5 - 5x^3 = x^3(x^2 - 5)$ est

$$f''(x) = 20x^3 - 30x = 10x(2x^2 - 3)$$

et s'annule en $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ et $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3/2}$	0	$\sqrt{3/2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	+	+	0	-	-	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	+	0	-	0	-	0	+	$+\infty$
$f''(x)$	$-\infty$	-	-	0	+	0	+	+	$+\infty$
<i>Ext.</i>	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$
<i>Conv.</i>	$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$

Exemple (4)



Chapitre 10

Asymptotes



Asymptotes verticales

- Le graphe représentatif de la fonction f possède une **asymptote verticale** en $x = a$ si

$$\lim_{x \rightarrow a_-} |f(x)| = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a_+} |f(x)| = +\infty \quad (\text{ou les deux})$$

- EXEMPLES.

- Le graphe de la fonction $f(x) = 1/x$ possède une asymptote verticale en $x = 0$ car

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} \right| = +\infty$$

- Le graphe de la fonction $f(x) = xe^{1/x}$ possède lui aussi une asymptote verticale en $x = 0$ car

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} xe^{1/x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} \stackrel{\text{B.H.}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{1} = +\infty$$

Mais ici on a $\lim_{x \rightarrow 0_-} xe^{1/x} = 0$.

Asymptotes horizontales

- La droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** du graphe représentatif de la fonction f vers $+\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

De même, la droite $y = b$ est une **asymptote horizontale** du graphe représentatif de la fonction f vers $-\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

- EXEMPLE.

- La droite $y = 0$ est une asymptote horizontale du graphe de $f(x) = e^x$ vers $-\infty$.
- Le graphe de la fonction $f(x) = \arctan(x)$ possède deux asymptotes horizontales :

$$y = \frac{\pi}{2} \quad \text{vers } +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

et

$$y = -\frac{\pi}{2} \quad \text{vers } -\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Asymptotes obliques

- La droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** du graphe représentatif la fonction f vers $+\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

La pente a et l'ordonnée à l'origine b de l'asymptote sont alors données par

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

- De manière similaire $y = ax + b$ une **asymptote oblique** du graphe représentatif de la fonction f vers $-\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

auquel cas

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax).$$

Exemple

- Pour la fonction $f(x) = xe^{1/x}$ on a

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = 1$$

et

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{1/x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{B-H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{e^{1/x}}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = 1. \end{aligned}$$

La droite d'équation $y = x + 1$ est donc une asymptote oblique du graphe de f vers $+\infty$.

- En prenant les limites pour x tendant vers $-\infty$ on obtient les mêmes valeurs. Le graphe de la fonction possède donc la même asymptote oblique vers $-\infty$ (mais ce n'est pas toujours le cas).

Exemple (2)

- Pour la fonction $f(x) = x + \sqrt{x+1}$ on a

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x+1}}{x} = 1$$

mais

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x+1} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty \end{aligned}$$

et le graphe de la fonction f n'admet pas d'asymptote vers $+\infty$.

Exemple (3)

- Pour la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1}$ on a

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x\sqrt[3]{1 + 1/x^3}}{x} = 1$$

et

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 1} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x^3 + 1) - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2} + x\sqrt[3]{x^3 + 1} + x^2} = 0 \end{aligned}$$

et le graphe de la fonction f admet une asymptote oblique d'équation $y = x$ aussi bien vers $+\infty$ que vers $-\infty$.

Cas des fonctions rationnelles (rappel)

- Pour les fonctions rationnelles, c.-à-d. les fonctions de la forme $f(x) = n(x)/d(x)$ où $n(x)$ et $d(x)$ sont deux polynômes, les résultats se simplifient nettement. En effet

- le graphe représentatif de la fraction rationnelle $f(x) = n(x)/d(x)$ possède une **asymptotique horizontale** si et seulement si **degre($n(x)$) = degre($d(x)$)** ;
- l'asymptote est alors la même vers $-\infty$ et vers $+\infty$ et sa hauteur est égale au quotient des coefficients dominants de $n(x)$ et $d(x)$;
- le graphe représentatif de la fraction rationnelle $f(x) = n(x)/d(x)$ possède une **asymptotique oblique** si et seulement si **degre($n(x)$) = degre($d(x)$) + 1** ;
- l'asymptote est alors la même vers $-\infty$ et vers $+\infty$ et son équation est donnée par le **quotient** de la division polynomiale du numérateur $n(x)$ par le dénominateur $d(x)$.

- EXEMPLE. Pour la fonction $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 3}$ on a $(2x^2 - 1) = (2x - 6)(x + 3) + 17$ et la droite $y = 2x - 6$ est une asymptote oblique au graphe de f vers $\pm\infty$.

Chapitre 11

Problèmes d'optimisation



Démarche générale

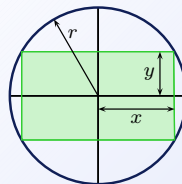
- 1) Identifier et définir précisément la ou les variables de décision, sans oublier de préciser les unités s'il y en a.
- 2) Exprimer l'objectif (la quantité à optimiser) comme une fonction de la ou des variables identifiées.
- 3) Si nécessaire, établir les relations liant les variables de décision et les intervalles dans lesquels elles peuvent varier.
- 4) Formuler l'objectif comme une fonction d'une seule variable de décision et préciser le domaine de définition admissible pour cette variable.
- 5) Étudier les variations de la fonction objectif afin de déterminer son ou ses extremums, sans oublier de prendre en compte ce qu'il se passe au bord du domaine de définition.
- 6) Présenter la solution.

Exemple

■ **Énoncé.** On désire découper une poutre de section rectangulaire d'aire maximale dans un tronç de section circulaire. Déterminer les dimensions de la section de la poutre en fonction du rayon r (en centimètres) de celle du tronç.

■ **Résolution.**

- 1) Variables de décision. On note x la demi-largeur et y la demi-hauteur de la section rectangulaire de la poutre, toutes deux exprimées en centimètres.
- 2) Objectif. En fonction de x et y , l'aire de la section rectangulaire de la poutre est simplement $A(x, y) = (2x)(2y) = 4xy$.



- 3) Lien entre les variables. Par Pythagore on a $x^2 + y^2 = r^2$ et $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

De plus on doit avoir $0 \leq x \leq r$.

- 4) Objectif. En fonction de x uniquement, l'aire à maximiser est $A(x) = 4x\sqrt{r^2 - x^2}$ avec $0 \leq x \leq r$.

Exemple (2)

■ **Résolution (suite).**

- 5) Étude des variations de $A(x)$. La dérivée de la fonction objectif est

$$A'(x) = 4\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$= \frac{4(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Elle s'annule lorsque $r^2 - 2x^2 = 0$ c.-à-d. lorsque $x = r/\sqrt{2}$ (x est ≥ 0). Le tableau de variations de $A(x)$ est présenté ci-contre.

x	0	$r/\sqrt{2}$	r
$A(x)$	0	+	0
$A'(x)$	$4r$	+	$-\infty$
Extr.	$\min$	$\max$	$\min$

La fonction $A(x)$ atteint son max en $x = r/\sqrt{2}$. On a alors $y = \sqrt{r^2 - x^2} = r/\sqrt{2}$.

- 6) Solution. L'aire maximale de la section de la poutre est égale à $2r^2$ et est obtenue en découpant une poutre carrée de côté $c = 2x = \sqrt{2}r$ centimètres.