

CORRIGÉ DU TRAVAIL ÉCRIT DU 4 JUIN 2024

Problème 1

(8 pts)

Il existe deux plans vérifiant les conditions demandées.

- 1) Le premier contient la droite d et est parallèle au vecteur $\overrightarrow{PQ}$ qui sert de deuxième vecteur directeur du plan, le premier étant $\vec{v}$. On a

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} -3-3 \\ -2-4 \\ 6-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{et on peut prendre} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

comme deuxième vecteur directeur du plan. Le produit vectoriel entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ fournit un vecteur normal du plan cherché :

$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

L'équation du plan est de la forme $6x - 5y + z = D$ et on obtient la valeur de D en injectant les coordonnées du point A dans l'équation : $18 + 5 + 2 = D$. L'équation cartésienne du premier plan est :

$$\underline{\underline{6x - 5y + z = 25.}}$$

- 2) Le second plan contient la droite d et passe par le point M , milieu du segment $[PQ]$. On a

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 0-3 \\ 1+1 \\ 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeur du plan cherché et leur produit vectoriel fournit un vecteur normal de ce plan :

$$\vec{n} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 13 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Comme pour le premier plan, le point A permet d'obtenir la constante dans l'équation cartésienne du second plan qui est

$$\underline{\underline{6x + 13y - 8z = 18 - 13 - 16 = -11.}}$$

Problème 2

(14 pts)

On considère le plan π d'équation cartésienne $3x + 4y - 12z = 12$.

- a) Les sommets du triangle sont : $X(4, 0, 0)$, $Y(0, 3, 0)$ et $Z(0, 0, -1)$. L'aire $\mathcal{A}$ du triangle de sommets XYZ est égale à la moitié de la norme du produit vectoriel entre $\overrightarrow{XY}$ et $\overrightarrow{XZ}$:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{XY} \wedge \overrightarrow{XZ}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 16 + 144} = \underline{\underline{\frac{13}{2}}}.$$

- b) La trace horizontale de π est l'intersection entre π et le plan Oxy d'équation $z = 0$, elle passe par le point X et admet le vecteur $\overrightarrow{XY}$ comme vecteur directeur. Une représentation paramétrique de t est

$$(t) : \begin{cases} x = 4 - 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 0 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- c) Les vecteurs normaux des plans π et Oxy sont, respectivement,

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Le cosinus de l'angle θ entre ces deux vecteurs est

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{p}}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{p}\|} = -\frac{12}{13}$$

et l'angle (aigu) φ entre les deux plans est

$$\varphi = \arccos(|\cos(\theta)|) = \arccos\left(\frac{12}{13}\right) \quad \text{ou} \quad \pi - \arccos\left(-\frac{12}{13}\right).$$

- d) On sait que $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{XP}_{\vec{n}}$. On obtient

$$\overrightarrow{XP}_{\vec{n}} = \frac{\overrightarrow{XP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix}}{169} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix} = \frac{-4 - 48}{13^2} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix} = -\frac{4}{13} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix}$$

puis

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{XP}_{\vec{n}} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{8}{13} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 52 + 24 \\ -13 + 32 \\ 52 - 96 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 76 \\ 19 \\ -44 \end{bmatrix}$$

et les coordonnées du point Q , symétrique de P par rapport à π sont $(76/13, 19/13, -44/13)$.

Problème 3

(12 pts)

- a) Il s'agit d'une combinaison d'objets non tous distincts car INFINITIF compte 9 lettres mais 4 I, 2 F et 2 N. Le nombre de mots différents possibles est donc :

$$\overline{P}(4, 2, 2, 1) = \frac{9!}{4!2!2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 2} = 9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 9 \cdot 42 \cdot 10 = 378 \cdot 10 = \underline{\underline{3780}}.$$

- b) Définissons A comme l'ensemble des mots obtenus en mélangeant les lettres d'INFINITIF et qui ne contiennent pas deux I consécutifs. Pour calculer le cardinal de A , on commence par ordonner les 5 lettres restantes après retrait des I. Il y a $\frac{5!}{2!2!} = 120/4 = 30$ ordres différents (il y a 2 F et 2 N dans les 5 lettres restantes). Il faut ensuite insérer les 4 I dans les 6 emplacements possibles (4 entre les lettres et 2 aux extrémités) mais en choisissant à chaque fois des emplacements différents. Il y a autant de répartitions possibles des 4 I que de combinaisons de 4 objets parmi 6. Ainsi le nombre de mots sans I consécutifs est

$$|A| = \frac{5!}{2!2!} \binom{6}{4} = 30 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 30 \cdot 15 = \underline{\underline{450}}.$$

SOLUTION ALTERNATIVE : On peut aussi calculer le cardinal de A en commençant par aligner les 4 I et en les séparant par une des 5 lettres restantes (notée X ci-dessous). Les mots ont alors la structure

$$_ I X _ I X _ I X _ I _.$$

Il reste à insérer, sans aucune restriction, les 2 lettres restantes dans les 5 emplacements possibles puis à ordonner les 5 lettres autres que les I. Le nombre de répartitions des 2 lettres restantes est égal au nombre de combinaisons, avec répétitions, de 2 objets parmi 5 et le nombre d'ordres possibles avec les 5 lettres autres que les I est $\frac{5!}{2!2!}$. Ainsi,

$$|A| = \overline{C}_2^5 \cdot \frac{5!}{2!2!} = C_2^6 \cdot 30 = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 30 = 15 \cdot 30 = \underline{\underline{450}}.$$

- c) Le nombre de lettres étant impair et la lettre T la seule à être présente un nombre impair de fois, la lettre centrale des palindromes doit être le T. Il reste 4 I, 2 F et 2 N à répartir symétriquement de part et d'autre du T central. Dans tout palindrome les quatre premières lettres sont donc I, I, F et N (dans un ordre à préciser), la lettre centrale T et les quatre dernières la symétrie parfaite des quatre premières. Avec 2 I, 1 F et 1 N on peut former $\overline{P}(2, 1, 1) = 4!/2! = 12$ mots différents et il existe 12 permutations des lettres du mot INFINITIF qui sont des palindromes.

Problème 4

(8 pts)

- a) Le nombre de codes formés de pions de couleurs toutes différentes est égal au nombre d'arrangements (chaque code est une **suite** de quatre pions), sans répétitions (les couleurs sont toutes différentes), de 4 couleurs parmi les 6 existantes. Il est donc égal à

$$A_4^6 = \frac{6!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 18 \cdot 20 = \underline{\underline{360}}.$$

- b) Tout sous-ensemble de 4 pions de couleurs différentes permet de construire un et un seul code où les couleurs apparaissent dans l'ordre alphabétique. Le nombre de tels codes est donc égal au nombre de sous-ensembles de 4 pions de couleurs différentes, soit le nombre de combinaisons de 4 objets parmi 6 qui s'élève à

$$C_4^6 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = \underline{\underline{15}}.$$

Problème 5

(8 pts)

- ▷ L'expérience consiste à répartir les trois plus jeunes candidats dans les deux salles, c.-à-d. à leur attribuer 3 places parmi 45 places numérotées (de 1 à 45, les places 1 à 25 correspondant à la première salle, les places 26 à 45 à la seconde).

L'événement dont on cherche la probabilité est formé de toutes les répartitions des trois plus jeunes candidats où ils sont soit tous les trois dans la première salle (ils ont tous reçu un numéro entre 1 et 25) soit tous les trois dans la seconde salle (ils ont tous reçu un numéro entre 26 et 45)

- ▷ Le nombre de cas totaux est égal au nombre de possibilités d'attribuer trois numéros parmi 45 aux trois benjamins. Il est donc égal à $\binom{45}{3}$ (il est possible, mais inutile, de distinguer les trois candidats et donc d'introduire un ordre dans l'attribution des numéros ce qui amènerait à utiliser des arrangements plutôt que des combinaisons).
- ▷ Le nombre de cas favorables est égal au nombre de possibilités d'attribuer soit 3 numéros parmi les 25 premiers aux trois benjamins soit 3 numéros parmi les 20 derniers aux trois benjamins. Il est donc égal à $\binom{25}{3} + \binom{20}{3}$ (les deux cas sont exclusifs et exhaustifs).

▷ La probabilité p que les trois candidats les plus jeunes se retrouvent dans la même salle d'examen est

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{\# \text{ cas favorables}}{\# \text{ cas totaux}} = \frac{\binom{25}{3} + \binom{20}{3}}{\binom{45}{3}} = \frac{\frac{25!}{3!22!} + \frac{20!}{3!17!}}{\frac{45!}{3!42!}} \\
 &= \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 + 20 \cdot 19 \cdot 18}{45 \cdot 44 \cdot 43} = \frac{5 \cdot 24 \cdot 23 + 4 \cdot 19 \cdot 18}{9 \cdot 44 \cdot 43} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 23 + 19 \cdot 18}{9 \cdot 11 \cdot 43} \\
 &= \frac{5 \cdot 2 \cdot 23 + 19 \cdot 6}{3 \cdot 11 \cdot 43} = \frac{230 + 114}{3 \cdot 11 \cdot 43} = \frac{344}{3 \cdot 11 \cdot 43} = \frac{8 \cdot 43}{3 \cdot 11 \cdot 43} = \frac{8}{\underline{\underline{33}}}.
 \end{aligned}$$