
Cercles, tangentes et bissectrices

Équation du cercle de rayon r centré en C

Équation cartésienne. Dans le plan, un cercle n'est rien d'autre que le lieu géométrique (c.-à-d. l'ensemble) des points à même distance d'un point fixé, le centre du cercle.

Si on note $C(x_0, y_0)$ le centre, $X(x, y)$ un point quelconque du cercle et r son rayon (évidemment ≥ 0), l'équation cartésienne du cercle $\Gamma(C, r)$ est

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

car

$$\|\overrightarrow{CX}\| = r \iff \|\overrightarrow{CX}\|^2 = r^2 \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Exemple 1 : Cercle unité. Le cercle unité ou cercle trigonométrique est le cercle de rayon 1 centré à l'origine du repère. Son équation cartésienne est $x^2 + y^2 = 1$.

Exemple 2. L'équation cartésienne du cercle de rayon 10 centré au point $(-5, 4)$ est

$$(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 100.$$

Si l'équation est donnée sous forme développée, il faut reconstituer les carrés pour obtenir le centre et le rayon du cercle.

Exemple 3. L'équation

$$x^2 + y^2 - 12x + 4y + 20 = 0$$

est l'équation cartésienne d'un cercle (les coefficients de x^2 et y^2 sont égaux). Pour obtenir son centre et son rayon on complète les carrés :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 12x + 4y + 20 = 0 &\iff x^2 - 12x + 36 - 36 + y^2 + 4y + 4 - 4 + 20 = 0 \\ &\iff (x - 6)^2 + (y + 2)^2 - 40 + 20 = 0 \\ &\iff (x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 20. \end{aligned}$$

L'équation est celle d'un cercle de rayon $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ centré en $(6, -2)$.

Équations paramétriques. Pour paramétrer le cercle $\Gamma(C, r)$ on utilise l'angle (orienté) entre la demi-droite horizontale, partant de C et dirigé vers la droite, et la demi-droite reliant C à un point X du cercle :

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos(t) \\ y = y_0 + r \sin(t) \end{cases} \quad \text{avec } 0 \leq t < 2\pi \quad (\text{ou } -\pi < t \leq \pi)$$

Tangente passant par un point A du cercle. La droite t est la tangente au point A d'un cercle de centre C si et seulement si $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal de t .

Exemple 4. Le point $A(4, 2)$ appartient au cercle de l'exemple 3. L'équation cartésienne de la tangente au cercle passant par A est

$$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff \begin{bmatrix} x - 4 \\ y - 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 - 4 \\ -2 - 2 \end{bmatrix} = 0 \iff 2x - 4y = 0.$$

Bissectrices de deux droites sécantes du plan

Les bissectrices de deux droites sécantes d_1 et d_2 sont les droites b_1 et b_2 qui partagent les angles entre les deux droites en deux angles égaux.

Les deux bissectrices b_1 et b_2 sont perpendiculaires et tout point d'une bissectrice est à égale distance des deux droites d_1 et d_2

Équation cartésienne des bissectrices.

Si les deux droites d_1 et d_2 sont données par leur équation cartésienne

$$(d_1) : A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0 \quad \text{et} \quad (d_2) : B_1x_1 + B_2x_2 + B_3 = 0,$$

un point $X(x_1, x_2)$ est équidistant des deux droites si et seulement si

$$\frac{|A_1x_1 + A_2x_2 + A_3|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} = \frac{|B_1x_1 + B_2x_2 + B_3|}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}$$

et les équation cartésiennes des deux bissectrices b_1 et b_2 sont

$$\frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} = \pm \frac{B_1x_1 + B_2x_2 + B_3}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}$$

Équations paramétriques des bissectrices.

Si les deux droites d_1 et d_2 se coupent au point A et ont $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ pour vecteurs directeurs respectifs, les vecteurs

$$\vec{w}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|} \vec{v}_1 + \frac{1}{\|\vec{v}_2\|} \vec{v}_2 \quad \text{et} \quad \vec{w}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|} \vec{v}_1 - \frac{1}{\|\vec{v}_2\|} \vec{v}_2$$

sont des vecteurs directeurs de b_1 et b_2 dont les représentations paramétriques vectorielles sont alors

$$(b_1) : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{w}_1, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

et

$$(b_2) : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \mu \vec{w}_2, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$