

Mathématiques 2

Analyse combinatoire et probabilités discrètes

Table des matières

3	Analyse combinatoire et probabilités discrètes	1
3.1	Principes de base	1
3.2	Permutations, arrangements et combinaisons	3
3.2.1	Permutations et arrangements sans répétitions	3
3.2.2	Combinaisons sans répétitions	4
3.2.3	Binôme de Newton, coefficients binomiaux et multinomiaux	5
3.2.4	Arrangements et combinaisons avec répétitions	7
3.3	Principe d'inclusion-exclusion	8
3.4	Probabilités discrètes	9
3.5	Exercices corrigés	11
3.6	Exercices supplémentaires et récapitulatifs	23
3.7	Solutions d'exercices choisis	27

Analyse combinatoire et probabilités discrètes

3.1 Principes de base



Principe d'addition

Si A et B sont deux ensembles **finis** et **disjoints** alors

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

et, plus généralement, si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n ensembles **finis** et **deux à deux disjoints**, alors

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$

Ce que l'on peut aussi écrire : $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$



Principe de multiplication

Si A et B sont deux ensembles **finis**, alors

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

et, plus généralement, si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n ensembles **finis**, alors

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

Dans le cas (fréquent) où tous les ensembles A_i sont tous égaux à un même ensemble A , on obtient

$$|A^n| = |A|^n.$$

-
- 3.1** Un étudiant doit choisir un projet de diplôme. Il s'intéresse plus particulièrement aux offres de trois laboratoires qui proposent chacun leur liste de sujets. Si les trois listes comptent, respectivement, 23, 15 et 19 projets. Combien de choix de projets différents peut-il effectuer ?

- 3.2** Les chaises d'un auditoire sont marquées au moyen d'une lettre majuscule de l'alphabet, suivie de deux chiffres décimaux. Quel est le plus grand nombre de chaises qu'il est ainsi possible de différencier ?
- 3.3** Dans l'alphabet braille, chaque lettre ou signe est représenté par 6 points (rangés en 3 lignes de 2 colonnes), certains étant en relief. Combien de signes différents peut-on composer en braille ?
- 3.4** Dans un petit état francophone les plaques d'immatriculation des automobiles sont formées d'une lettre majuscule suivie de quatre chiffres décimaux. Combien de plaques d'immatriculation différentes existe-t-il dans cet état si la lettre majuscule ne peut être ni I, ni O, ni U et le premier chiffre ne peut pas être 0 ?
- 3.5** Pour $n \geq 1$ donné, combien y a-t-il de palindromes de taille n sur l'alphabet $\{0, 1\}$?

REMARQUE. Un palindrome est un mot ou un groupe de mots se lisant aussi bien de droite à gauche que de gauche à droite comme *ressasser* ou *Esope reste ici et se repose*.

- 3.6** Dans un langage de programmation, les noms des variables doivent vérifier les trois conditions suivantes :
- ▷ être formés de un ou deux caractères alphanumériques (les minuscules et les majuscules n'étant pas distinguées) ;
 - ▷ commencer par une lettre ;
 - ▷ être différents des cinq mots de deux lettres réservés par le langage.

Combien y a-t-il de noms de variables différents dans ce langage ?

- 3.7** À partir des 26 lettres de l'alphabet, combien peut-on former de « mots » de six lettres
- a) ne contenant aucune voyelle ?
 - b) contenant au moins une voyelle ?
 - c) ne contenant pas deux lettres identiques à la suite ?
- 3.8** Chaque utilisateur d'un système informatique a un mot de passe formé de six à huit caractères, chaque caractère étant une lettre majuscule ou un chiffre. Si tout mot de passe doit contenir au moins un chiffre, combien existe-t-il de mots de passe différents ?
- 3.9** Quelle est la valeur de la variable k , une fois chacun des codes suivants exécutés ? (m et n_i , $i = 1, \dots, m$, sont des entiers positifs donnés)
- | | |
|---|---|
| <p>a) Poser $k := 0$
 Pour i_1 de 1 à n_1 faire
 Poser $k := k + 1$
 Fin Pour
 Pour i_2 de 1 à n_2 faire
 Poser $k := k + 1$
 Fin Pour
 :
 Pour i_m de 1 à n_m faire
 Poser $k := k + 1$
 Fin Pour</p> | <p>b) Poser $k := 0$
 Pour i_1 de 1 à n_1 faire
 Pour i_2 de 1 à n_2 faire
 :
 Pour i_m de 1 à n_m faire
 Poser $k := k + 1$
 Fin Pour
 :
 Fin Pour
 Fin Pour</p> |
|---|---|

★ Principe des tiroirs de Dirichlet (*Pigeonhole principle*)

Si $k + 1$ objets (ou plus) sont rangés dans k boîtes alors il y aura au moins une boîte contenant 2 objets (ou plus).

Et plus généralement, si N objets sont rangés dans k boîtes alors il y aura au moins une boîte contenant au moins $\lceil N/k \rceil$ objets.

- 3.10** Dans un tiroir il y a 8 chaussettes bleues et 7 chaussettes rouges, toutes étant des pièces séparées. Combien une personne doit-elle, dans l'obscurité, prendre de chaussettes si elle veut être certaine d'avoir au moins une paire de la même couleur ? Même question si la personne souhaite cette fois être certaine d'avoir une paire de chaussettes rouges.
- 3.11** Quelle doit être la taille minimum d'un groupe de personnes où l'on veut être sûr que deux d'entre elles au moins sont nées le même jour (mais pas forcément la même année) ?
- 3.12** Quelle doit être la taille minimum d'une classe où l'on veut être sûr qu'il y aura au moins 3 personnes recevant la même note ? On supposera que les notes sont mises au demi-point et qu'elles s'échelonnent entre 1 et 6.

3.2 Permutations, arrangements et combinaisons

3.2.1 Permutations et arrangements sans répétitions



Permutation

Une **permutation** de n objets distincts correspond à un ordre particulier de ces n objets.



Théorème

Le nombre P_n de permutations d'un ensemble de cardinal n est

$$P_n = n!$$



Arrangement (sans répétitions)

Un **arrangement** de k objets parmi n est une liste *ordonnée* de k objets *distincts*, choisis parmi n objets *distincts*.



Théorème

Le nombre A_k^n d'arrangements (sans répétitions) de k objets parmi n est

$$A_k^n = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

- 3.13** Combien de mots peut-on écrire en utilisant une et une seule fois chaque lettre du mot YVERDON
- au total ?
 - si les voyelles et les consonnes doivent alterner ?
 - si les lettres doivent apparaître dans l'ordre alphabétique ?

- 3.14** De combien de façons peut-on ranger 7 livres (différents) sur une étagère de bibliothèque
- sans aucune restriction sur l'ordre ?
 - si 2 livres particuliers doivent prendre les positions extrêmes ?
 - si les 3 tomes d'une trilogie doivent toujours rester ensemble ? Distinguer le cas où leur ordre est (i) fixé de celui où il est (ii) libre.
- 3.15** À l'issue d'une conférence internationale, les représentants de huit pays doivent s'aligner pour la photo d'usage. De combien de manières les huit personnes peuvent-elles se mettre en rang
- si aucune restriction n'est mise ?
 - si deux personnes tiennent à être côte à côte ?
 - si le groupe compte quatre femmes et quatre hommes et que les hommes ne doivent avoir que des voisines et inversement ?
- 3.16** De combien de façon peut-on asseoir 8 personnes autour d'une table ronde ? (Seule la place relative de ces personnes importe)
- 3.17** Dans une école, les numéros d'immatriculation sont formés de 6 chiffres décimaux. Quelle est la proportion de ces numéros qui comprennent une ou plusieurs répétitions, c'est-à-dire un ou plusieurs chiffres apparaissant plus d'une fois ?

3.2.2 Combinaisons sans répétitions



Combinaison (sans répétitions)

Une **combinaison de k objets parmi n** est un sous-ensemble de k objets *distincts*, choisis parmi n objets *distincts* (l'ordre n'ayant pas d'importance).



Théorème

Le nombre C_k^n de combinaisons (sans répétitions) de k objets parmi n est

$$C_k^n = \frac{A_k^n}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$



Propriété

Il y a autant de possibilités de sélectionner k objets parmi n (les k « gagnants ») que de possibilités de sélectionner $n-k$ objets parmi n (les $n-k$ « perdants »). Autrement dit, pour deux entiers non négatifs k et n vérifiant $k \leq n$, on a

$$C_k^n = C_{n-k}^n.$$

- 3.18** Combien de sous-ensembles de cardinal 4 possède l'ensemble $A = \{1, 2, \dots, 9\}$?
- 3.19** Pour une présentation, un étudiant doit choisir trois sujets dans une liste qui en comprend dix-huit. Combien de choix différents peut-il effectuer ? (L'ordre de présentation des sujets choisis est fixé par l'enseignant.)

- 3.20** Combien de comités différents de six membres peut-on former à partir d'une association qui comprend 13 femmes et 11 hommes ?
- 3.21** On dispose des 7 chiffres : 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7. Combien peut-on former de nombres à 4 chiffres :
- si les répétitions sont possibles ?
 - si aucun chiffre ne peut être répété ?
 - si les répétitions sont possibles et le nombre pair ?
 - si les répétitions sont interdites et le nombre pair ?
- 3.22** Un comité de 3 personnes est choisi parmi 4 couples mariés. Combien y a-t-il de comités différents :
- s'il n'y a aucune restriction sur la composition du comité ?
 - si le comité doit compter deux femmes et un homme ?
 - si le comité doit être formé de personnes ne vivant pas ensemble ?
- 3.23** Combien de suites strictement croissantes de longueur 7 peut-on former avec les entiers compris entre 1 et 100 (bornes incluses) ?
- 3.24** Combien de fonctions différentes d'un ensemble non vide A à n éléments vers un ensemble non vide B à m éléments est-il possible de définir ? Combien d'entre elles sont injectives ?

3.2.3 Binôme de Newton, coefficients binomiaux et multinomiaux



Coefficient binomial

Les nombres C_k^n de combinaisons de k objets parmi n sont également appelés des **coefficients binomiaux** et notés

$$C_k^n = \binom{n}{k}.$$



Théorème (Identité de Pascal)

Soient k et n deux entiers positifs avec $0 < k < n$. Alors

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$



Théorème (Binôme de Newton)

Soient a et b deux nombres réels et n un entier non négatif. Alors

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k. \end{aligned}$$

3.25 Développer complètement

a) $(a + b)^6$ b) $(2x_1 - x_2)^5$ c) $(1 + x)^7$

3.26 Déterminer le coefficient de x^9 dans le développement de $(2 - x)^{14}$.**3.27** Déterminer le terme constant (c.-à-d. celui où la puissance de x est nulle) dans le développement de

a) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$ b) $\left(3x - \frac{2}{x^2}\right)^9$ c) $\left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)^{20}$

3.28 Simplifier chaque expression en utilisant la formule du binôme de Newton.

a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, n \geq 0$ b) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}, n \geq 1$ c) $\sum_{k=0}^n x^k \binom{n}{k}, n \geq 0$

★ **Théorème**

Le nombre de permutations de n objets comptant exactement n_1 objets de type 1, n_2 objets de type 2, $\dots$, n_k objets de type k est

$$\bar{P}(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!}.$$

★ **Théorème**

Le nombre de partitions ordonnées d'un ensemble de cardinal n en k sous-ensembles disjoints, le premier de cardinal n_1 , le deuxième de cardinal n_2 , $\dots$, le dernier de cardinal n_k est égal au **coefficient multinomial**

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!}.$$

3.29 Combien de nombres différents peut-on former en utilisant une et une seule fois chacun des neuf chiffres du nombre 811 322 322 ?**3.30** Combien de mots différents peut-on former en utilisant une et une seule fois chacune des onze lettres du mot « abracadabra » ?**3.31** Une classe de 18 garçons part en camp de ski. Le centre qui les héberge a réservé trois dortoirs : un de cinq, un de six et un de sept lits. De combien de manières peut-on répartir les 18 élèves dans les trois dortoirs ?**3.32** De combien de façon peut-on répartir 11 personnes dans 3 voitures (distinguables) si dans une des voitures 3 personnes peuvent prendre place alors que dans les deux autres il en va 4 ?

3.2.4 Arrangements et combinaisons avec répétitions



Arrangement avec répétitions

Un **arrangement avec répétitions de k objets parmi n** est une liste ordonnée de k objets choisis parmi n objets distincts, chacun d'eux pouvant être sélectionné autant de fois que désiré.



Théorème

Le nombre $\overline{A}_k^n$ d'arrangements avec répétitions de k objets parmi n est

$$\overline{A}_k^n = n^k.$$



Combinaison avec répétitions

Une **combinaison avec répétitions de k objets parmi n** correspond au résultat d'un tirage avec remise de k objets parmi n objets distincts où l'ordre n'est pas pris en compte.



Théorème

Le nombre $\overline{C}_k^n$ avec répétitions de combinaisons de k objets parmi n est

$$\overline{C}_k^n = C_k^{n+k-1} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

3.33 Dans une boulangerie on y trouve des croissants au beurre, au chocolat, aux amandes, aux noisettes, à la vanille et des croissants au pavot qui sont la spécialité de la maison. Une personne en ressort avec un cornet à la main contenant 12 croissants. Combien de choix y a-t-il pour le contenu du cornet :

- s'il n'y a pas de restrictions sur le choix des croissants ?
- si la personne a choisi au moins 9 croissants au pavot ?
- si la personne a choisi au moins un croissant de chaque sorte ?

3.34 L'oncle Picsou rencontre ses trois petits-neveux, Riri, Fifi et Loulou, et, dans un excès de générosité qui lui est peu commun, décide de leur distribuer les 6 pièces de 1 franc qu'il a en poche. Combien de répartitions différentes existe-t-il

- au total s'il distribue toutes ses pièces sans aucune restriction particulière ?
- si chaque petit-neveu reçoit au moins un franc ?
- si l'oncle Picsou ne distribue pas forcément toutes les pièces (voire n'en distribue aucune) ?

3.35 Combien y a-t-il de solutions entières *non négatives* à l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11.$$

Autrement dit, quel est le cardinal de l'ensemble $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 11\}$?

3.36 Combien y a-t-il de solutions entières *strictement positives* à l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17.$$

3.37 Combien y a-t-il de solutions entières *non négatives* à l'inéquation

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 17.$$

3.38 Combien de suites croissantes de longueur 7 peut-on former avec les entiers compris entre 1 et 100 (bornes incluses) ?

REMARQUE. Une suite est dite *croissante* si chaque terme est supérieur ou égal au précédent.

3.3 Principe d'inclusion-exclusion

★ Théorème (Principe d'inclusion-exclusion)

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ des ensembles finis. Alors,

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots \\ &\quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

3.39 Quel est le nombre d'éléments de $A_1 \cup A_2$ s'il y a 12 éléments dans A_1 , 18 dans A_2 et

a) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$? b) $|A_1 \cap A_2| = 1$? c) $|A_1 \cap A_2| = 6$? d) $A_1 \subseteq A_2$?

3.40 Une école compte 1807 étudiants. Parmi ceux-ci, 453 suivent au moins un cours d'informatique, 567 au moins un cours de mathématiques et 299 au moins un cours dans chacune de ces deux branches. Modéliser la situation à l'aide du langage ensembliste et déterminer ensuite le nombre d'étudiants qui ne suivent de cours ni en informatique ni en mathématiques.

3.41 Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs ne dépassant pas 1000 divisibles par 7 ou 11 (ou les deux) ?

3.42 Calculer le nombre de mots de longueur 5 construits sur un alphabet de 3 lettres où chaque lettre apparaît au moins une fois.

3.43 Combien existe-t-il de mots binaires de longueur 10 commençant par 000 ou finissant par 00, voire les deux ?

3.4 Probabilités discrètes



Expérience, univers et événement

- ▷ Une **expérience** (ou **épreuve**) **aléatoire** (ou **stochastique**) est une expérience dont il est impossible de prévoir exactement le résultat (ou l'issue).
- ▷ L'**ensemble fondamental** (ou l'**univers**), généralement noté Ω , est l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire.
- ▷ Un **événement** est un ensemble d'issues possibles d'une expérience aléatoire. En d'autres termes, un événement est un sous-ensemble de l'univers Ω .
- ▷ Un **événement élémentaire** correspond à un événement formé d'une seule issue possible.



Loi de probabilité

Définir une **loi de probabilité sur un univers Ω** revient à associer à chaque événement $A \subseteq \Omega$ (c.-à-d. à chaque ensemble de résultats possibles) un nombre réel $P(A)$, appelé la **probabilité de l'événement A** , qui satisfait les trois axiomes suivants

- 1) $0 \leq P(A) \leq 1$ quel que soit $A \subseteq \Omega$
- 2) $P(\Omega) = 1$
- 3) Si A et B sont deux événements exclusifs alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$



Hypothèse d'équiprobabilité

Une loi de probabilité définie sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ vérifie l'**hypothèse d'équiprobabilité** si chaque événement élémentaire ω_k , $k = 1, \dots, n$, a la même probabilité de se réaliser que n'importe quel autre. On a alors

$$P(\{\omega_k\}) = \frac{1}{n}, \quad \forall k = 1, \dots, n.$$



Théorème

Pour une expérience aléatoire définie sur un univers fini aux événements élémentaires équiprobables, la probabilité qu'un événement A se réalise est égale à

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'événements élémentaires de } A}{\text{nombre total d'événements élémentaires}} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Cette probabilité modélise alors les chances de réalisation de A et la formule précédente peut également s'énoncer

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues total}} = \frac{\text{nombre de réussites}}{\text{nombre de réussites} + \text{nombre d'échecs}}.$$

- 3.44** On choisit un nombre au hasard entre 1 et 1000 (bornes incluses). Quelle est la probabilité qu'il soit divisible par 7 ou 11 ?
- 3.45** On choisit au hasard un entier strictement positif mais inférieur à mille. Quelle est la probabilité qu'il ne soit divisible ni par 15 ni par 20 ?
- 3.46** On choisit successivement 6 nombres différents au hasard entre 1 et 100 (bornes incluses). Quelle est la probabilité qu'ils forment une suite strictement croissante ?
- 3.47** Un couple a trois enfants dont deux garçons. Si les cinq membres de la famille s'alignent au hasard pour une photo, quelle est la probabilité que les deux garçons soient côte à côte ?
- 3.48** On tire quatre cartes au hasard dans un jeu de jass (36 cartes). Quelle est la probabilité de tirer
- a) quatre as, c) un dix et un seul, e) deux as et trois rois,
b) quatre piques, d) au moins un dix, f) deux as et aucun cœur ?
- REMARQUE. Pour la dernière question, distinguer le cas où on aimerait tirer exactement deux as et aucun cœur de celui où on aimerait tirer au moins deux as et aucun cœur. Quelle que soit l'alternative, l'as de cœur est et reste à la fois un as et un cœur.
- 3.49** Une main de poker est formée de 5 cartes tirées au hasard dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de recevoir
- a) un carré servi (quatre cartes de même valeur),
b) un full servi (une paire plus un brelan) ?
- REMARQUE. Un brelan correspond à trois cartes de même valeur.
- 3.50** Quelle est la probabilité qu'une main de poker (5 cartes tirées dans un jeu de 52 cartes) contienne au moins une paire, c.-à-d. au moins deux cartes de même hauteur ?
- 3.51** On lance deux dés équilibrés à six faces. Quelle est la probabilité d'obtenir un double ?
- 3.52** On lance deux dés équilibrés à douze faces. Quelle est la probabilité que leur somme vaille
- a) 1, b) 2, c) 3, d) 10, e) 23, f) 24 ?
- 3.53** On lance trois dés équilibrés à six faces. Quelle est la probabilité que leur somme vaille
- a) 3, b) 18, c) 1, d) 7, e) 14, f) 9 ?
- 3.54** Quatre personnes choisissent chacune un entier entre 1 et 100 au hasard (bornes incluses). Quelle est la probabilité que la somme des nombres choisis soit égale à 300 ?
- 3.55** Si on mélange aléatoirement les lettres du mot YVERDON, quelle est la probabilité que dans le mot obtenu
- a) les lettres soient dans l'ordre alphabétique ?
b) E vienne avant Y (pas forcément immédiatement avant) ?
c) les voyelles soient dans l'ordre alphabétique ?
- 3.56** Vous jouez une grille à la loterie suisse romande (6 numéros tirés au hasard parmi 42 et un numéro chance choisi parmi 6). Quelle est la probabilité que vous ayez coché exactement quatre bons numéros (indépendamment du numéro chance) ?
- 3.57** Quelle est la probabilité que deux personnes aient leur anniversaire le même jour ? (Quelle hypothèse faites-vous pour calculer cette probabilité ?)
- 3.58** a) Dans une classe de n étudiants, quelle est la probabilité qu'au moins 2 personnes aient leur anniversaire le même jour ?
b) Quelle est la valeur minimale de n pour que cette probabilité soit supérieure ou égale à $1/2$?
-

3.5 Exercices corrigés

- 3.59** Une séance de travail réunit n personnes, $n \geq 2$. Si avant le début de la séance toutes les personnes se saluent en se serrant la main, combien de poignées de main sont échangées ?

_____ Corrigé _____

Une poignée de mains correspond à une paire de personnes. Dans un groupe de n personnes il est donc possible d'échanger autant de poignées de mains qu'il n'y a de paires de personnes. Ce nombre est égal au nombre de combinaisons de 2 personnes parmi les n présentes :

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

DÉVELOPPEMENT ALTERNATIF (PARMI DE NOMBREUX AUTRES POSSIBLES) : Chacune des n personnes tend la main à $(n-1)$ autres. Cela fait un total de $n(n-1)$ mains tendues. Il faut diviser ce nombre par 2 pour obtenir le nombre de poignées de main échangées.

- 3.60** Le code secret d'une carte bancaire est formé d'une suite de six chiffres décimaux.
- Combien existe-t-il de codes dont la suite des chiffres est strictement décroissante ?
 - Combien existe-t-il de codes comptant le chiffre 7 ?
 - Combien existe-t-il de codes formés de chiffres tous différents et comptant autant de chiffres pairs que de chiffres impairs ?

_____ Corrigé _____

- a) Il y a bijection entre l'ensemble des sous-ensembles de six chiffres décimaux et l'ensemble des suites strictement décroissantes formées de six chiffres décimaux (pour tout sous-ensemble il n'y a qu'une seule manière de trier ses éléments dans l'ordre décroissant). Le nombre recherché est donc égal au nombre de sous-ensembles de six chiffres décimaux, c.-à-d. au nombre de combinaisons de 6 éléments parmi 10 :

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210.$$

- b) Notons A l'ensemble des codes comptant le chiffre 7, Ω l'ensemble de tous les codes possibles et $\overline{A}$ le complémentaire de A , autrement dit l'ensemble des codes où le chiffre 7 est absent. Chaque élément de Ω , respectivement $\overline{A}$, est un arrangement avec répétitions de 6 chiffres parmi 10, respectivement parmi 9. Ainsi le nombre recherché, égal au cardinal de A , est

$$|A| = |\Omega| - |\overline{A}| = \overline{A}_6^{10} - \overline{A}_6^9 = 10^6 - 9^6 = 468\,559.$$

- c) On considère tous les choix possibles de 3 chiffres pairs parmi les 5 existants et de 3 chiffres impairs parmi les 5 existants puis toutes les permutations possibles de ces six chiffres ce qui nous donne un nombre de codes égal à

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{3} \cdot P_6 = \left(\frac{5!}{3! \cdot 2!}\right)^2 \cdot 6! = 10^2 \cdot 720 = 72\,000.$$

DÉVELOPPEMENT ALTERNATIF : On considère tous les choix possibles pour les places des 3 chiffres pairs dans le code puis on remplit ces places avec toutes les suites possibles de 3 chiffres pairs différents et les places restantes avec toutes les suites possibles de 3 chiffres impairs différents ce qui donne un nombre de codes égal à

$$\binom{6}{3} \cdot A_3^5 \cdot A_3^5 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{5!}{2!}\right)^2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3)^2 = 20 \cdot 60^2 = 20 \cdot 3600 = 72\,000.$$

3.61 Afin de ne pas vous exclure de l'équipe, votre entraîneur exige que vous assistiez à plus de 80% des entraînements pendant les 4 mois à venir (16 semaines). Les séances ont lieu deux fois par semaine : les lundis soir et les jeudis soir.

- De combien de manières différentes pouvez-vous répartir les 6 absences que vous pouvez vous permettre au maximum au cours des 4 prochains mois ?
- De combien de manières différentes pouvez-vous répartir ces 6 absences si vous planifiez de courber quatre lundis et deux jeudis ?
- De combien de manières différentes pouvez-vous répartir ces 6 absences si vous ne voulez jamais manquer les deux entraînements d'une même semaine ?

————— Corrigé —————

- a) Chaque répartition correspond à un choix de 6 dates parmi les 32 soirs d'entraînement. Le nombre de répartitions possibles est donc

$$\binom{32}{6} = \frac{32!}{6! \cdot 26!} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 4 \cdot 31 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 9 = 906\,192.$$

- b) Cette fois il faut choisir 4 dates parmi les 16 lundis et 2 dates parmi les 16 jeudis d'où un nombre de répartitions différentes égal à

$$\binom{16}{4} \cdot \binom{16}{2} = \frac{16!}{4! \cdot 12!} \cdot \frac{16!}{2! \cdot 14!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{16 \cdot 15}{2} = 2 \cdot 5 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 8 \cdot 15 = 218\,400.$$

- c) On considère, dans un premier temps, tous les choix possibles de 6 semaines parmi les 16 à venir puis, pour chaque semaine retenue, le choix entre le lundi ou le jeudi. Le nombre de répartitions différentes est dans ce cas

$$\binom{16}{6} \cdot 2^6 = \frac{16!}{6! \cdot 10!} \cdot 64 = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 64 = 4 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 64 = 512\,512.$$

3.62 a) On considère un canal de transmission par lequel transitent des mots de longueur $n \geq 1$ construits sur l'alphabet binaire $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Chaque mot transmis est donc un élément de $\mathbb{F}_2^n = \{0, 1\}^n$.

Pour deux mots $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{F}_2^n$ on définit la distance de Hamming entre x et y par

$$d(x, y) = |\{i \in \{1, \dots, n\} \mid x_i \neq y_i\}|.$$

La distance de Hamming entre x et y est donc le nombre de composantes différentes entre les deux n -uples.

Pour $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ et $x \in \mathbb{F}_2^n$ on définit la sphère de Hamming de centre x et de rayon r par

$$S(x, r) = \{y \in \mathbb{F}_2^n \mid d(x, y) = r\}.$$

La sphère de Hamming de centre x et de rayon r est donc l'ensemble de tous les éléments y de $\mathbb{F}_2^n$ dont exactement r composantes sont différentes de celles de x .

Déterminer le cardinal de $S(x, r)$.

- b) Même question si les mots sont construits sur un alphabet $\mathbb{F}_q$ comportant $q \geq 2$ symboles.

_____ Corrigé _____

- a) Il y a $\binom{n}{r}$ manières de choisir les r composantes de y qui seront différentes de celles de x . Pour chaque composante qui diffère il n'y a qu'un seul symbole à choix. Le cardinal de $S(x, r)$ est donc

$$|S(x, r)| = \binom{n}{r}.$$

- b) Comme ci-dessus, il y a $\binom{n}{r}$ manières de choisir les r composantes de y qui seront différentes de celles de x . En revanche on a maintenant $(q - 1)$ possibilités pour chacune des composantes de y qui diffère, ainsi

$$|S(x, r)| = \binom{n}{r} (q - 1)^r.$$

3.63 Déterminer le terme constant dans le développement de $\left(2x^3 - \frac{1}{2x}\right)^{20}$.

_____ Corrigé _____

On applique la formule du binôme de Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

avec $a = 2x^3$, $b = -1/2x$ et $n = 20$ afin d'obtenir

$$\left(2x^3 - \frac{1}{2x}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} (2x^3)^{20-k} \left(-\frac{1}{2x}\right)^k = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} (-1)^k \cdot 2^{20-2k} \cdot x^{60-4k}.$$

L'exposant de x est nul lorsque $60 - 4k = 0$ c'est-à-dire lorsque $k = 15$ et le terme constant est

$$\binom{20}{15} (-1)^{15} \cdot 2^{20-2 \cdot 15} = -\frac{20!}{15!5!} \cdot 2^{-10} = -\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^{10}} = -\frac{19 \cdot 3 \cdot 17}{2^6} = -\frac{969}{64}.$$

- 3.64** a) Combien d'anagrammes possède le mot « ANAGRAMME » ?
b) Combien d'entre elles contiennent au moins deux A consécutifs ?

_____ Corrigé _____

- a) Il s'agit d'une permutation d'objets non tous distincts car ANAGRAMME compte 9 lettres mais 3 A et 2 M. Le nombre de mots différents possibles est donc :

$$\frac{9!}{3!2!} = \frac{9!}{12} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 = 72 \cdot 420 = 30\,240.$$

- b) On passe par le complémentaire et on définit :

Ω : l'ensemble de tous les mots possibles, $|\Omega| = 30\,240$,

A : l'ensemble des mots avec au moins deux A consécutifs,

$\overline{A}$: l'ensemble des mots sans A consécutifs.

Pour calculer le cardinal de $\overline{A}$, on commence par ordonner les 6 lettres restantes après retrait des A. Il y a $\frac{6!}{2!} = 360$ ordres différents (il y a 2 M dans les 6 lettres restantes). Il faut ensuite insérer les 3 A dans les 7 emplacements possibles (5 entre les lettres et 2 aux extrémités) mais en choisissant à chaque fois des emplacements différents. Il y a autant de répartitions possibles des 3 A que de combinaisons de 3 objets parmi 7. Ainsi le nombre de mots avec au moins deux A consécutifs est

$$|A| = |\Omega| - |\overline{A}| = \frac{9!}{3!2!} - \frac{6!}{2!} \binom{7}{3} = \frac{9!}{12} - 360 \cdot 35 = 30\,240 - 12\,600 = 17\,640.$$

DÉVELOPPEMENT ALTERNATIF : On peut aussi calculer le cardinal de $\overline{A}$ en commençant par aligner les 3 A et en les séparant par une lettre (notée X ci-dessous). Les mots ont alors la structure

$$_ A X _ A X _ A _.$$

Il reste à insérer, sans aucune restriction, les 4 lettres restantes dans les 4 emplacements possibles puis à ordonner les 6 lettres autres que les A. Le nombre de répartitions des 4 lettres restantes est égal au nombre de combinaisons, avec répétitions, de 4 objets parmi 4 et le nombre d'ordres possibles avec les 6 lettres autres que les A est $\frac{6!}{2!}$ (la division par 2! est due à la présence des deux M dans ces 6 lettres). Ainsi,

$$|\overline{A}| = \overline{C}_4^4 \cdot \frac{6!}{2!} = C_4^7 \cdot 360 = 35 \cdot 360 = 12\,600.$$

La suite n'est pas différente de l'approche précédente.

DÉVELOPPEMENT ALTERNATIF : On peut aussi calculer le cardinal de A directement. Pour cela on décompose A en

A_1 : l'ensemble des mots contenant deux A consécutifs mais pas trois,

A_2 : l'ensemble des mots contenant trois A consécutifs.

Ces deux sous-ensembles sont disjoints et $|A| = |A_1| + |A_2|$. Pour calculer $|A_1|$ on peut procéder comme ci-dessus. On commence par ordonner les 6 lettres restantes puis on choisit deux emplacements différents parmi les sept existants pour insérer les « lettres » A et AA. On multiplie finalement le tout par 2 car pour chaque choix des places d'insertion on peut placer AA à gauche et A à droite ou l'inverse. Ainsi

$$|A_1| = \frac{6!}{2!} \cdot \binom{7}{2} \cdot 2 = 360 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 2 = 360 \cdot 42 = 15\,120.$$

Pour calculer $|A_2|$, il suffit de considérer les 3 A comme une seule « lettre ». Le nombre de mots que l'on peut créer avec les 7 symboles à disposition (AAA, E, G, 2 M, N et R) est

$$|A_2| = \frac{7!}{2!} = 2520.$$

On obtient alors, comme précédemment, que

$$|A| = |A_1| + |A_2| = 15\,120 + 2520 = 17\,640.$$

DÉVELOPPEMENT ALTERNATIF : Comme ci-dessus on calcule le cardinal de A directement. Pour cela on colle deux des A pour créer la « lettre » AA. Avec les 8 symboles à disposition (dont 2 M) on peut créer $8!/2!$ mots différents. Mais parmi ces mots, tous ceux où A et AA sont côte à côte sont comptés deux fois (A+AA et AA+A ne sont pas distinguables). Il faut donc retrancher le nombre de mots où les trois A sont consécutifs. Ainsi

$$|A| = \frac{8!}{2!} - \frac{7!}{2!} = 20\,160 - 2520 = 17\,640.$$

3.65 Une société vient d'acquérir une nouvelle machine qui est mise en rodage quelques jours avant d'être utilisée en production. Elle est soumise à des pannes se produisant aléatoirement au cours du temps éventuellement plusieurs fois par jour.

- Déterminer le nombre de répartitions possibles de 5 pannes sur une période de 10 jours consécutifs.
- Déterminer le nombre de répartitions possibles de 10 pannes pendant 4 jours consécutifs en supposant qu'aucun des 4 jours n'est exempt de pannes.

_____ Corrigé _____

- a) Il suffit de choisir, avec répétitions, 5 jours parmi les 10. On a donc

$$\overline{C}_5^{10} = C_5^{14} = \frac{14!}{9! \cdot 5!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 14 \cdot 13 \cdot 11 = 2002$$

répartitions possibles.

- b) Si on note x_i le nombre de pannes survenant le jour i , $i = 1, 2, 3, 4$, le nombre de répartitions possibles est égal au nombre de solutions entières et strictement positives de l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10,$$

lui-même égal au nombre de solutions entières et non négatives de l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 10 - 4 = 6.$$

Ce nombre est égal au nombre de manières de répartir 6 jetons dans 4 boîtes autrement dit au nombre de combinaisons avec répétitions de 6 objets parmi 4. Il existe donc $\overline{C}_6^4 = C_6^9 = C_3^9 = 84$ répartitions possibles de 10 pannes sur 4 jours consécutifs sans un seul jour sans panne.

3.66 On considère les pièces de monnaie suisse (5 francs, 2 francs, 1 franc, 50 centimes, 20 centimes, 10 centimes et 5 centimes).

- Combien de bourses de quatre pièces pouvez-vous créer si les pièces doivent avoir des valeurs toutes différentes ?
- Combien de bourses de quatre pièces pouvez-vous créer si deux pièces au moins doivent avoir la même valeur ?
- Combien de piles de quatre pièces pouvez-vous créer si les valeurs des pièces doivent former une suite strictement décroissante ?

_____ Corrigé _____

- a) Les pièces étant en vrac dans une bourse, la question revient à déterminer le nombre de sous-ensembles de 4 pièces différentes qu'il est possible de former à partir des 7 pièces différentes à disposition. Ce nombre est égal au nombre de combinaisons de 4 objets parmi 7 :

$$C_4^7 = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35.$$

- b) On pose par l'événement complémentaire et on pose :

Ω : l'ensemble de toutes les bourses possibles, avec ou sans répétitions de valeurs,

A : l'ensemble des bourses comprenant au moins deux pièces de même valeurs,

$\overline{A}$: l'ensemble des bourses formées de pièces des valeurs toutes différentes.

Le cardinal de $\overline{A}$ a déjà été calculé quant à celui de Ω il est égal au nombre de combinaisons avec répétitions de 4 objets parmi 7. Ainsi

$$|A| = |\Omega| - |\overline{A}| = \overline{C}_4^7 - C_4^7 = C_4^{10} - 35 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} - 35 = 10 \cdot 3 \cdot 7 - 35 = 210 - 35 = 175.$$

- c) Tout sous-ensemble de 4 pièces de valeurs différentes permet de construire un et un seul empilement où les valeurs des pièces forment une suite strictement décroissante. Le nombre de telles piles est donc égal au nombre de sous-ensembles de 4 pièces de valeurs différentes, soit le nombre de combinaisons de 4 objets parmi 7 :

$$C_4^7 = 35.$$

- 3.67** a) Combien de mots différents peut-on créer en mélangeant les lettres de BARBAPAPA ?
 b) Combien de ces mélanges contiennent la séquence ABBA ?
 c) Combien de ces mélanges (ceux du point a) forment un palindrome ?

_____ Corrigé _____

- a) Il s'agit d'une permutation d'objets non tous distincts car BARBAPAPA compte 9 lettres mais 4 A, 2 B, 2 P et 1 R. Le nombre de mots différents possibles est donc égal au coefficient multinomial

$$\bar{P}(4, 2, 2, 1) = \frac{9!}{4! 2! 2! 1!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 2} = 9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 18 \cdot 7 \cdot 30 = 540 \cdot 7 = 3780.$$

- b) Il suffit de considérer la séquence ABBA comme une seule « lettre ». On a alors 6 symboles à permuter : 1 fois la séquence ABBA, 2 fois la lettre A, 2 fois la lettre P et 1 fois la lettre R. Le nombre de mots différents que l'on peut construire est

$$\bar{P}(1, 2, 2, 1) = \frac{6!}{1! 2! 2! 1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2} = 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30 \cdot 6 = 180.$$

- c) Le nombre de lettres étant impair et la lettre R la seule à être présente un nombre impair de fois, la lettre centrale des palindromes doit être un R. Il reste 4 A, 2 B et 2 P à répartir symétriquement de part et d'autre du R central. Dans tout palindrome les quatre premières lettres sont donc A, A, B et P (dans un ordre à préciser), la lettre centrale R et les quatre dernières la symétrie parfaite des quatre premières. Avec 2 A, 1 B et 1 P on peut former $\bar{P}(2, 1, 1) = 4!/2! = 12$ mots différents et il existe donc 12 permutations des lettres de BARBAPAPA qui sont des palindromes.

- 3.68** a) Combien existe-t-il de mots binaires de longueur sept comptant exactement quatre 0 ?
 b) Combien existe-t-il de mots binaires de longueur sept comprenant exactement quatre 0 mais non consécutifs ? (On autorise le fait d'avoir deux ou trois 0 à la suite mais pas quatre) ?
 c) Combien existe-t-il de mots binaires de longueur sept avec au moins quatre 0 consécutifs ?

_____ Corrigé _____

- a) Le nombre de mots binaires de longueur sept contenant exactement quatre 0 est égal au nombre de possibilités de choisir les positions des quatre 0 parmi les sept positions possibles. L'ordre de ces choix étant sans importance, il y en a

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4! 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 7 \cdot 5 = 35.$$

- b) Le premier des quatre 0 consécutifs peut occuper les positions 1 à 4 dans le mot binaire. Il n'y a donc que 4 mots binaires de longueur sept contenant exactement quatre 0 qui, en plus, sont consécutifs (à savoir les mots 0000111, 1000011, 1100001 et 1110000)

En soustrayant ce résultat au nombre de mots obtenus au point précédent on obtient le résultat recherché. Il y a donc $35 - 4 = 31$ mots binaires de longueur sept contenant exactement quatre 0 mais non consécutifs.

c) On définit $A = \{\text{mots binaires de longueur sept avec au moins quatre 0 consécutifs}\}$ que l'on décompose en

A_1 : l'ensemble des mots de A de la forme 0000***,

A_2 : l'ensemble des mots de A de la forme *0000**,

A_3 : l'ensemble des mots de A de la forme **0000*,

A_4 : l'ensemble des mots de A de la forme ***0000.

Pour calculer le cardinal de A on fait une inclusion-exclusion :

$$\begin{aligned} |A| &= |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ &\quad - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &= 4 \cdot 2^3 - (2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^2 + 2^1 + 2^2) + 2 + 1 + 1 + 2 - 1 \\ &= 32 - 17 + 6 - 1 = 20 \end{aligned}$$

3.69 Calculer le nombre de mots de longueur n sur un alphabet de p lettres où chaque lettre apparaît au moins une fois ($n \geq p \geq 1$).

_____ Corrigé _____

MODÉLISATION. On définit les ensembles

Ω : ensemble de tous les mots de longueur n sur un alphabet de p lettres,

A : sous-ensemble de Ω formé des mots où chaque lettre apparaît au moins une fois,

$\overline{A}$: sous-ensemble de Ω formé des mots où au moins une lettre n'est pas présente.

RÉSOLUTION. On cherche le cardinal de A qui ne correspond à aucun objet combinatoire simple, pas plus que celui de son complément $\overline{A}$. On peut cependant décomposer $\overline{A}$ en p sous-ensembles (non disjoints, malheureusement) :

$$\overline{A} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_p = \bigcup_{i=1}^p B_i$$

où B_i est le sous-ensemble de Ω formé de tous les mots ne contenant pas la i^{e} lettre, $i = 1, \dots, p$.

Le calcul du cardinal de ces sous-ensembles ainsi que de l'intersection de plusieurs d'entre eux n'est pas difficile. En effet, on a

- ▷ $|B_i| = \overline{A}_n^{p-1} = (p-1)^n$, $i = 1, \dots, p$, car on a $p-1$ choix pour chacune des n lettres, quelle que soit la lettre numéro i interdite.
- ▷ $|B_i \cap B_j| = \overline{A}_n^{p-2} = (p-2)^n$, $1 \leq i < j \leq p$, car quel que soit $i \neq j$, $B_i \cap B_j$ est le sous-ensemble de tous les mots formé avec $p-2$ lettres.
- ▷ $B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \dots \cap B_{i_k} = \overline{A}_n^{p-k} = (p-k)^n$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p$, car l'intersection de k ensembles B_{i_k} est l'ensemble des mots formé avec seulement $p-k$ lettres ($k \leq p$).

On peut maintenant utiliser la formule d'inclusion-exclusion pour calculer le cardinal de $\overline{A}$:

$$\begin{aligned} |\overline{A}| &= \binom{p}{1}|B_1| - \binom{p}{2}|B_1 \cap B_2| + \binom{p}{3}|B_1 \cap B_2 \cap B_3| - \dots \\ &\quad + (-1)^{p+1} \binom{p}{p}|B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_p| \\ &= \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \binom{p}{k} \overline{A}_n^{p-k} = \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \binom{p}{k} (p-k)^n. \end{aligned}$$

Comme le cardinal de Ω est égal p^n (le nombre d'arrangements avec répétitions de n lettres parmi p) on obtient le cardinal de A :

$$|A| = |\Omega| - |\overline{A}| = p^n - \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \binom{p}{k} (p-k)^n.$$

3.70 Combien de quadruplets sont affichés par la procédure qui suit.

PROCEDURE Afficher(N : entier ≥ 1)

Début

Pour I de 1 à N faire

Pour J de 1 à N faire

Pour K de 1 à N faire

Pour L de 1 à N faire

 Afficher le quadruplet (I, J, K, L)

Fin Pour

Fin Pour

Fin Pour

Fin Pour

Fin

INDICATION. Quelle relation vérifient les quatre termes des suites affichées ?

_____ Corrigé _____

Tous les quadruplets (I, J, K, L) affichés vérifient

$$I \leq J \leq K \leq L.$$

Le programme affiche donc tous les quadruplets croissants formés d'entiers entre 1 et N (bornes incluses). Il y a en a

$$\overline{C}_4^n = C_4^{n+3} = \frac{(n+3)!}{4! (n-1)!} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}.$$

3.71 À la fin d'un sommet du G20, les vingt chefs d'État s'alignent pour la photo d'usage. Si on suppose qu'ils s'alignent dans un ordre aléatoire, quelle est la probabilité que les présidents américain et russe se retrouvent côte à côte ?

_____ Corrigé _____

Le nombre de photos possibles est égal au nombre d'alignements différents des 20 chefs d'État, c.-à-d. au nombre de permutations de 20 éléments : $P_{20} = 20!$

Pour établir le nombre de photos où les présidents russes et américains sont côte à côte, fusionnons mentalement et momentanément les deux protagonistes, il ne reste que 19 éléments à permuter. Il faut ensuite multiplier ce nombre de permutations par 2 (ordre à l'intérieur du couple).

Ainsi la probabilité cherchée est

$$p = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas totaux}} = \frac{19! \cdot 2}{20!} = \frac{1}{10} = 0,1$$

3.72 On tire 5 cartes au hasard dans un jeu de poker de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer deux paires (et pas mieux, c.-à-d. pas un full) ?

_____ Corrigé _____

Le nombre de mains différentes est égal au nombre de combinaisons de 5 cartes choisies parmi 52, soit $\binom{52}{5}$.

Pour générer une main contenant deux paires et pas mieux, il faut

- ▷ choisir les hauteurs des deux paires, hauteurs qui doivent être différentes afin de ne pas créer un carré. Comme il y a 13 hauteurs différentes, cela fait $\binom{13}{2}$ choix différents.
- ▷ pour chacune des hauteurs précédentes, choisir 2 cartes parmi les 4 existantes afin de former les deux paires. Cela fait $\binom{4}{2}^2$ choix différents.
- ▷ choisir une cinquième carte, de hauteur différente de celles des paires afin de ne pas créer un full mais de couleur quelconque. Cela fait $\binom{11}{1}\binom{4}{1}$ choix différents.

La probabilité de recevoir 2 paires et pas mieux est donc

$$p = \frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2\binom{11}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 6^2 \cdot 11 \cdot 4}{2} \cdot \frac{5! \cdot 47!}{52!} = \frac{123\,552}{2\,598\,960} \approx 0,04754.$$

3.73 On tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer

- a) 5 cartes de la même couleur ?
- b) au moins une carte de chaque couleur ?

_____ Corrigé _____

- a) L'univers de cette expérience est

$$\Omega = \{\text{mains de 5 cartes tirées dans un jeu de 52 cartes}\}$$

$$\text{et } |\Omega| = C_5^{52} = \binom{52}{5}.$$

L'événement qui nous intéresse est

$$A = \{\text{mains de } \Omega \text{ formées de cartes de la même couleur}\}.$$

Comme un jeu de 52 cartes est formé de 4 couleurs ($\spadesuit$, $\heartsuit$, $\diamondsuit$ et $\clubsuit$) comptant chacune 13 cartes, on a $\binom{4}{1}$ choix différents pour la couleur et $\binom{13}{5}$ possibilités pour prendre 5 cartes dans la couleur retenue. Ainsi

$$|A| = \binom{4}{1} \cdot \binom{13}{5}$$

et la probabilité de l'événement A est

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{33}{16\,660} \approx 0,00198.$$

- b) L'univers de cette expérience ne change pas par rapport au point précédent. L'événement qui nous intéresse est

$$B = \{\text{mains de } \Omega \text{ formées d'au moins une carte de chaque couleur}\}$$

et son complémentaire est

$$\overline{B} = \{\text{mains de } \Omega \text{ où une couleur au moins n'est pas présente}\}.$$

On décompose $\overline{B}$ en 4 sous-ensembles (non disjoints) :

$$\overline{B}_i = \{\text{mains de } \Omega \text{ sans carte de la couleur } i\}, \quad i = \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit$$

On a

- ▷ $|\overline{B_i}| = \binom{39}{5}$ quel que soit i ,
- ▷ $|\overline{B_i} \cap \overline{B_j}| = \binom{26}{5}$ quels que soient $i \neq j$,
- ▷ $|\overline{B_i} \cap \overline{B_j} \cap \overline{B_k}| = \binom{13}{5}$ quels que soient $i \neq j \neq k$,
- ▷ l'intersection des 4 sous-ensembles est vide.

En utilisant le principe d'inclusion-exclusion on obtient

$$|\overline{B}| = \left| \bigcup_i \overline{B_i} \right| = \binom{4}{1} \cdot \binom{39}{5} - \binom{4}{2} \cdot \binom{26}{5} + \binom{4}{3} \cdot \binom{13}{5} - \binom{4}{4} \cdot 0$$

et la probabilité de l'événement B est

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{|\overline{B}|}{|\Omega|} = \frac{2197}{8330} \approx 0,2637.$$

- 3.74** Dans un jeu de foire, une balle est lancée du haut d'un plan incliné au bas duquel sont disposées neuf fentes numérotées de 1 à 9 (dans le désordre). La surface du plan est irrégulière et les fentes très étroites si bien que les joueurs ne peuvent pas contrôler vers quelle fente se dirigent leurs balles. Un prix est gagné si la somme des résultats obtenus lors de trois lancers consécutifs est inférieure ou égale à 10. Calculer la probabilité de gagner un prix.

————— Corrigé —————

Comme il y a 9 résultats possibles et équiprobables par lancer, le nombre de cas totaux pour trois lancers successifs est $\overline{A}_3^9 = 9^3 = 729$.

Si on note x_i le résultat du lancer numéro i , le nombre de cas favorables est égal au nombre de solutions de l'inéquation

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$

avec $x_i \in \{1, 2, \dots, 9\}$ pour $i = 1, 2, 3$. Cette inéquation a le même nombre de solutions que l'inéquation

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 10 - 3 = 7$$

avec $y_i \in \{0, 1, \dots, 8\}$ pour $i = 1, 2, 3$, qui possède à son tour le même nombre de solutions que l'équation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7$$

avec $y_i \in \{0, 1, \dots, 8\}$ pour $i = 1, 2, 3$ et $y_4 \in \{0, 1, \dots, 7\}$. Ce nombre de solutions étant égal à $\overline{C}_7^4$, la probabilité p de gagner un prix est

$$p = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas totaux}} = \frac{\overline{C}_7^4}{\overline{A}_3^9} = \frac{\overline{C}_7^{10}}{9^3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 9^3} = \frac{10 \cdot 4}{3 \cdot 9^2} = \frac{40}{243} \approx 0,1646.$$

- 3.75** On mélange les 26 lettres de l'alphabet français. Quelle est la probabilité que les 6 voyelles apparaissent dans l'ordre alphabétique (mais pas forcément de manière consécutive) dans l'ordre obtenu ?

————— Corrigé —————

On considère un ordre particulier des 26 lettres. Si on fixe les 20 consonnes (places et ordre d'apparition) il existe $6! = 720$ permutations possibles des 6 voyelles. Ces dernières apparaissent dans l'ordre alphabétique dans une seule de ces 720 solutions. Cette constatation est vraie quels que soient les positions et l'ordre des consonnes (en

fait en fixant ces dernières on définit une partition de l'ensemble des ordres possibles des 26 lettres de l'alphabet dont tous les classes contiennent $6!$ solutions). Ainsi pour une disposition donnée des consonnes il y a un seul cas favorable pour 720 cas possibles et la probabilité p d'observer les voyelles dans l'ordre alphabétique est

$$p = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}.$$

DÉVELOPPEMENT ALTERNATIF : On pose

Ω : l'ensemble de tous les ordres possibles des 26 lettres de l'alphabet,

A : l'ensemble des ordres des 26 lettres de l'alphabet où les 6 voyelles apparaissent dans l'ordre alphabétique.

On a évidemment $|\Omega| = P_{26} = 26!$. Pour calculer le cardinal de A on commence par ordonner les consonnes ($P_{20} = 20!$ possibilités) puis on choisit, sans restriction, six positions parmi les 21 possibles pour insérer les voyelles dans l'ordre alphabétique (A allant dans la position tout à gauche, E dans la deuxième plus à gauche (peut-être la même que celle de A) et ainsi de suite). On a donc

$$|A| = P_{20} \cdot \overline{C_6^{21}} = 20! \cdot C_6^{26} = 20! \cdot \frac{26!}{6!20!} = \frac{26!}{6!}.$$

La probabilité p cherchée est alors

$$p = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{26!}{26!6!} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}.$$

AUTRE DÉVELOPPEMENT ALTERNATIF : Plutôt que de placer les consonnes en premier on commence par disposer les six voyelles dans l'ordre alphabétique (une seule possibilité) ensuite on choisit 20 positions d'insertion parmi les 7 existantes pour les consonnes, ce choix se fait évidemment avec répétitions ($\overline{C_{20}^7}$ possibilités) puis on ordonne les 20 consonnes (P_{20} possibilités). On obtient dans ce cas

$$|A| = \overline{C_{20}^7} \cdot P_{20} = C_{20}^{26} \cdot 20! = \frac{26!}{20!6!} \cdot 20! = \frac{26!}{6!}$$

et la probabilité p est

$$p = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{26!}{26!6!} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}.$$

3.76 Vous venez de recevoir le numéro d'identification personnel de votre nouvelle carte de crédit. Si les six chiffres décimaux qui le forment ont été choisis au hasard, quelle est la probabilité

- qu'ils soient tous différents et que leurs parités alternent ?
- qu'ils forment une suite strictement croissante ?
- que leur somme soit égale à 44 ?

Corrigé

Le nombre total de codes différents est égal à 10^6 car il s'agit du nombre d'arrangements avec répétitions de 6 chiffres parmi 10.

- a) Il a y 2 possibilités pour l'alternance (le premier chiffre est soit pair soit impair). Ensuite on doit choisir 3 chiffres pairs différents et 3 chiffres impairs différents. Dans chaque cas, le nombre de possibilités est égal au nombre d'arrangements (sans répétitions) de 3 chiffres parmi 5. La probabilité cherchée est donc

$$p = \frac{2 \cdot A_3^5 \cdot A_3^5}{A_6^{10}} = \frac{2 \cdot \left(\frac{5!}{(5-3)!}\right)^2}{10^6} = \frac{2 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3)^2}{10^6} = \frac{2 \cdot 60^2}{10^6} = \frac{2 \cdot 3600}{10^6} = \frac{72}{10^4} = 0,0072.$$

- b) Le nombre de suites croissantes de longueur 6 que l'on peut former à l'aide des dix chiffres est égal au nombre de combinaisons simples de 6 chiffres parmi 10 (chaque combinaison définit une seule suite croissante). La probabilité cherchée est donc

$$p = \frac{C_6^{10}}{A_6^{10}} = \frac{\frac{10!}{4!6!}}{10^6} = \frac{210}{10^6} = 0,00021.$$

- c) Par symétrie, la probabilité que la somme des chiffres soit égale à 44 est la même que celle qu'elle soit égale à 10 ($10 = 6 \cdot 9 - 44$). On est donc ramené à calculer le nombre de solutions de l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10, \quad \text{avec } x_i \in \{0, 1, \dots, 9\} \quad i = 1, \dots, 6.$$

Ce nombre est égal à $\overline{C_{10}^6} - 6$ (il faut retirer les 6 solutions où un des x_i est égal à 10 et tous les autres nuls). La probabilité cherchée est donc

$$\begin{aligned} p &= \frac{\overline{C_{10}^6} - 6}{A_6^{10}} = \frac{C_{10}^{15} - 6}{10^6} = \frac{\frac{15!}{5!10!} - 6}{10^6} \\ &= \frac{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11 - 6}{10^6} = \frac{3003 - 6}{10^6} = \frac{2997}{10^6} = 0,002997. \end{aligned}$$

- 3.77** Si on lance 5 dés équilibrés à 10 faces, quelle est la probabilité d'obtenir une somme supérieure ou égale à 40 ?

Corrigé

L'univers de cette expérience est

$$\Omega = \{\text{quintuples } (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \text{ où } x_i \in \{1, 2, \dots, 10\}\}$$

(x_i représente le résultat du lancer du i^{e} dé) et $|\Omega| = \overline{A_5^{10}} = 10^5$.

L'événement qui nous intéresse est

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^5 x_i \geq 40\}.$$

L'événement A a la même probabilité que son « symétrique »

$$B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^5 x_i \leq 15\} \quad (15 = 5 + 10 - 40).$$

Le cardinal de B est le même que celui de l'ensemble

$$C = \{(x_1, \dots, x_5) \mid \sum_{i=1}^5 x_i \leq 10, x_i \in \{0, \dots, 9\} \text{ pour } i = 1, \dots, 5\}$$

dont le cardinal est égal à celui de l'ensemble

$$D = \{(x_1, \dots, x_6) \mid \sum_{i=1}^6 x_i = 10, x_i \in \{0, \dots, 9\} \text{ pour } i = 1, \dots, 5 \text{ et } x_6 \in \{0, \dots, 10\}\}.$$

Ainsi

$$|A| = |B| = |C| = |D| = \overline{C}_{10}^6 - 5 = C_{10}^{15} - 5 = 3003 - 5 = 2998$$

(on soustrait 5 pour retirer les 5 solutions interdites où une des 5 premières variables vaut 10 et toutes les autres 0) et la probabilité de l'événement A est

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2998}{10^5} = \frac{1499}{50\,000} = 0,02998.$$

3.78 On choisit au hasard un entier entre 1 et 3000 (bornes comprises). Quelle est la probabilité qu'il soit divisible par 6 ou 10 ?

_____ Corrigé _____

Définissons

Ω : l'ensemble des entiers compris entre 1 et 3000 (bornes incluses),

A : l'ensemble des entiers de Ω divisibles par 6,

B : l'ensemble des entiers de Ω divisibles par 10.

On a

$$|\Omega| = 3000, \quad |A| = \lfloor 3000/6 \rfloor = 500 \quad \text{et} \quad |B| = \lfloor 3000/10 \rfloor = 300.$$

Le nombre de cas favorables est égal au cardinal de $A \cup B$ qui, par la formule d'inclusion-exclusion, est égal à

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

L'ensemble $A \cap B$ est celui des entiers de Ω divisibles par **ppmc(6, 10) = 30** et son cardinal est $|A \cap B| = \lfloor 3000/30 \rfloor = 100$. La probabilité p cherchée est donc égale à

$$p = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B| - |A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{500 + 300 - 100}{3000} = \frac{7}{30}.$$

3.6 Exercices supplémentaires et récapitulatifs

3.79 L'accès à un site bancaire en ligne nécessite l'introduction d'un code formé d'une suite de cinq couples de deux caractères. Chaque caractère est soit une lettre majuscule soit un chiffre décimal.

- Combien de codes d'accès formés de caractères tous différents existe-t-il ?
- Combien de codes d'accès sans deux caractères identiques à la suite existe-t-il ? (Peu importe que les deux caractères identiques apparaissent dans le même couple ou dans deux couples consécutifs)
- Combien de codes d'accès comportant au moins un couple entièrement numérique existe-t-il ?

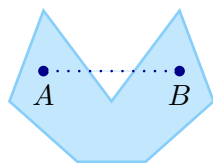
3.80 Le petit Tom joue avec 10 cubes bleus et 4 cubes jaunes (mis à part leur couleur, les cubes ne sont pas distinguables les uns des autres).

- De combien de manières différentes peut-il tous les empiler ?

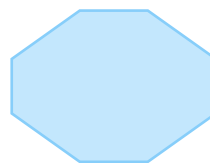
- b) De combien de manières différentes peut-il tous les empiler sans que deux cubes jaunes ne se touchent ?
 - c) De combien de manières différentes peut-il tous les empiler si les cubes jaunes sont toujours séparés par au moins deux cubes bleus ?
- 3.81** De combien de manières différentes pouvez-vous ranger sur une étagère quatre livres de programmation C++, trois livres de mathématiques discrètes, cinq livres de programmation Java et trois livres de programmation C si les ouvrages traitant d'un même sujet doivent être placés consécutivement ?
- 3.82** On considère n points dans $\mathbb{R}^2$ en position générale (c.-à-d. sans 3 points alignés). Déterminer en fonction de n , que l'on supposera plus grand ou égal à 3, le nombre de polygones ayant ces n points comme sommets.
- 3.83** Combien y a-t-il d'éléments dans l'union de quatre ensembles s'ils ont, respectivement, 50, 60, 70 et 80 éléments, que dans chaque paire d'ensembles distincts on compte 5 éléments communs, que dans chaque triplet d'ensembles distincts on compte un élément en commun et qu'aucun élément n'appartient aux quatre ensembles ?
- 3.84** a) Combien existe-t-il de codes décimaux de 7 chiffres tous différents comptant 3 chiffres pairs et 4 impairs ?
b) Même question mais pour des codes formés de 7 chiffres par forcément tous différents.
- 3.85** Montrer que parmi 51 entiers, on peut toujours en sélectionner deux dont la différence est divisible par 50.
- 3.86** Combien y a-t-il de mots binaires de longueur 8 commençant par un 0 et contenant exactement deux 1 ?
- 3.87** On lance quatre dés à six faces de couleurs différentes. Combien existe-t-il de possibilités d'obtenir un total de 19 sur les quatre dés ?
- 3.88** On lance quatre dés à huit faces, le premier rouge, le deuxième vert, le troisième bleu et le quatrième jaune. Combien existe-t-il de possibilités d'obtenir un total d'au moins 26 sur les quatre dés ?
- 3.89** Gaston a, une fois encore, oublié le code de sa carte bancaire. Il se souvient cependant que son code est formé de 6 chiffres dont les parités alternent. À supposer qu'il puisse faire autant d'essais qu'il le souhaite et que chaque tentative lui prenne une minute, combien de temps lui faudra-t-il, dans le pire des cas, pour retrouver son code ?
- 3.90** On considère un ordre quelconque des lettres de l'alphabet français. Que peut-on dire de la taille minimale de la plus longue séquence de consonnes consécutives qu'il contient ?
- 3.91** En C les noms des variables sont des chaînes de caractères formées de lettres minuscules et majuscules, de chiffres et du caractère souligné « `_` ». De plus un nom de variable ne peut pas commencer par un chiffre. Si seuls les n premiers caractères sont retenus pour identifier un nom de variable, combien de noms de variable différents existe-t-il en C ?
- 3.92** Combien y a-t-il d'entiers positifs inférieurs à 1 000 000 dont les chiffres somment à 10 ?
- 3.93** Lors d'une session d'une conférence, cinq chercheurs, notés A, B, C, D et E, doivent présenter leurs résultats.
- a) Combien d'ordres de passage est-il possible de définir si le chercheur B ne doit pas parler avant le chercheur A ?
 - b) Même question si B doit parler immédiatement après A.

3.94 Combien de diagonales possède un polygone convexe à $n \geq 3$ côtés ?

RAPPEL. Un polygone est *convexe* si pour toute paire de points A et B du polygone, le segment AB appartient entièrement au polygone.



Polygone non convexe



Polygone convexe

- 3.95** a) Dans combien d'ordres différents peut-on ranger les lettres du mot « TANGARA » ?
 b) Combien d'entre eux commencent et finissent par A ?
 c) Combien d'entre eux ont les trois A à la suite ?

- 3.96** On considère un championnat complet entre 8 équipes, chaque équipe jouant une fois contre chacune des autres. S'il n'y a pas de match nul et si chaque équipe gagne au moins un match, est-il vrai que, dans le classement final, il y a au moins deux équipes avec le même nombre de victoires ? Justifier votre réponse par un argument (convaincant) ou un contre-exemple.

- 3.97** Un code d'accès est formé de cinq chiffres décimaux. Quelle proportion d'entre eux contiennent trois mêmes chiffres ou plus à la suite ?

- 3.98** La société NOTRUST vient de sortir son dernier logiciel dont l'activation nécessite une clef de la forme : $XX-YYY-ZZZZ$ où XX est une suite de deux chiffres, YYY une suite de trois lettres majuscules et $ZZZZ$ une suite de quatre chiffres.

Les codes d'activation utilisés par la société les restrictions suivantes :

- 1) les deux chiffres du groupe XX sont de parité différente ;
- 2) les trois lettres majuscules du groupe YYY contiennent au moins une voyelle ;
- 3) les quatre chiffres du groupe $ZZZZ$ définissent un multiple de 4 non nul.

Combien de codes d'activation valides existe-t-il ?

- 3.99** Un train est formé d'une motrice (en tête) suivie de huit wagons de deuxième classe (tous identiques) et de quatre wagons de première classe (tous identiques).

- a) De combien de manières différentes est-il possible d'accrocher les douze wagons derrière la motrice ?
- b) De combien de manières différentes est-il possible d'accrocher les douze wagons derrière la motrice si les wagons de première doivent aller par deux et s'il doit y avoir au moins un wagon de deuxième avant, entre et après les groupes de wagons de première ?

- 3.100** a) Combien de mots différents de longueur onze peut-on former en utilisant une et une seule fois chaque lettre du mot « MARSUPILAMI » ?

- b) Même question si les deux M doivent être côte à côte mais ni en début ni en fin de mot.

- 3.101** Lors d'un travail écrit un étudiant doit répondre à 6 questions parmi 10.

- a) Combien de choix différents a-t-il ?
- b) Combien lui en reste-t-il s'il doit impérativement répondre aux deux premières questions ?
- c) Combien lui en reste-t-il s'il doit répondre à au moins trois questions parmi les cinq premières ?

3.102 Pour $n \geq 0$ entier, simplifier l'expression

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}.$$

3.103 On génère un mot de passe en choisissant 8 lettres minuscules différentes au hasard. Quelle est la probabilité que les lettres du mot généré apparaissent dans l'ordre alphabétique ?

3.104 On mélange (parfaitement) un jeu de jass (36 cartes). Quelle est la probabilité que les quatre as se retrouvent dans la première moitié du paquet de cartes ?

3.105 Le code secret d'une carte bancaire est formé d'une suite de six chiffres décimaux.

- a) Combien existe-t-il de codes dont la suite des chiffres est strictement décroissante ?
- b) Combien existe-t-il de codes comptant le chiffre 7 ?
- c) Combien existe-t-il de codes comptant au moins deux fois le chiffre 7 ?
- d) Combien existe-t-il de codes formés de chiffres tous différents et comptant autant de chiffres pairs que de chiffres impairs ?

3.106 Aujourd'hui sort le dernier e-bidule, pas vraiment mieux que le précédent, nettement plus cher mais tellement indispensable ! Trois amis se sont levés tôt dans l'espoir de mettre la main sur un exemplaire du précieux graal. Arrivés devant les portes d'un point de vente isolé, ils se retrouvent dans une foule de trente passionnés (eux y-compris) qui jouent des coudes pour être les premiers.

Avant l'ouverture des portes, le gérant du magasin décide de distribuer aléatoirement des numéros de passage. Il annonce ensuite qu'il n'a reçu que quinze exemplaires de l'appareil.

Calculer la probabilité que les trois amis repartent chacun avec un exemplaire du dernier e-bidule, autrement dit calculer la probabilité qu'ils aient reçu tous les trois un numéro de passage entre 1 et 15.

3.107 La clé d'activation d'un logiciel se présente sous la forme d'un code hexadécimal de onze chiffres (pas forcément tous différents) tirés au hasard.

- a) Combien de clés d'activation différentes existe-t-il ?
- b) Quelle est la probabilité qu'une clé contienne au moins un chiffre répété ?
- c) Quelle est la probabilité qu'une clé contienne au moins 2 fois le chiffre F ?
- d) Quelle est la probabilité qu'une clé contienne exactement 5 chiffres décimaux (pas forcément différents) ?
- e) Quelle est la probabilité que, dans la clé générée, chaque chiffre soit plus grand que le suivant ?
- f) Quelle est la probabilité qu'une clé soit formée d'exactly deux chiffres différents ?

3.108 Lors du repas de clôture d'un symposium, six personnes se retrouvent à la même table. Montrer qu'il y en a au moins trois qui ne se connaissent pas (deux à deux) ou au moins trois qui se connaissent (deux à deux).

3.109 Démontrer l'identité de Vandermonde :

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{m}{k-i} \cdot \binom{n}{i}$$

où m , n et k sont des entiers non négatifs avec $k \leq \min(m, n)$.

INDICATION. Interpréter le terme de gauche comme le nombre de sélections de k boules dans une urne contenant m boules rouges et n boules bleues.

3.7 Solutions d'exercices choisis

- 3.1** nb. de projets = $23 + 15 + 19 = 57$ (principe d'addition)
- 3.2** nb. max. de chaises = $26 \cdot 10 \cdot 10 = 2\,600$ (principe de multiplication)
- 3.3** nb. de signes différents = $2^6 = 64$ (principe de multiplication)
- 3.4** nb. de plaques d'immatriculation = $23 \cdot 9 \cdot 10^3 = 207\,000$ (principe de multiplication)
- 3.5** nb. de palindromes = $2^{\lceil n/2 \rceil}$ (on ne peut choisir librement que la moitié du mot soit les $\lceil n/2 \rceil$ premières lettres)
- 3.6** nb. de noms de variables = $26 + 26 \cdot 36 - 5 = 957$ (ne pas oublier les variables dont le nom ne compte qu'une seule lettre)
- 3.7** a) nb. de mots de 6 lettres sans voyelles = $20^6 = 64\,000\,000$ (principe de multiplication)
 b) nb. de mots de 6 lettres avec au moins une voyelle = $26^6 - 20^6 = 244\,915\,776$ (nb. total de mots moins nb. de mots sans voyelles)
 c) nb. de mots de 6 lettres sans deux lettres identiques à la suite = $26 \cdot 25^5 = 253\,906\,250$
- 3.8** nb. de mots de passe = $36^6(1 + 36 + 36^2) - 26^6(1 + 26 + 26^2)$ (on décompose selon la longueur du mot et, pour chaque longueur, on passe par le complémentaire en calculant le nombre total de mots moins ceux sans chiffres)
- 3.9** a) $k = \sum_{i=1}^m n_i$ (principe d'addition) b) $k = \prod_{i=1}^m n_i$ (principe de multiplication)
- 3.10** a) 3 (3 chaussettes pour 2 boîtes/couleurs) b) 10 (loi de Murphy!)
- 3.11** taille minimale du groupe = 367 (366 dates différentes)
- 3.12** taille minimale de la classe = 23 (11 notes différentes)

- 3.13** a) $7! = 5040$ b) $4! \cdot 3! = 24 \cdot 6 = 144$ c) 1
- 3.14** a) $7! = 5040$ b) $5! \cdot 2! = 240$ c) (i) 120 (ii) 720
- 3.15** a) $8! = 40\,320$ b) $7! \cdot 2! = 10\,080$ c) $(4!)^2 \cdot 2 = 1152$
- 3.16** $(8-1)! = 7! = 5040$ ou $\frac{8!}{8} = 7! = 5040$
- 3.17** $1 - \frac{A_6^{10}}{10^6} = \frac{1061}{1250} = 0,8488$
- 3.18** $\binom{9}{4} = 126$
- 3.19** $\binom{18}{3} = 816$
- 3.20** $\binom{24}{6} = 134\,596$
- 3.21** a) $7^4 = 2\,401$ b) 840 c) 1 029 d) 360
- 3.22** a) 56 b) 24 c) 32
- 3.23** nb. de suites strictement croissantes = $\binom{100}{7} = 16\,007\,560\,800$ (il y a bijection entre les combinaisons de 6 entiers parmi 100, c.-à-d. entre les sous-ensembles de 6 entiers choisis entre 1 et 100, et les suites strictement croissantes de longueur 6)

3.24 a) m^n

b) 0 si $n > m$, $A_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$ si $n \leq m$

3.25 a) $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

b) $(2x_1 - x_2)^5 = 32x_1^5 - 80x_1^4x_2 + 80x_1^3x_2^2 - 40x_1^2x_2^3 + 10x_1x_2^4 - x_2^5$

c) $(1+x)^7 = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7$

3.26 coeff. de $x^9 = \binom{14}{9} \cdot 2^{14-9} \cdot (-1)^9 = -32 \cdot \binom{14}{9} = -64\,064$

3.27 a) $\binom{12}{8} = \binom{12}{4} = 495$

b) $\binom{9}{3} \cdot 3^6 \cdot (-2)^3 = -489\,888$ c) Il n'y en a pas / il est nul

3.28 a) 2^n

b) 0

c) $(x+1)^n$

3.29 $\bar{P}(2, 4, 2, 1) = 3780$

3.30 $\bar{P}(5, 2, 1, 1, 2) = 83\,160$

3.31 $\binom{18}{5,6,7} = \frac{18!}{5!6!7!} = 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 3 = 14\,702\,688$

3.32 $\binom{11}{3,4,4} = 11\,550$

3.33 a) $\overline{C_{12}^6} = 6\,188$

b) $\overline{C_3^6} = 56$

c) $\overline{C_6^6} = 462$

3.34 a) $\overline{C_6^3} = 28$

b) $\overline{C_3^3} = 10$

c) $\overline{C_6^4} = 84$

3.35 $\overline{C_{11}^3} = 78$

3.36 $\overline{C_{13}^4} = 560$

3.37 $\overline{C_{17}^4} = 1140$

3.38 $\overline{C_7^{100}}$

3.39 a) 30

b) 29

c) 24

d) 18

3.40 Le nombre d'étudiants qui ne suivent de cours ni en informatique ni en mathématiques s'élève à $1807 - (453 + 567 - 299) = 1086$.

3.41 $\left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{77} \right\rfloor = 142 + 90 - 12 = 220$

3.42 150

3.43 $2^7 + 2^8 - 2^5 = 352$

3.44 $\frac{220}{1000} = \frac{11}{50} = 0,22$ (cf. 3.41)

$$3.45 \quad 1 - \left(\left\lfloor \frac{999}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{20} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{60} \right\rfloor \right) / 999 = 1 - \frac{99}{999} = \frac{100}{111} = 0,\overline{900}$$

$$3.46 \quad \frac{C_6^{100}}{A_6^{100}} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720} \approx 0,00139$$

$$3.47 \quad \frac{2}{5} = 0,4$$

$$3.48 \quad \text{a) } \frac{1}{\binom{36}{4}} = \frac{1}{58\,905} \approx 0,000017 \quad \text{e) } 0$$

$$\text{b) } \frac{\binom{9}{4}}{\binom{36}{4}} = \frac{126}{58\,905} = \frac{2}{935} \approx 0,00214 \quad \text{f) i. } \frac{\binom{3}{2}\binom{24}{2}}{\binom{36}{4}} = \frac{828}{58\,905} = \frac{92}{6545} \approx 0,01406$$

$$\text{c) } \frac{\binom{4}{1}\binom{32}{3}}{\binom{36}{4}} = \frac{19840}{58\,905} = \frac{3968}{11\,781} \approx 0,3368 \quad \text{ii. } \frac{\binom{3}{2}\binom{24}{2} + \binom{3}{3}\binom{24}{1}}{\binom{36}{4}} = \frac{852}{58\,905} = \frac{284}{19635}$$

$$\text{d) } 1 - \frac{\binom{32}{4}}{\binom{36}{4}} = \frac{22945}{58\,905} = \frac{4589}{11\,781} \approx 0,3895 \quad \approx 0,01446$$

$$3.49 \quad \text{a) } \frac{\binom{13}{1}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{4165} \approx 0,00024 \quad \text{b) } \frac{\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{1}\binom{4}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{6}{4165} \approx 0,00144$$

$$3.50 \quad 1 - \frac{\binom{13}{5}4^5}{\binom{52}{5}} = \frac{2053}{4165} \approx 0,493$$

$$3.51 \quad \frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$$

$$3.52 \quad \text{a) } 0 \quad \text{c) } \frac{2}{144} = \frac{1}{72} \quad \text{e) } \frac{1}{72}$$

$$\text{b) } \frac{1}{144} \quad \text{d) } \frac{\overline{C_8^2}}{12^2} = \frac{1}{16} \quad \text{f) } \frac{1}{144}$$

$$3.53 \quad \text{a) } \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} \quad \text{c) } 0 \quad \text{e) } \frac{5}{72}$$

$$\text{b) } \frac{1}{216} \quad \text{d) } \frac{\overline{C_4^3}}{6^3} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72} \quad \text{f) } \frac{\overline{C_6^3} - 3}{6^3} = \frac{25}{216}$$

$$3.54 \quad \frac{\overline{C_{100}^4} - 4}{100^4} = \frac{176\,847}{10^8}$$

$$3.55 \quad \text{a) } \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} \quad \text{b) } \frac{1}{2} \text{ (par symétrie)} \quad \text{c) } \frac{1}{6}$$

$$3.56 \quad \frac{\binom{6}{4}\binom{36}{2}}{\binom{42}{6}} = \frac{675}{374\,699} \approx 0,001801$$

$$3.57 \quad \frac{1}{365} \text{ (hyp. d'équiprobabilité des dates et non-prise en compte du 29 février)}$$

$$3.58 \quad \text{a) } 1 - \frac{A_n^{365}}{A_n^{365}} = 1 - \frac{A_n^{365}}{365^n} = 1 - \frac{365!}{365^n(365-n)!} \text{ pour } 2 \leq n \leq 365$$

$$3.78 \quad \text{a) } A_{10}^{36} = \frac{36!}{26!} \quad \text{b) } 36 \cdot 35^9 \quad \text{c) } 36^{10} - (36^2 - 10^2)^5$$

- 3.79** a) $C_4^{14} = 1\,001$ b) $\overline{C}_7^5 = C_7^{11} = C_4^{11} = 330$ c) $\overline{C}_4^5 = C_4^8 = 70$
- 3.80** $P_4 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_5 \cdot P_3 = 4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 3! = 2\,488\,320$ (premier facteur pour l'ordre des sujets)
- 3.81** $\frac{(n-1)!}{2}$ (chaque permutation cyclique et sa version « renversée » définit un polygone)
- 3.82** $50 + 60 + 70 + 80 - \binom{4}{2} \cdot 5 + \binom{4}{3} \cdot 1 - 0 = 260 - 6 \cdot 5 + 4 = 234$ (I.-E. pour 4 ensembles)
- 3.83** a) $C_3^5 \cdot C_4^5 \cdot P_7 = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{5!}{4!1!} \cdot 7! = 10 \cdot 5 \cdot 7! = 50 \cdot 7! = 252\,000$ aussi égal à $C_3^7 \cdot A_3^5 \cdot A_4^5$
 b) $C_3^7 \cdot \overline{A}_3^5 \cdot \overline{A}_4^5 = 7 \cdot 5 \cdot 5^7 = 7 \cdot 5^8 = 2\,734\,375$
- 3.84** La différence entre deux entiers est un multiple de 50 si et seulement si ces deux entiers sont équivalents modulo 50, c.-à-d. si et seulement si leurs valeurs modulo 50 sont égales. Avec 51 entiers et seulement 50 valeurs différentes possibles pour le modulo, il doit exister au moins deux entiers parmi les 51 dont la différence est un multiple de 50.
- 3.85** $\binom{7}{2} = 21$
- 3.86** $\overline{C}_5^4 = 56$
- 3.87** $\overline{C}_6^5 = C_6^{10} = 210$
- 3.88** $2 \cdot 5^6 = 31\,250$ minutes, soit 21 jours, 16 heures et 50 minutes
- 3.89** Il contient au moins $\left\lceil \frac{20}{7} \right\rceil = 3$ consonnes consécutives (et au plus 20, évidemment)
- 3.90** $53 \sum_{k=0}^{n-1} 63^k = 53 \cdot \frac{63^n - 1}{62}$
- 3.91** $\overline{C}_{10}^6 - 6 = 2\,997$
- 3.92** a) $5!/2 = 60$ (par symétrie) b) $4! = 24$
- 3.93** $\frac{n(n-3)}{2}$
- 3.94** a) $7!/3! = 840$ b) $5! = 120$ c) $5! = 120$
- 3.95** Vrai (8 équipes pour 7 scores finaux différents possibles)
- 3.96** $2800/10^5 = 7/250$
- 3.97** $50 \cdot (26^3 - 20^3) \cdot \lfloor 9999/4 \rfloor = 50 \cdot 9576 \cdot 2499 = 1\,196\,521\,200$
- 3.98** a) $\overline{P}(4, 8) = \binom{12}{4} = 495$ b) $\overline{C}_5^3 = 21$
- 3.99** a) $\frac{11!}{2!2!2!} = 4\,989\,600$ b) $8 \cdot \frac{9!}{2!2!} = 725\,760$
- 3.100** a) $\binom{10}{6} = 210$ b) $\binom{8}{4} = 70$ c) 155
- 3.101** 3^n
- 3.102** $p = \frac{C_8^{26}}{A_8^{26}} = \frac{1}{8!} = \frac{1}{40\,320} \approx 0,0000248$

$$\mathbf{3.103} \quad \frac{4}{77} \approx 0,05195$$

$$\mathbf{3.104} \quad \text{a) } \binom{10}{6} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$$

$$\text{b) } \overline{A_6^{10}} - \overline{A_6^9} = 10^6 - 9^6 = 468\,559$$

$$\text{c) } \overline{A_6^{10}} - \overline{A_6^9} - \binom{6}{1} \overline{A_5^9} = 10^6 - 9^6 - 6 \cdot 9^5 = 114\,265$$

$$\text{d) } \binom{6}{3} (A_3^5)^2 = 20 \cdot 60^2 = 72\,000 \text{ ou } (C_3^5)^2 P_6 = 10^2 \cdot 6! = 72\,000$$

$$\mathbf{3.105} \quad \frac{\binom{15}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{13}{116} \approx 0,112$$

$$\mathbf{3.106} \quad \text{a) } \overline{A_{11}^{16}} = 16^{11}$$

$$\text{b) } 1 - \frac{A_{11}^{16}}{\overline{A_{11}^{16}}} = 1 - \frac{16!}{5! \cdot 16^{11}} \approx 0,99$$

$$\text{c) } 1 - \frac{\overline{A_{11}^{15}}}{\overline{A_{11}^{16}}} - \frac{\binom{11}{1} \overline{A_{10}^{15}}}{\overline{A_{11}^{16}}} = 1 - \left(\frac{15}{16}\right)^{11} - \frac{11}{16} \left(\frac{15}{16}\right)^{10} = 1 - \frac{13}{8} \left(\frac{15}{16}\right)^{10} \approx 0,148$$

$$\text{d) } \frac{\binom{11}{5} \overline{A_5^{10}} \overline{A_6^6}}{\overline{A_{11}^{16}}} = \frac{11! \cdot 10^5 \cdot 6^6}{5! \cdot 6! \cdot 16^{11}} \approx 0,123$$

$$\text{e) } \frac{C_{11}^{16}}{\overline{A_{11}^{16}}} = \frac{16!}{5!11!16^{11}} \approx 2,48 \cdot 10^{-10}$$

$$\text{f) } \frac{\binom{16}{2} (\overline{A_{11}^2} - 2)}{\overline{A_{11}^{16}}} = \frac{16 \cdot 15 \cdot (2^{11} - 2)}{2 \cdot 16^{11}} = \frac{15 \cdot (2^{10} - 1)}{2^{40}} = \frac{15 \cdot 1023}{2^{40}} \approx 1,396 \cdot 10^{-8}$$

