

Mathématiques 1

Partie 3 : Algèbre linéaire

Jean-François Hêche

Automne 2024

J.-F. HÊCHE, Mathématiques 1, 2024 – 1

Chapitre 1

Définitions et classification

J.-F. HÊCHE, Mathématiques 1, 2024 – 2

Matrices

- Une **matrice** (réelle) est un tableau (bidimensionnel) de nombres réels.
- Si ces nombres sont arrangés en m lignes et n colonnes, on parle d'une matrice de **taille** $m \times n$ (ou de **dimension** $m \times n$).
- L'ensemble de matrices réelles de taille $m \times n$ est noté $M_{m,n}(\mathbb{R})$ voire, simplement, $M_{m,n}$.
- On représente une matrice en entourant le tableau de nombres qui la définit par des **crochets** ou des **parenthèses**.

Exemples.

► Matrices 3×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \\ e^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

► Matrices 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -1 \end{bmatrix}$$

► Matrices 2×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 12 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

► Matrices 1×2 et 3×1

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

J.-F. HÊCHE, Mathématiques 1, 2024 – 3

Matrices (2)

- On note les matrices à l'aide de lettres majuscules (à l'exception des vecteurs) et dans ce cours seront toujours désignées par des lettres majuscules grasses : $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, ...
- L'**élément** (ou l'**entrée**) (i, j) d'une matrice $\mathbf{A}$ est noté a_{ij} ou $a_{i,j}$ et correspond au nombre réel situé en **ligne i** et **colonne j** de $\mathbf{A}$.
- Pour une matrice $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$ on a alors

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

et il est courant de noter

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] \quad \text{ou} \quad \mathbf{A} = [a_{ij}]_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,m}$$

pour indiquer que $\mathbf{A}$ est la matrice dont l'élément (i, j) est a_{ij} .

J.-F. HÊCHE, Mathématiques 1, 2024 – 4

- Un **vecteur** est une suite ordonnée de n nombres réels, c.-à-d. un élément de $\mathbb{R}^n$.
- Chaque terme de la suite est appelé une **composante** du vecteur et son nombre n de composantes sa **dimension**.
- En algèbre linéaire il est usuel d'identifier un vecteur à n composantes à une matrice à une seule colonne, c.-à-d. une matrice de taille $n \times 1$. On parle alors de **vecteurs colonne** et on les note classiquement, comme en géométrie, à l'aide de lettres minuscules surmontées d'une flèche.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$
- Il est également possible (et parfois utile) d'interpréter un vecteur à n composantes comme une matrice à une seule rangée, c.-à-d. une matrice de taille $1 \times n$. On parle alors de **vecteurs ligne**.
- Par convention et sauf mention explicite contraire (par exemple à l'aide du signe transposé), on assimilera un vecteur à une matrice à une seule colonne : **les vecteurs sont par défaut des vecteurs colonne**.

- Deux matrices $A : m \times n$ et $B : p \times q$ sont **égales** si et seulement si
 - ▶ elles sont de même dimension : $m = p$ et $n = q$,
 - ▶ leurs éléments aux mêmes positions sont égaux :

$$a_{ij} = b_{ij}$$

quelle que soit la ligne $i = 1, \dots, m$ et la colonne $j = 1, \dots, n$.

- EXEMPLE. Pour les trois matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

on a $A \neq B$, $A \neq C$ et $B \neq C$.

- Une matrice est **carrée** si elle est de taille $n \times n$, c.-à-d. si elle a autant de lignes que de colonnes.
- Le nombre n de lignes (ou de colonnes) d'une matrice carrée est appelé l'**ordre** de la matrice (on parle alors d'une matrice d'ordre n).
- L'ensemble des matrices réelles d'ordre n est noté $M_n(\mathbb{R})$ (plutôt que $M_{n,n}(\mathbb{R})$).
- Les éléments $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ constituent la **diagonale principale**, ou plus simplement la **diagonale**, de A .
- Exemples.

▶ Matrices d'ordre 2 : $\begin{bmatrix} 10 & -20 \\ 222 & 235 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & \sin(\frac{\pi}{3}) \\ -\sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix}$

▶ Matrices d'ordre 3 : $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- Une matrice **carrée** $A = [a_{ij}]$ d'ordre n est **triangulaire supérieure** si tous les éléments en dessous de sa diagonale principale sont nuls, c'est-à-dire si

$$a_{ij} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq j < i \leq n.$$

- ALLURE GÉNÉRALE.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- EXEMPLES.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Matrices triangulaires inférieures

- Une matrice **carrée** $A = [a_{ij}]$ d'ordre n est **triangulaire inférieure** si tous les éléments en dessus de sa diagonale principale sont nuls, c'est-à-dire si

$$a_{ij} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i < j \leq n.$$

- ALLURE GÉNÉRALE.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- EXEMPLES.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -7 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Matrices diagonales

- Une matrice carrée dont tous les éléments en dehors de la diagonale principale sont nuls est dite **diagonale**.

- La matrice $A = [a_{ij}]$ de taille $n \times n$ est donc diagonale si et seulement si

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j.$$

- ALLURE GÉNÉRALE.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- EXEMPLES.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Matrices identités et matrices nulles

- Une matrice diagonale (et donc forcément carrée) dont tous les éléments diagonaux valent 1 est appelée **matrice identité**.

- La matrice identité d'ordre n est notée I_n voire simplement I si l'ordre de la matrice est clair dans le contexte.

- EXEMPLE.

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Une matrice dont tous les éléments sont nuls est appelée **matrice nulle**.

- La matrice nulle de taille $m \times n$ est notée $O_{m \times n}$, celle d'ordre n est notée O_n et si la taille est claire dans le contexte on notera tout simplement O .

- EXEMPLES.

$$O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Chapitre 2

Opérations matricielles



Multiplication par un scalaire et somme/différence matricielle

- On peut
 - ▶ multiplier une matrice A par un scalaire λ (un nombre réel) en **multipliant chaque élément de A par λ** ;
 - ▶ additionner deux matrices A et B **de même taille** en **additionnant les éléments correspondant de A et B** ;
 - ▶ soustraire deux matrices A et B **de même taille** en **soustrayant à chaque élément de A l'élément correspondant de B** .

■ EXEMPLES.

$$(-2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriétés et règles de calcul

- La multiplication par un scalaire et la somme matricielle obéissent aux règles usuelles du calcul arithmétique.
- Pour A , B et C des matrices de *même taille* et des scalaires λ et μ on a

- 1) Commutativité de la somme : $A + B = B + A$
- 2) Associativité de la somme : $(A + B) + C = A + (B + C)$
- 3) Associativité de la multiplication par un scalaire : $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A)$
- 4) Distributivités : $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ et $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- 5) Élément neutre et opposé : $A + 0 = 0 + A = A$ et $A - A = A + (-1)A = 0$

- Comme dans le cas d'un nombre réel, l'**opposé** d'une matrice A se calcule en multipliant A par -1 : $-A = (-1)A$. Il s'agit de l'unique matrice qui, additionnée à A , donne la matrice nulle.

Produit matriciel

- Pour deux matrices A et B , de tailles respectives $A : m \times r$ et $B : r \times n$, le **produit matriciel** de A et B **dans cet ordre** est la matrice $C = AB$ de taille $m \times n$ dont chaque élément (i, j) est égal à :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^r a_{ik}b_{kj}$$

- Dit autrement, l'élément (i, j) de $C = AB$ est obtenu en **sommant les produits terme à terme des éléments de la ligne i de A avec ceux de la colonne j de B** .

■ REMARQUES.

- ▶ Le produit AB n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .
- ▶ L'élément (i, j) du produit AB est égal au produit scalaire entre la ligne i de A et la colonne j de B .

Produit matriciel (2)

- Pour $A : m \times r$ et $B : r \times n$, on a

$$\begin{matrix} C \\ (m \times n) \end{matrix} = \begin{matrix} A \cdot B \\ (m \times r)(r \times n) \end{matrix}$$

et, graphiquement,

$$\begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{bmatrix}$$

avec

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$.

Exemples

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} & \rightarrow & \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix} & \text{et} & \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} & \rightarrow & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 10 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 1 \times 3 & 3 \times 1 & & 1 \times 1 & & 3 \times 1 & 1 \times 3 & & 3 \times 3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} & \rightarrow & \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{mais} & \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \text{n'est pas défini} \\ 2 \times 3 & 3 \times 1 & & 2 \times 1 & & & & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \rightarrow & \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} & \text{et} & \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & \rightarrow & \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ 2 \times 2 & 2 \times 2 & & 2 \times 2 & & 2 \times 2 & 2 \times 2 & & 2 \times 2 \end{matrix}$$

Propriétés et règles de calcul (2)

- Pour des matrices A, B, C de tailles compatibles et un scalaire λ on a

$$1) \text{ Associativité : } (AB)C = A(BC) \quad \text{et} \quad \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

L'associativité du produit s'étend à un nombre quelconque de matrices compatibles

$$ABCDE = A(B(C(DE))) = (AB)(C(DE)) = \dots = (((AB)C)D)E$$

Le résultat final est toujours le même mais le nombre d'opérations arithmétiques à effectuer peut varier fortement selon le placement des parenthèses.

$$2) \text{ Distributivités : } A(B + C) = AB + AC \quad \text{et} \quad (A + B)C = AC + BC$$

$$3) \text{ Le produit matriciel n'est pas commutatif et en général } AB \neq BA.$$

$$4) \text{ Élément neutre : } IA = A = AI$$

$$5) \text{ Élément absorbant : } A0 = 0 = 0A \quad \text{mais} \quad AB = 0 \not\Rightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0)$$

Puissances d'une matrice carrée

- Si A est une matrice carrée d'ordre n , il est possible de multiplier A par elle-même. On définit alors le **carré de A** :

$$A^2 = AA.$$

- En répétant le processus (A^2 est encore d'ordre n), on définit de proche en proche toutes les **puissances entières et positives de A** :

$$A^k = AA^{k-1} = A^{k-1}A = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ facteurs}}, \quad k \geq 1.$$

- Pour $k = 0$ on pose, quelle que soit la matrice carrée A d'ordre n (et comme dans le cas d'un nombre réel),

$$A^0 \stackrel{\text{def}}{=} I_n.$$

- EXEMPLE.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrices transposées

■ Soit une matrice $A : m \times n$ quelconque, la **matrice transposée** de A , notée A^T , est la matrice de taille $n \times m$ obtenue en échangeant le rôle des lignes et des colonnes de A .

■ Si $A = [a_{ij}]$ et $A^T = [\alpha_{ij}]$ on a alors

$$\alpha_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$$

ou, graphiquement,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

■ Les lignes de A^T sont les colonnes de A et les colonnes de A^T sont les lignes de A .

■ La matrice A^T est obtenue en effectuant une symétrie par rapport à la « diagonale » de A .

Propriétés de la transposition

■ Pour deux matrices A et B de tailles compatibles avec chaque opération on a

$$1) (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$2) (\lambda A)^T = \lambda A^T \quad \text{quel que soit le scalaire } \lambda$$

$$3) (A^T)^T = A$$

$$4) (AB)^T = B^T A^T$$

$$5) (A^T)^k = (A^k)^T \quad \text{quel que soit l'entier } k \geq 0$$

Matrices symétriques et antisymétriques

■ Une matrice A est **symétrique** si elle est égale à sa transposée, c.-à-d. si $A^T = A$ auquel cas on a

$$a_{ji} = a_{ij} \quad \text{quels que soient } i \text{ et } j.$$

■ Une matrice A est **antisymétrique** si son opposée est égale à sa transposée, autrement dit si $A^T = -A$ auquel cas on a

$$a_{ji} = -a_{ij} \quad \text{quels que soient } i \text{ et } j.$$

■ EXEMPLE.

Symétrique	Antisymétrique
$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 9 & 6 & -2 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 9 & 8 \\ -9 & 0 & -2 \\ -8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

■ **Propriété.** Les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours nuls.

Chapitre 3

Matrices inverses : Acte I



Matrices inversibles et matrices inverses

- Une matrice **carrée** A est dite **inversible** s'il existe une matrice X , forcément de même ordre que A , vérifiant :

$$AX = I \quad \text{et} \quad XA = I.$$

- Si une telle matrice X existe, elle est appelée la **matrice inverse** de A et est notée A^{-1} .
- PROPRIÉTÉ. Si une matrice A est inversible, son inverse est **unique**.

DÉMONSTRATION DE L'UNICITÉ DE L'INVERSE. Si X et Y sont deux inverses de A on a, en particulier, $XA = I$ et $AY = I$. Mais alors

$$X = XI = X(AY) = (XA)Y = IY = Y.$$

- PROPRIÉTÉ. Pour vérifier qu'une matrice X est bien l'inverse d'une matrice A , il suffit de vérifier une des deux conditions $AX = I$ ou $XA = I$, l'autre étant alors une conséquence de la première.
- TERMINOLOGIE. On dit aussi d'une matrice carrée inversible qu'elle est **régulière** et d'une matrice carrée non inversible qu'elle est **singulière**.

Exemples

1. La matrice $A = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$ est inversible, et son inverse est $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2 \end{bmatrix}$ car

$$\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}.$$

2. La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible, car la matrice $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ vérifie

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

et

$$XA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

On a donc $A^{-1} = X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

REMARQUE. Rappelons qu'il est en fait suffisant de vérifier une des deux conditions précédentes ($AX = I$ ou $XA = I$) pour affirmer que X est l'inverse de A .

Exemples (2)

3. La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ n'est pas inversible (elle est singulière).

En effet, quelle que soit la matrice $X = [x_{ij}]$, l'élément $(2, 2)$ du produit AX sera nul :

$$(AX)_{22} = 0x_{12} + 0x_{22} + 0x_{32} = 0.$$

Il est donc impossible d'avoir $AX = I$.

4. La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est inversible et égale à son inverse ($A^{-1} = A$) car

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Inverse d'une matrice d'ordre 2

- Considérons une matrice A quelconque, d'ordre 2 :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

- Inverser cette matrice revient à chercher une matrice

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

vérifiant

$$\begin{aligned} AX &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ax_{11} + bx_{21} & ax_{12} + bx_{22} \\ cx_{11} + dx_{21} & cx_{12} + dx_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Inverse d'une matrice d'ordre 2 (suite)

- La comparaison, élément par élément, des deux dernières matrices amène les deux systèmes d'équations linéaires

$$\begin{cases} ax_{11} + bx_{21} = 1 \\ cx_{11} + dx_{21} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} ax_{12} + bx_{22} = 0 \\ cx_{12} + dx_{22} = 1 \end{cases}$$

- La résolution de ces systèmes n'est possible que si

$$ad - bc \neq 0$$

(nous verrons bientôt que ce nombre s'appelle le **déterminant** de la matrice A), auquel cas on obtient

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Puissances négatives d'une matrice régulière

- Rappelons que l'on a défini les puissances entières et positives d'une matrice carrée $A : n \times n$ par

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ facteurs}}, \quad k \geq 1.$$

- Si la matrice A est inversible, on définit ses puissances entières négatives par

$$A^{-k} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1}}_{k \text{ facteurs}}, \quad k \geq 1.$$

- RAPPEL. Pour toute matrice carrée A , inversible ou non, $A^0 = I$.

Exemple

- Pour la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, d'inverse $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, on a

$$A^{-2} = A^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

et, plus généralement,

$$A^{-k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{bmatrix} \quad \text{quel que soit l'entier } k \geq 1.$$

- Comme $A^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2k & 1 \end{bmatrix}$ quel que soit l'entier $k \geq 1$ (voir les exercices), on peut conclure que

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2k & 1 \end{bmatrix} \quad \text{quel que soit l'entier } k.$$

Soit $A : n \times n$ une matrice **inversible**, alors

1) A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$,

2) A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k = A^{-k}$, quel que soit l'entier k

3) λA est inversible si $\lambda \neq 0$ et $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$,

4) A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

De plus, si $A : n \times n$ et $B : n \times n$ sont deux matrices **inversibles** de même ordre,

5) AB est une matrice inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Chapitre 4

Systèmes d'équations linéaires



Équation linéaire

- Une **équation linéaire** est une équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

où

- ▶ les variables réelles $x_1, \dots, x_n$ sont les **inconnues** ;
- ▶ les nombres réels $a_1, \dots, a_n$ sont les **coefficients** ;
- ▶ le nombre réel b est le **membre de droite** ou le **second membre** de l'équation.

- REMARQUE. Dans une équation linéaire les inconnues apparaissent toujours « telle quelle » (à la puissance 1 et sans transformation) et ne sont jamais multipliées entre elles. Une équation comportant des termes tels que x_1^2 , x_1x_3 , x_2/x_1 , $\sin(x_2)$, e^{-3x_1} , $\sqrt{1/x_2}$, ... ne serait pas linéaire.

- EXEMPLES. $x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$ et $2x + y = 3$ sont des équations linéaires (d'inconnues x_1, x_2 et x_3 pour la première et x et y pour la seconde) mais $3x_1x_3 + x_2 = 0$ et $\ln(x) + y = 1$ n'en sont pas.

Solution d'une équation linéaire

- Une **solution** de l'équation linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

est un n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ vérifiant l'équation.

- EXEMPLE. Le triplet $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, 1)$ est une solution de l'équation

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$$

Car $2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = 6 - 4 = 2$.

- Plutôt que de parler de n -uples, nous parlerons de **vecteurs** (colonne) de $\mathbb{R}^n$. Ainsi le vecteur

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

est une solution de l'équation $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$.

Ensemble des solutions d'une équation linéaire

- L'**ensemble S des solutions** de l'équation linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

est l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant l'équation :

$$S = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \}.$$

- Cette représentation de S est implicite, on dit aussi **cartésienne**, et elle n'est pas très utile lorsqu'il s'agit de donner ou de construire des solutions particulières de l'équation.

- Résoudre une équation linéaire consiste à donner une représentation explicite, appelée **paramétrique**, de son ensemble de solutions S .

Résolution d'une équation linéaire : exemple

- Considérons l'équation linéaire

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2.$$

- En divisant cette équation par 2 (le coefficient de x_1) et en isolant x_1 , l'équation devient

$$x_1 = 1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3.$$

- Pour obtenir une solution particulière de l'équation, il suffit d'attribuer des valeurs **choisies librement** aux inconnues x_2 et x_3 (les **variables indépendantes**) puis de calculer la valeur à attribuer à x_1 (la **variable dépendante**) à l'aide de la relation précédente.

- EXEMPLE. En posant $x_2 = 0$ et $x_3 = 1$ on obtient $x_1 = 1 - 0 + 2 = 3$ et on retrouve la solution

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Suite de l'exemple

- Dans l'équation $x_1 = 1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3$ les inconnues x_2 et x_3 jouent alors le rôle de **paramètres** et on notera classiquement s_2 et s_3 (ou α et β , ou s et t) leur valeur.

- Toutes les solutions de l'équation cartésienne $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$ s'écrivent alors **sous forme paramétrique**

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{3}{2}s_2 + 2s_3 \\ x_2 = s_2 \\ x_3 = s_3 \end{cases} \quad \text{avec } s_2, s_3 \in \mathbb{R}.$$

- Pour obtenir l'ensemble S des solutions de l'équation, il suffit de réécrire, sous **forme vectorielle**, la représentation paramétrique précédente. On obtient ainsi

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s_2, s_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cas général

- On considère l'équation linéaire $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ dans laquelle on suppose $a_1 \neq 0$.

- En divisant l'équation par a_1 et en isolant x_1 , elle s'écrit

$$x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}x_2 - \dots - \frac{a_n}{a_1}x_n.$$

- En introduisant des paramètres réels $s_2, \dots, s_n$ pour les variables $x_2, \dots, x_n$ on peut exprimer toutes les solutions de l'équation de départ sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}s_2 - \dots - \frac{a_n}{a_1}s_n \\ x_2 = s_2 \\ \vdots \\ x_n = s_n \end{cases} \quad \text{avec } s_2, \dots, s_n \in \mathbb{R}$$

Cas général (2)

- Sous forme vectorielle, le système précédent s'écrit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{b}{a_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{d}} + s_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{r}_2} + \dots + s_n \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{a_n}{a_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{r}_n}, \quad \text{avec } s_2, \dots, s_n \in \mathbb{R}$$

et la représentation paramétrique de l'ensemble S des solutions est

$$S = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \vec{d} + s_2\vec{r}_2 + \dots + s_n\vec{r}_n, s_2, \dots, s_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Le vecteur $\vec{d}$ est appelé la **solution particulière** de l'équation alors que les vecteurs $\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ correspondent à des solutions (linéairement indépendantes) de l'**équation homogène** (c.-à-d. de l'équation où le membre de droite b est égal à zéro).

Remarques

- Lors de la résolution de l'équation, on peut isoler n'importe quelle variable x_i dont le coefficient a_i est non nul.
- Ainsi, en isolant x_2 dans l'équation $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$, on obtient l'équation équivalente

$$x_2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_3$$

dont l'ensemble S des solutions, sous forme paramétrique, s'écrit

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + s_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + s_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, s_1, s_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

- QUESTION : *Que se passe-t-il si tous les coefficients a_i de l'équation sont nuls ?*

Système d'équations linéaires

- Un **système de m équations linéaires à n inconnues** est formé de m équations linéaires dans les **mêmes** inconnues $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Une **solution** d'un tel système est un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant **simultanément** toutes les équations.
- EXEMPLE. Le vecteur $\vec{x} = [2 \ 4 \ 0 \ 1]^T$ est une solution du système de 2 équations à 4 inconnues

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - 6x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Ensemble des solutions d'un système linéaire

- Un système d'équations linéaires peut posséder
 - ▶ 0 solution,
 - ▶ 1 solution unique,
 - ▶ une infinité de solutions.
- Un système qui n'a pas de solutions, autrement dit dont l'ensemble S des solutions est vide ($S = \emptyset$), est dit **inconsistant** ou **incompatible**.
- Comme pour le cas d'une seule équation, **résoudre un système d'équations linéaires** consiste à **donner une représentation paramétrique** de l'ensemble S de ses solutions.
- On obtiendra cette représentation paramétrique à l'aide de l'**algorithme de Gauss-Jordan**.

Représentation matricielle d'un système

- Un système de m équations linéaires à n inconnues peut être représenté sous forme matricielle par l'équation matricielle

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

- TERMINOLOGIE.
 - ▶ A est la **matrice des coefficients du système**, ou simplement la **matrice du système**,
 - ▶ $\vec{x}$ est le **vecteur des inconnues**,
 - ▶ $\vec{b}$ est le **vecteur des membres de droite** ou **des seconds membres**.

Exemple

- Le système de 2 équations à 4 inconnues

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - 6x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- La matrice A (des coefficients) du système, le vecteur $\vec{x}$ des inconnues et le vecteur $\vec{b}$ des seconds membres sont

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Matrice augmentée d'un système

- La **matrice augmentée** d'un système d'équations linéaires est la matrice

$$\overline{A} = [A \mid \vec{b}]$$

obtenue en juxtaposant la matrice A du système et le membre de droite $\vec{b}$.

- EXEMPLE. La matrice augmentée correspondant au système

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - 6x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

est

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -6 & 2 & 4 \end{array} \right].$$

Matrice échelonnée et échelonnée réduite

- Une matrice vérifiant les propriétés suivantes est dite **échelonnée** :

- ▶ dans toute ligne contenant des éléments non nuls, l'élément non nul le plus à gauche est égal à 1 (un tel élément s'appelle un « **1 directeur** »);
- ▶ toutes les lignes nulles sont regroupées en bas de la matrice;
- ▶ pour toute paire de lignes non nulles, le 1 directeur de la ligne qui se trouve le plus haut est à gauche du 1 directeur de celle qui se trouve au-dessous.

- Une matrice **échelonnée** possédant également la propriété suivante est dite **échelonnée réduite** :

- ▶ toute colonne contenant un 1 directeur ne contient que des zéros partout ailleurs.

Exemples

- Parmi les quatre matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ A et B sont échelonnées réduites,
- ▶ C est échelonnée mais pas réduite,
- ▶ D n'est pas échelonnée.

Solution d'un système échelonné réduit

- L'ensemble S des solutions d'un système d'équations linéaires $A\vec{x} = \vec{b}$ dont la matrice augmentée $\overline{A}$ est échelonnée réduite se construit très facilement :
 - 1) Si la dernière colonne de $\overline{A}$ contient un 1 directeur, alors le système est incompatible et on a alors $S = \emptyset$.
 - 2) Sinon, on détermine l'ensemble S des solutions
 - (a) en introduisant un paramètre réel pour chaque variable associée à une colonne qui **ne contient pas** un 1-directeur.
Ces variables sont les **variables indépendantes**.
 - (b) en isolant dans chaque ligne non nulle la variable associée à la colonne contenant un 1 directeur.
Ces variables sont les **variables dépendantes**.
- REMARQUE. Si toutes les variables sont dépendantes, il n'y a pas de paramètres et la solution est **unique** !

Exemple 1

- La matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

est échelonnée et réduite et correspond au système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \end{cases}$$

- La troisième équation se résume à

$$0 = 1$$

et elle est évidemment impossible à satisfaire.

- Le système est inconsistent et ne possède donc aucune solution.

Exemple 2

- La matrice augmentée, échelonnée et réduite,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

correspond au système

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 1/2 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_4 = 3/4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

- En passant x_3 (la seule variable indépendante) à droite dans les deux premières équations et en introduisant un paramètre s pour x_3 on obtient...

Exemple 2 (2)

- ... toutes les solutions du système sous forme paramétrique

$$\begin{cases} x_1 = 1/2 + 3s \\ x_2 = -1 - s \\ x_3 = s \\ x_4 = 3/4 \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

- L'ensemble S des solutions du système associé à la matrice augmentée est

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 0 \\ 3/4 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chapitre 5

Algorithme de Gauss-Jordan



Opérations élémentaires

- L'algorithme de Gauss-Jordan est une démarche **systématique** permettant de transformer toute matrice en une matrice échelonnée réduite.
- La méthode utilise trois **opérations élémentaires (sur les lignes)** d'une matrice
 - ▶ multiplier une ligne par un nombre non nul ;
 - ▶ ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne ;
 - ▶ échanger/permuter deux lignes.
- Sa justification repose sur la propriété suivante :

Toute matrice augmentée peut être transformée en une matrice échelonnée réduite **équivalente** (c.-à-d. correspondant à un système linéaire possédant le même ensemble de solutions) à l'aide des trois opérations élémentaires précédentes.

Première opération élémentaire

- La première opération élémentaire sur les lignes d'une matrice consiste à multiplier chaque élément d'une ligne d'une matrice par un nombre réel **non nul**.
- Cette opération permet de créer un 1 directeur dans une ligne dont le premier élément non nul n'est pas égal à 1.
- EXEMPLE.

Système de départ

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

Matrice augmentée $\overline{A}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

En multipliant la première ligne de $\overline{A}$ par $\frac{1}{2}$, on crée un 1 directeur :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right]$$

Deuxième opération élémentaire

- La deuxième opération élémentaire sur les lignes d'une matrice consiste à ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne.
- Cette opération permet d'annuler des éléments non nuls situés au-dessous ou au-dessus d'un 1 directeur.
- EXEMPLE.

En soustrayant 4 fois la première ligne à la troisième, on élimine l'élément non nul situé en dessous du 1 directeur de la première colonne :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 6 \end{array} \right]$$

Troisième opération élémentaire

- La troisième opération élémentaire sur les lignes d'une matrice consiste simplement à échanger deux lignes.
- Elle permet de remonter un 1 directeur, opération qui peut être nécessaire afin de satisfaire la troisième propriété caractérisant les matrices échelonnées.

EXEMPLE.

En échangeant la deuxième et la troisième ligne de la matrice, on s'assure que le 1 directeur de la deuxième ligne se trouvera à gauche de celui de la troisième ligne.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Suite de l'exemple

- En divisant par 2 la troisième ligne de la matrice courante, on crée un 1 directeur dans la troisième ligne et on obtient une matrice échelonnée :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{array} \right]$$

- Il reste à réduire la matrice en éliminant les éléments non nuls au-dessus des 1 directeurs (à l'aide de la deuxième opération élémentaire) en commençant par les 1 directeurs les plus bas.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \end{array}} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{array} \right]$$

Fin de l'exemple

- Une dernière opération permet d'annuler l'élément au-dessus du 1 directeur de la deuxième ligne.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{array} \right]$$

- La matrice est échelonnée réduite et l'ensemble S des solutions du système est

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 10 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s_4 \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 3 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, s_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Algorithme de Gauss-Jordan

- L'algorithme de Gauss-Jordan procède en deux phases.

- Pendant la première (l'**élimination** ou l'**échelonnement**), on transforme la matrice augmentée du système à résoudre en une matrice échelonnée.
- Dans la deuxième phase (la **réduction**), la matrice échelonnée est transformée en une matrice échelonnée réduite.

Phase 1 : Élimination (échelonnement)

- La ligne courante est définie comme la première ligne de la matrice et la colonne courante comme la première colonne de la matrice.
- On parcourt les éléments de la colonne courante, à partir de la ligne courante, jusqu'à en trouver un non nul.
Si tous les éléments sont nuls, on augmente de un la colonne courante et on recommence la recherche d'un élément non nul.
Si on a épuisé toutes les colonnes, la matrice est échelonnée et on passe à la réduction.

Algorithme de Gauss-Jordan (2)

- Si l'élément non nul trouvé n'est pas dans la ligne courante, on permute deux lignes afin que cet élément non nul se retrouve dans la ligne courante.
- On divise la ligne courante par son premier élément non nul afin de créer un 1 directeur.
- On élimine les éléments (non nuls) en dessous de ce 1 directeur en ajoutant aux lignes correspondantes de la matrice des multiples adéquats de la ligne courante.
- S'il reste encore des lignes dans la matrice, on augmente de un la ligne courante et on retourne au point 2.

■ Phase 2 : Réduction

- La ligne courante est définie comme la dernière ligne contenant un 1-directeur.
- On élimine les éléments non nuls au-dessus du 1 directeur de la ligne courante en ajoutant des multiples adéquats de cette ligne à celles qui la précèdent.
- Si la ligne courante n'est pas la première de la matrice, on diminue de un la ligne courante et on retourne au point précédent.

Exemple 2

1 Définitions

2 Opérations

3 Matrices inverses

4 Systèmes linéaires

5 Gauss-Jordan

Opérations élémentaires

Première opération

Deuxième opération

Troisième opération

Algorithme de Gauss

Exemple

6 Inverses

7 Déterminants

8 Déterminants

9 Déterminants

10 Cramer

11 Inverses

- Pour déterminer, sous forme paramétrique, l'ensemble des solutions du système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = -5 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_5 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$$

On construit la matrice augmentée $\overline{A}$ associée et on l'échelonne et la réduit

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 6 & 2 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & 12 \\ 0 & 3 & 0 & 9 & 3 & -3 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array} \end{aligned}$$

Exemple 2 (2)

$$\begin{aligned} \overline{A} &\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 9 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & 12 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{6}L_3 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/6 & -2 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/6 & -2 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/6 & -2 \end{array} \right] \quad (\text{matrice échelonnée réduite}) \end{aligned}$$

Exemple 2 (3)

- Le système correspondant à la matrice échelonnée réduite est

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -4 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_5 = 5 \\ x_4 + \frac{1}{6}x_5 = -2. \end{cases}$$

- L'ensemble S des solutions du système initial est le même que celui du système présenté ci-dessus et est donc

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ -1/6 \\ 1 \end{bmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chapitre 6

Matrices inverses : Acte II



Calcul de l'inverse d'une matrice

- Si A est une matrice inversible, pour déterminer son inverse il suffit de résoudre l'équation matricielle

$$AX = I.$$

- Si A est d'ordre n , on peut envisager de résoudre cette équation en résolvant successivement n systèmes linéaires, un pour chaque colonne de X :

$$A\vec{x}_1 = \vec{e}_1, \quad A\vec{x}_2 = \vec{e}_2, \quad \dots \quad A\vec{x}_n = \vec{e}_n$$

où $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ dénotent les colonnes de la matrice X cherchée et $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ celles de la matrice identité.

Exemple

- Pour calculer l'inverse de $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ on pourrait résoudre

$$A\vec{x}_1 = \vec{e}_1 \iff \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$A\vec{x}_2 = \vec{e}_2 \iff \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

à l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan.

Exemple (suite)

- Les matrices augmentées, échelonnées et réduites, des deux systèmes sont

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad \text{et} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

et leurs solutions, uniques, sont respectivement

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

- Ainsi, l'inverse X de A est $X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$

Algorithme de Gauss pour le calcul de l'inverse

- L'approche développée dans l'exemple précédent, si elle est correcte, n'est pas efficace car on échelonne et réduit n fois la matrice A alors qu'il est possible de déterminer A^{-1} (ou de prouver que A n'est pas inversible) en appliquant une seule fois l'algorithme de Gauss-Jordan :

1. Former la matrice augmentée $[A \mid I]$.
2. Échelonner et réduire cette matrice afin d'obtenir une matrice $[R \mid X]$.
3. Si $R = I$, alors $A^{-1} = X$,
Sinon A n'est pas inversible.

- REMARQUE. Si A n'est pas inversible, la matrice R contient au moins une ligne nulle. En fait si en échelonnant et réduisant $[A \mid I]$ on crée une ligne de zéros à gauche, on peut arrêter l'algorithme car la matrice A^{-1} n'existe pas.

Exemples

Pour la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ on a la suite de matrices augmentées équivalentes

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_3 \leftarrow -L_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right].$$

Exemples (suite)

La matrice échelonnée réduite équivalente à A étant l'identité, A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pour la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ on a $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -2 & 1 \end{array} \right].$$

La matrice R contient une ligne nulle et A n'est pas inversible.

Chapitre 7

Déterminants : Formule de Laplace



- On associe à toute matrice **carrée** A un **nombre réel** appelé le **déterminant** de A et noté

$$|A| \quad \text{ou} \quad \det(A).$$

- Si $A = [a_{ij}]$, son déterminant sera noté en remplaçant les crochets (ou les parenthèses) entourant les éléments de A par des barres verticales :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Attention, cette expression désigne bien un nombre réel et non pas une matrice !

Formule de Laplace

- La définition générale du déterminant d'une matrice repose sur la notion de permutations, sujet qui ne sera pas abordé dans ce cours. Nous adopterons ici une définition alternative (mais équivalente), appelée la **formule de Laplace**, permettant de calculer de manière récursive le déterminant d'une matrice.

- ▶ Le déterminant d'une matrice A d'ordre 1 est égal à son unique élément. Ainsi, si $A = [a_{11}]$ on a

$$\det(A) = |A| \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}.$$

- ▶ Le déterminant d'une matrice A d'ordre n est obtenu par **développement selon une colonne ou une ligne de A** . Pour la colonne j ce développement s'écrit :

$$\det(A) = |A| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|.$$

où A_{ij} est la sous-matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A (il s'agit donc d'une matrice carrée d'ordre $n - 1$).

Formule de Laplace (suite)

- Le déterminant $M_{ij} = |A_{ij}|$ de la sous-matrice A_{ij} est appelé un **mineur** de A et sa version « signée »

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

est appelée le **cofacteur** (i, j) de A .

- La formule de Laplace pour le développement selon la colonne j s'écrit alors

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} |A_{ij}| = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}$$

et pour le développement selon la ligne i elle s'écrit

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} |A_{ij}| = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}.$$

Déterminants des matrices 2×2

- En développant le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ selon sa première colonne, on obtient

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{21}(-1)^{2+1}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

- Si on développe selon la deuxième ligne on obtient la même valeur :

$$|A| \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{21}(-1)^{2+1}a_{12} + a_{22}(-1)^{2+2}a_{11} = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}.$$

- RÈGLE VISUELLE.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$- a_{12}a_{21}$ $+ a_{11}a_{22}$ $- a_{21}a_{12}$ $+ a_{11}a_{22}$

Exemples

- Pour la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ on a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) - (-1) \cdot 2 = -15 + 2 = -13$$

- Pour la matrice $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ on obtient

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 12 - 12 = 0.$$

- PROPRIÉTÉ. Au vu de la formule établie pour l'inverse d'une matrice d'ordre 2, une telle matrice est inversible si et seulement si son déterminant est différent de zéro.

Cette propriété s'étend à des matrices d'ordre quelconque : A inversible $\iff |A| \neq 0$.

Déterminants des matrices 3×3

- Le déterminant d'une matrice $A = [a_{ij}]$ d'ordre 3 est

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} + a_{32}a_{13}) + a_{13}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}.$$

- EXEMPLE.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) - 4(1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) + 5(1 \cdot 1 - 3 \cdot 2)$$

$$= 2 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) + 5 \cdot (-5)$$

$$= 6 + 4 - 25 = -15$$

Règle de Sarrus

- Les représentations graphiques suivantes, connues sous le nom de **règle de Sarrus**, peuvent être utiles lors du calcul du déterminant d'une matrice d'ordre 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$- - - + + +$ $- - - + + +$

- EXEMPLE.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 1 - (3 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 2) = 25 - 40 = -15$$

- ATTENTION ! La règle de Sarrus n'est valide que pour les déterminants 3×3 et ne se généralise pas au calcul du déterminant d'une matrice d'ordre $n \neq 3$.

Déterminants des matrices $n \times n$

- Pour des matrices de grande taille, le calcul du déterminant par développement selon une ligne ou une colonne n'est pas envisageable en pratique car il est beaucoup trop lent sauf si la matrice contient de nombreux zéros.
- En effet, **la formule de Laplace donnant toujours le même résultat quelle que soit la colonne ou la ligne choisie pour le développement**, si la matrice contient de nombreux éléments nuls, des choix judicieux (pour les lignes et les colonnes des développements) permettent de réduire considérablement le nombre de cofacteurs à calculer.
- Dans le cas général, les déterminants se calculent en appliquant des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de la matrice (comme dans l'algorithme de Gauss-Jordan) jusqu'à ce que l'on soit ramené au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire (ou que suffisamment de zéros soient apparus pour pouvoir appliquer la formule de Laplace).

Déterminants des matrices triangulaires

- En développant le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure selon sa première colonne (ou selon sa première ligne si la matrice est triangulaire inférieure) on montre sans difficultés le résultat suivant.

Théorème. Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au **produit des éléments de sa diagonale principale**.

- EXEMPLES.

$$\triangleright \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot 1 = 12$$

$$\triangleright \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot (-4) = -24$$

$$\triangleright \det(\mathbf{I}_n) = 1^n = 1$$

Chapitre 8

Déterminants : Règles de calcul et propriétés



Déterminants et opérations élémentaires

- Si A est une matrice carrée d'ordre n , effectuer une opération élémentaire sur les lignes de A modifie son déterminant de la manière suivante :

- ▶ multiplier une ligne de A par un nombre réel λ multiplie le déterminant par λ ;
- ▶ additionner à une ligne de A un multiple d'une autre ligne ne modifie pas le déterminant ;
- ▶ échanger deux lignes de A change le signe du déterminant.

- Les résultats précédents s'appliquent également aux opérations élémentaires sur les colonnes.

- La première et la troisième règles découlent directement de la formule de Laplace. Pour la deuxième, elle sera acceptée sans démonstration.

Exemples

- Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

En développant son déterminant selon la deuxième ligne on obtient

$$\det(A) = -3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (4 - 20) = -48.$$

- Si on multiplie la première ligne de A par $\frac{1}{2}$ on obtient la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Son déterminant est égal à

$$\det(B) = -3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (2 - 10) = -24.$$

- Le déterminant de B est bien égal à celui de A divisé par 2 : $\det(B) = \frac{1}{2} \det(A)$.

Exemples (2)

- Si on additionne 5 fois la première ligne à la troisième ligne de la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

on obtient la matrice

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -8 & 11 \end{bmatrix}.$$

- Toujours en développant selon la deuxième ligne, le déterminant de C est

$$\det(C) = -3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1) \cdot (-8) = -24$$

- Comme attendu, C et B ont le même déterminant : $\det(C) = \det(B)$.

Exemples (3)

- Si on permute maintenant les deux dernières lignes de C on obtient la matrice triangulaire supérieure

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -8 & 11 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

- Son déterminant est simplement la produit de ses éléments diagonaux et il est bien égal à l'opposé de celui de C :

$$\det(D) = 1 \cdot (-8) \cdot (-3) = 24 = -\det(C).$$

- En retraçant les opérations effectuées, on a $\det(B) = \frac{1}{2} \det(A)$, $\det(C) = \det(B)$ et $\det(D) = -\det(C)$ ou encore

$$\det(A) = 2 \cdot \det(B) = 2 \cdot \det(C) = 2 \cdot (-1) \cdot \det(D) = -2 \cdot 24 = -48.$$

- REMARQUE. Les exemples qui précèdent ne sont rien d'autre que *des exemples* et en aucun cas une démonstration des règles de transformation qu'elles illustrent.

Règles de calcul

Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$, alors

$$1) \det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det(A) \text{ quel que soit le nombre réel } \lambda, \quad |\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$$

$$2) \det(A^T) = \det(A), \quad |A^T| = |A|$$

$$3) \det(AB) = \det(A) \det(B), \quad |AB| = |A| \cdot |B|$$

$$4) \det(A^k) = \det(A)^k \text{ quel que soit l'entier positif } k. \quad |A^k| = |A|^k$$

De plus, si A est inversible,

$$5) \det(A^{-1}) = 1 / \det(A) = (\det(A))^{-1}. \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$$

$$6) \det(A^{-k}) = (\det(A))^{-k} \text{ quel que soit l'entier } k. \quad |A^{-k}| = |A|^{-k}$$

Propriétés

Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$, alors

$$1) A \text{ est inversible si et seulement si } \det(A) \neq 0,$$

$$2) \text{ le produit } AB \text{ est inversible si et seulement si } A \text{ et } B \text{ sont inversibles et on a alors}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

$$3) \text{ si } A \text{ possède une ligne ou une colonne de zéros alors } \det(A) = 0 \text{ et } A \text{ est singulière (non inversible),}$$

$$4) \text{ si } A \text{ possède deux lignes identiques ou deux colonnes identiques alors } \det(A) = 0 \text{ et } A \text{ est singulière.}$$

Chapitre 9

Déterminants : Calcul d'un déterminant d'ordre n



Calcul du déterminant d'une matrice d'ordre n

- Pour calculer le déterminant d'une matrice $A : n \times n$ d'ordre $n > 3$ quelconque on applique une suite d'opérations élémentaires sur les lignes (ou sur les colonnes) de la matrice A afin de ramener le calcul de son déterminant à celui d'une matrice triangulaire T .
- En pratique, afin de préserver une rédaction correcte et de limiter les risque d'erreurs de calcul, on veillera à conserver une suite d'égalités entre les différents déterminants rencontrés.
- En partant du déterminant de A ,
 - ▶ on multiplie par -1 le nouveau déterminant pour chaque échange de lignes (ou de colonnes) ;
 - ▶ on divise par λ le nouveau déterminant, à chaque fois qu'une ligne (ou une colonne) est multipliée par λ .
- Si une ligne (ou une colonne) nulle apparaît en cours de calcul, on peut évidemment s'arrêter immédiatement car le déterminant de A est nul.

Exemple

Considérons la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 9 & 3 \end{bmatrix}$.

Le calcul de son déterminant amène la suite d'égalités

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_4 \end{array} \\
 &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Exemple (2)

Ainsi,

$$|A| = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot (-4) = 16.$$

REMARQUE. En combinant opérations élémentaires et formule de Laplace on a aussi, en développant selon la première colonne après les 3 opérations initiales,

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 6 \\ -1 & -7 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-24 + 8) = 16.
 \end{aligned}$$

Chapitre 10

Systèmes réguliers et règle de Cramer



Systèmes carrés, réguliers et singuliers

- Un système **carré** est un système de n équations linéaires à n inconnues. Sous forme matricielle, un tel système s'écrit

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

avec $\mathbf{A} : n \times n$, $\vec{x} : n \times 1$ et $\vec{b} : n \times 1$.

- Si la matrice $\mathbf{A}$ est inversible (régulière), le système est dit **régulier** ou **de Cramer**. Il possède alors une solution **unique** égale à

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}.$$

- Si la matrice $\mathbf{A}$ n'est pas inversible (c.-à-d. si elle est singulière), le système est dit **singulier** et il possède soit zéro solution (il est inconsistant) soit une infinité de solutions.

Règle de Cramer

- On considère un système **carré** $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \quad (\text{la colonne } k \text{ de } \mathbf{A} \text{ est notée } \vec{a}_k).$$

- Le système est régulier si et seulement si $\mathbf{A}$ est inversible, c.-à-d. si et seulement si $|\mathbf{A}| \neq 0$.
- Si tel est le cas, le système possède une solution unique qui peut être calculée, inconnue après inconnue, à l'aide des formules suivantes, connues sous le nom de **règle de Cramer**,

$$x_k = \frac{\det(\mathbf{A}_k)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{|\mathbf{A}_k|}{|\mathbf{A}|}, \quad k = 1, \dots, n$$

où

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_{k-1} & \vec{b} & \vec{a}_{k+1} & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$$

est la matrice obtenue en remplaçant la colonne k de $\mathbf{A}$ par le second membre $\vec{b}$.

Exemple

Pour le système régulier $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ on a

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{3} & 2 & 3 \\ \mathbf{8} & 0 & 8 \\ \mathbf{2} & 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-16}{1}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{3} & 3 \\ 1 & \mathbf{8} & 8 \\ 2 & \mathbf{2} & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{5}{1}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \mathbf{3} \\ 1 & 0 & \mathbf{8} \\ 2 & 5 & \mathbf{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{1}$$

et son unique solution est

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- Dire que $\vec{x}$ est solution de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ revient à dire que $\vec{b}$ est une combinaison linéaire des colonnes de A dont les coefficients sont les composantes de $\vec{x}$:

$$A\vec{x} = \vec{b} \iff \vec{b} = A\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \vec{a}_i$$

où $\vec{a}_i$ désigne la colonne i de A , $i = 1, \dots, n$.

- On a alors

$$|A_1| = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \vec{a}_i & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{vmatrix}.$$

- On peut ensuite, sans changer la valeur du déterminant, soustraire de la première colonne x_2 fois la deuxième puis x_3 fois la troisième et ainsi de suite jusqu'à x_n fois la dernière. De la première colonne il ne reste plus que $x_1 \cdot \vec{a}_1$ et

$$|A_1| = \begin{vmatrix} x_1 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{vmatrix} = x_1 |A|.$$

Ainsi $x_1 = |A_1|/|A|$.

- Pour terminer il suffit de répéter le même raisonnement pour les autres composantes de $\vec{x}$.

Chapitre 11

Matrices inverses : Acte III



Mineurs et cofacteurs

- Soit A une matrice carrée d'ordre n ,
 - la sous-matrice d'ordre $n - 1$, obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A est notée A_{ij} ;
 - le déterminant $M_{ij} = |A_{ij}|$ de cette sous-matrice est appelée le **mineur** (i, j) de la matrice A ;
 - le **cofacteur** (i, j) de A s'obtient en « signant » le mineur M_{ij} , c.-à-d. en le multipliant par $(-1)^{i+j}$:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|.$$

- REMARQUE. La « matrice des signes » est une matrice « en damier » :

$$[(-1)^{i+j}]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

Matrices des cofacteurs

- La **matrice des cofacteurs** de A , aussi appelée **comatrice** de A , est la matrice C dont l'élément (i, j) est égal au cofacteur C_{ij} de A :

$$C = [C_{ij}]_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, n}$$

- EXEMPLE. La matrice des cofacteurs de $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ est

$$C = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 9 & -21 \\ -1 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Matrice inverses et matrices des cofacteurs

- Soit A une matrice carrée de déterminant non nul, l'inverse de A peut être calculée en divisant la transposée de la matrice des cofacteurs de A par le déterminant de A :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T$$

où C est la matrice des cofacteurs de A .

- EXEMPLE. Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ on a $C = \begin{bmatrix} -2 & 9 & -21 \\ -1 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ et

$$|A| = 4 + 9 - 12 - (-12 + 6 + 6) = 1.$$

La matrice inverse de A est alors

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 9 & -21 \\ -1 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 1 \\ -21 & -9 & -2 \end{bmatrix}.$$

Exemple

- Considérons une matrice A d'ordre 2 :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

- Sa matrice des cofacteurs est

$$C = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

et son déterminant est

$$|A| = ad - bc.$$

- Si $|A| \neq 0$, la matrice inverse de A est

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

et on retrouve (évidemment) la formule établie précédemment.

Matrices inversibles, déterminants et systèmes carrés

Pour toute matrice carrée $A : n \times n$ les affirmations suivantes sont équivalentes :

- 1) A est inversible.
- 2) Le déterminant de A est non nul.
- 3) Le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ ne possède que la solution triviale $\vec{x} = \vec{0}$.
- 4) Le système $A\vec{x} = \vec{b}$ possède une solution *unique* quel que soit le second membre $\vec{b}$, solution égale à

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

- 5) Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
- 6) Les lignes de A sont linéairement indépendantes.

Combinaisons linéaires

- Le vecteur $\vec{b}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ s'il existe deux nombres réels λ_1 et λ_2 tels que

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2.$$

- Plus généralement, si $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ sont k vecteurs de $\mathbb{R}^n$, le nouveau vecteur

$$\vec{b} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{a}_i = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k$$

est une **combinaison linéaire** de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$, les nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ étant les **coefficients** de la combinaison.

- Une combinaison linéaire est donc une somme pondérée de vecteurs, les poids étant appelés les coefficients de la combinaison.

Indépendance linéaire

- Soit $F = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La famille F est dite **libre** ou **linéairement indépendant** si l'équation vectorielle homogène

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}$$

ne possède que la solution triviale $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

Dans le cas contraire, F est dite **liée** ou **linéairement dépendant**.

- Dit autrement, la famille $F = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$ est libre si et seulement si le système linéaire homogène

$$A\vec{\lambda} = \vec{0} \quad \text{où} \quad A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_k]$$

n'a qu'une seule solution (qui sera forcément la solution triviale $\vec{\lambda} = \vec{0}$).

- En particulier, les colonnes (ou les lignes) d'une matrice carrée sont linéairement indépendantes si et seulement si cette matrice est inversible.