
Corrigés des exercices 2.14 et 2.15

Exercice 2.14

Soient les quatre vecteurs

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Trouver un vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} + \vec{a}_1$ soit colinéaire à $\vec{b}_1$ et $\vec{v} + \vec{a}_2$ colinéaire à $\vec{b}_2$.

Résolution

Notons $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ le vecteur cherché.

▷ Les deux vecteurs $\vec{v} + \vec{a}_1$ et $\vec{b}_1$ sont colinéaires si et seulement si l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs est nulle, c.-à-d. si et seulement si

$$\begin{vmatrix} v_1 + 1 & 1 \\ v_2 - 10 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3v_1 - v_2 = -13.$$

▷ De même, les deux vecteurs $\vec{v} + \vec{a}_2$ et $\vec{b}_2$ sont colinéaires si et seulement si

$$\begin{vmatrix} v_1 + 15 & 4 \\ v_2 - 7 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -v_1 - 4v_2 = -13.$$

En ajoutant 3 fois la deuxième équation à la première on obtient

$$-13v_2 = -4 \cdot 13 \quad \text{et} \quad v_2 = 4.$$

De la deuxième équation on obtient alors

$$v_1 = -4v_2 + 13 \quad \text{et} \quad v_1 = -16 + 13 = -3.$$

Le vecteur $\vec{v}$ cherché est $\vec{v} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}}}$.

Exercice 2.15

Étant donné les trois vecteurs

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

quel multiple de $\vec{v}$ faut-il ajouter à $\vec{a}$ pour obtenir un vecteur colinéaire à $\vec{b}$?

Résolution

Soit $\lambda\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, le multiple de $\vec{v}$ recherché. Les deux vecteurs $\lambda\vec{v} + \vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires si et seulement si l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs est nulle, c.-à-d. si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 2\lambda - 3 & 4 \\ 5\lambda - 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4\lambda - 6 - 20\lambda + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 16\lambda = -2 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{8}$$

Il faut donc ajouter $\underline{\underline{-\frac{1}{8}\vec{v}}}$ à $\vec{a}$.