

Théorème (Interprétation du déterminant de deux vecteurs du plan)

On considère le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ainsi que deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de ce plan. Alors le déterminant D de la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est égal à l'**aire signée** (on dit aussi **orientée** ou **algébrique**) du parallélogramme défini par $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Ce déterminant D est

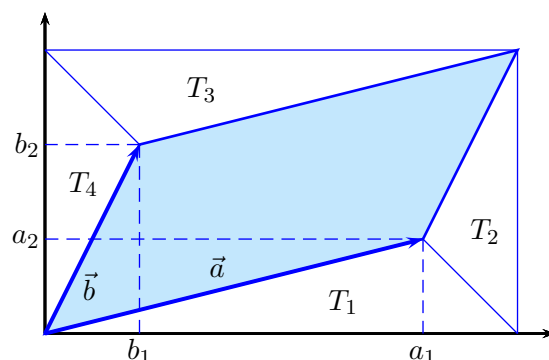
- ▷ positif si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orientés positivement (l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est positif et compris entre 0 et π) ;
- ▷ nul si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires ;
- ▷ négatif si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orientés négativement (l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est négatif et compris entre 0 et $-\pi$).

En tous les cas, l'**aire du parallélogramme** est égale à la *valeur absolue* de D .

Illustration

L'aire $\mathcal{A}$ du parallélogramme est égale à celle du rectangle de côtés $(a_1 + b_1)$ et $(a_2 + b_2)$ moins celles des quatre triangles T_1 , T_2 , T_3 et T_4 :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - \frac{1}{2} \left((a_1 + b_1)a_2 + \right. \\ &\quad \left. b_1(a_2 + b_2) + (a_1 + b_1)a_2 + b_1(a_2 + b_2) \right) \\ &= a_1b_2 - a_2b_1 \end{aligned}$$



Dans le cas présent, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont **orientés positivement** et

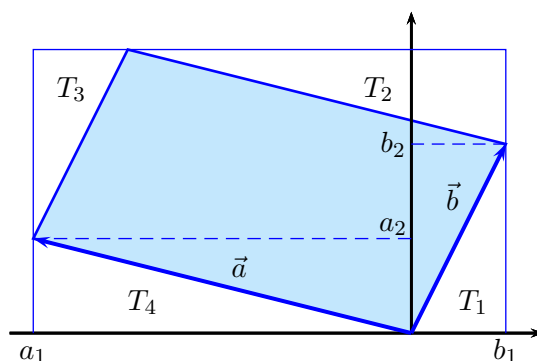
$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = \mathcal{A}$$

Dans cette deuxième configuration, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont **orientés négativement** et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (b_1 - a_1)(a_2 + b_2) - \frac{1}{2} \left((b_1b_2 - a_1a_2 + \right. \\ &\quad \left. b_1b_2 - a_1a_2) \right) = a_2b_1 - a_1b_2 \end{aligned}$$

alors que

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = -\mathcal{A}$$



Exercice 1

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du parallélogramme de sommets $A(0, 1)$, $B(3, 0)$, $C(5, -2)$ et $D(2, -1)$.

Exercice 2

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien, on considère les trois points $A(1, 1)$, $B(2, -1)$ et $C(x, y)$. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour les coordonnées du points C de manière à ce que l'aire du triangle ABC soit égale à 2.

Exercice 3

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien, on considère les deux points $A(2, 4)$ et $B(6, 5)$ ainsi que la droite δ d'équation cartésienne

$$\delta : -x + 3y = 11.$$

Déterminer l'ensemble des points $C(x, y)$ de δ pour lesquels l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est égale à 2.

Exercice 4

On considère quatre points $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ et $D(d_1, d_2)$ du plan $\mathbb{R}^2$ définissant un quadrilatère simple $ABCD$.

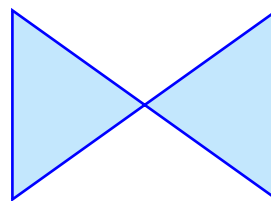
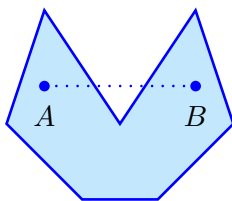
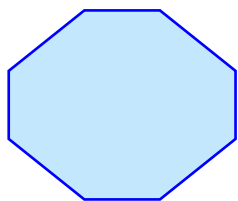
- Développer une formule (basée sur le calcul de déterminants) permettant de calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$.
- Appliquer et vérifier votre formule dans le cas des points
 - $A(0, 1)$, $B(4, 2)$, $C(2, -3)$ et $D(-3, 1)$
 - $A(-1, 3)$, $B(5, 2)$, $C(1, -3)$ et $D(1, 1)$

Exercice 5

Soit P un polygone *simple* du plan donné par la liste cyclique $(A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = A_0)$ de ses n sommets lorsque l'on parcourt son périmètre. Développer un algorithme permettant de tester si P est **convexe** ou non.

REMARQUE. Pour simplifier, on supposera que P ne présente pas 3 sommets consécutifs alignés.

RAPPEL. Un polygone est *simple* si ses côtés ne s'intersectent qu'aux sommets et si chaque sommet n'est l'intersection que de deux côtés. Un polygone est *convexe* si pour toute paire de points A et B du polygone, le segment $[AB]$ appartient entièrement au polygone.



Polygone simple et convexe Polygone simple mais non convexe Polygone non simple (croisé)

Solutions

Exercice 1

$$\mathcal{A} = 4$$

Exercice 2

$$C \in \delta_1 \cup \delta_2 \text{ avec } \delta_1 : 2x + y = 7 \text{ et } \delta_2 : 2x + y = -1$$

Exercice 3

$$C_1(4, 5) \text{ et } C_2(-8, 1)$$

Exercice 4

$$\text{a) } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AC} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{AC} & \overrightarrow{AD} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{AC} & \overrightarrow{BD} \end{vmatrix} \right|$$

$$\text{b) i) } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(-16 - 2) + (0 - 12)| = 15$$

$$\text{ii) } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(-36 + 2) + (-4 + 12)| = 13$$