

Géométrie analytique de l'espace : Corrigés des exercices supplémentaires

Exercice 2.84

- a) PREMIÈRE APPROCHE. On obtient un vecteur directeur $\vec{v}$ de d en calculant le produit vectoriel des vecteurs normaux des deux plans dont d est l'intersection :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On cherche ensuite un point de d . Si on pose $z = 0$ on obtient immédiatement $y = 5$, puis $x = -4 + 10 = 6$. Ainsi, la droite d admet la représentation paramétrique

$$(d) : \begin{cases} x = 6 - 2\lambda \\ y = 5 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

DEUXIÈME APPROCHE. On cherche deux points de d . En fixant z à zéro on obtient un premier point $C(6, 5, 0)$ et en fixant y à zéro on obtient un second point $D(1, 0, 5/2)$. On en déduit premièrement un vecteur directeur de d : $\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 5/2 \end{bmatrix}^T$, colinéaire à $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$ puis une représentation paramétrique de d :

$$(d) : \begin{cases} x = 6 - 2\lambda \\ y = 5 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

TROISIÈME APPROCHE. On résout les équations cartésiennes. Ici c'est particulièrement simple, il suffit d'ajouter deux fois la deuxième équation à la première pour obtenir un système échelonné réduit :

$$(d) : \begin{cases} x + 2z = 6 \\ y + 2z = 5 \end{cases}$$

dont la solution, sous forme paramétrique, n'est rien d'autre que la représentation cherchée :

$$(d) : \begin{cases} x = 6 - 2\lambda \\ y = 5 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- b) La distance entre le point P et la droite e , passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$, est

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, e) &= \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} 3-6 \\ 4-1 \\ 3-4 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{4+1+4}} \\ &= \frac{\left\| \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|}{3} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right\|}{3} = \frac{\sqrt{25+16+9}}{3} = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{2}}{3}}}. \end{aligned}$$

Exercice 2.85

Il existe deux plans vérifiant les conditions demandées.

- 1) Le premier contient la droite d et est parallèle au vecteur $\overrightarrow{PQ}$ qui sert de deuxième vecteur directeur du plan, le premier étant $\vec{v}$. On a

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} -3-3 \\ -2-4 \\ 6-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{et on peut prendre} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

comme deuxième vecteur directeur du plan. Le produit vectoriel entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ fournit un vecteur normal du plan cherché :

$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

L'équation du plan est de la forme $6x_1 - 5x_2 + x_3 = D$ et on obtient la valeur de D en injectant les coordonnées du point A dans l'équation : $18 + 5 + 2 = D$. L'équation cartésienne du premier plan est :

$$\underline{\underline{6x_1 - 5x_2 + x_3 = 25.}}$$

ALTERNATIVE. On développe l'équation normale du plan pour obtenir son équation cartésienne :

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \iff \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = 0 \iff \underline{\underline{6x_1 - 5x_2 + x_3 - 25 = 0.}}$$

- 2) Le second plan contient la droite d et passe par le point M , milieu du segment $[PQ]$. On a

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 0-3 \\ 1+1 \\ 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeur du plan cherché et leur produit vectoriel fournit un vecteur normal de ce plan :

$$\vec{n} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 13 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Comme pour le premier plan, on peut développer l'équation normale de ce second plan pour obtenir son équation cartésienne :

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \iff \begin{bmatrix} 6 \\ 13 \\ -8 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = 0 \iff \underline{\underline{6x_1 + 13x_2 - 8x_3 + 11 = 0}}$$

ou utiliser le point A pour obtenir la constante dans son équation cartésienne :

$$\underline{\underline{6x_1 + 13x_2 - 8x_3 = 18 - 13 - 16 = -11.}}$$

Exercice 2.86

a) On construit deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de π à partir de A , B et C :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Une représentation paramétrique de π est alors

$$(\pi) : \begin{cases} x_1 = 4 + 3\lambda \\ x_2 = -1 + \mu \\ x_3 = 5 - 2\lambda + 2\mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

b) PREMIÈRE APPROCHE. On calcule le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ afin d'obtenir un vecteur normal $\vec{n}$ de π :

$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

On utilise ensuite le fait que le point A (ou B ou C) appartient au plan pour déterminer le terme constant dans l'équation de π :

$$2 \cdot 4 - 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 = 8 + 6 + 15 = 29.$$

Ainsi le plan π admet l'équation cartésienne

$$\underline{\underline{2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 29.}}$$

REMARQUE. On obtient la même équation en développant l'équation normale de π .

DEUXIÈME APPROCHE. On élimine λ et μ des équations paramétriques. En ajoutant à la troisième équation $2/3$ de la première et en lui soustrayant 2 fois la deuxième on obtient

$$\frac{2}{3}x_1 - 2x_2 + x_3 = \frac{8}{3} + 2 + 5 = \frac{29}{3}$$

et en multipliant l'équation précédente par 3 (parce que c'est plus joli) on obtient la même équation cartésienne de (π) que par la première approche :

$$\underline{\underline{2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 29.}}$$

c) Le volume du tétraèdre de sommets $ABCD$ est égal au sixième de celui de parallélépipède construit sur $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ alors que le volume de ce dernier est égal à la valeur absolue du produit mixte des trois vecteurs.

Le point D appartient à la droite d de représentation paramétrique

$$(d) : \begin{cases} x_1 = 4 - 4\lambda \\ x_2 = 2 + 2\lambda \\ x_3 = 10 + 5\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{et } \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} (4 - 4\lambda) - 4 \\ (2 + 2\lambda) + 1 \\ (10 + 5\lambda) - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\lambda \\ 3 + 2\lambda \\ 5 + 5\lambda \end{bmatrix}.$$

Le volume V du tétraèdre de sommets $ABCD$ est alors, en fonction de λ ,

$$\begin{aligned} V &= \frac{|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]|}{6} = \frac{\left|\begin{vmatrix} 3 & 0 & -4\lambda \\ 0 & 1 & 3+2\lambda \\ -2 & 2 & 5+5\lambda \end{vmatrix}\right|}{6} \\ &= \frac{\left|3 \begin{vmatrix} 1 & 3+2\lambda \\ 2 & 5+5\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & -4\lambda \\ 1 & 3+2\lambda \end{vmatrix}\right|}{6} = \frac{|3(5+5\lambda-2(3+2\lambda))-8\lambda|}{6} \\ &= \frac{|3(\lambda-1)-8\lambda|}{6} = \frac{|-5\lambda-3|}{6} = \frac{|5\lambda+3|}{6}. \end{aligned}$$

Ce volume est égal à 2 si et seulement si

$$\frac{|5\lambda+3|}{6} = 2 \iff |5\lambda+3| = 12 \iff 5\lambda+3 = \pm 12 \iff \lambda = \frac{9}{5} \text{ ou } \lambda = -3.$$

Sans surprise on trouve deux points D possibles. Le premier a pour coordonnées

$$\begin{cases} x_1 &= 4 - 4 \cdot 9/5 = -16/5 \\ x_2 &= 2 + 2 \cdot 9/5 = 28/5 \\ x_3 &= 10 + 5 \cdot 9/5 = 19 \end{cases}$$

alors que celles du second sont

$$\begin{cases} x_1 &= 4 - 4 \cdot (-3) = 16 \\ x_2 &= 2 + 2 \cdot (-3) = -4 \\ x_3 &= 10 + 5 \cdot (-3) = -5 \end{cases}$$

Les deux points D de la droite d tels que le volume du tétraèdre de sommets $ABCD$ soit égal à 2 sont

$$\underline{\underline{D(-16/5, 28/5, 19)}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{D(16, -4, -5)}}.$$

Exercice 2.87

On considère le plan π d'équation cartésienne $3x + 4y - 12z = 12$.

- a) Les sommets du triangle sont : $X(4, 0, 0)$, $Y(0, 3, 0)$ et $Z(0, 0, -1)$. L'aire $\mathcal{A}$ du triangle de sommets XYZ est égale à la moitié de la norme du produit vectoriel entre $\overrightarrow{XY}$ et $\overrightarrow{XZ}$:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{XY} \wedge \overrightarrow{XZ}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{9+16+144} = \underline{\underline{\frac{13}{2}}}.$$

- b) La trace horizontale de π est l'intersection entre π et le plan Oxy d'équation $z = 0$, elle passe par le point X et admet le vecteur $\overrightarrow{XY}$ comme vecteur directeur. Une représentation paramétrique de t est

$$(t) : \underline{\underline{\begin{cases} x &= 4 - 4\lambda \\ y &= 3\lambda \\ z &= 0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} .}}$$

- c) Les vecteurs normaux des plans π et Oxy sont, respectivement,

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Le cosinus de l'angle θ entre ces deux vecteurs est

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{p}}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{p}\|} = -\frac{12}{13}$$

et l'angle (aigu) φ entre les deux plans est

$$\varphi = \arccos(|\cos(\theta)|) = \underline{\underline{\arccos\left(\frac{12}{13}\right)}} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\pi - \arccos\left(-\frac{12}{13}\right)}}.$$

d) On sait que $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{XP}_{\vec{n}}$. On obtient

$$\overrightarrow{XP}_{\vec{n}} = \frac{\overrightarrow{XP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix}}{169} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix} = \frac{-4 - 48}{13^2} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix} = -\frac{4}{13} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix}$$

puis

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{XP}_{\vec{n}} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{8}{13} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 52 + 24 \\ -13 + 32 \\ 52 - 96 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 76 \\ 19 \\ -44 \end{bmatrix}$$

et les coordonnées du point Q , symétrique de P par rapport à π sont $(76/13, 19/13, -44/13)$.

Exercice 2.88

a) La distance δ entre les deux droites gauches d_1 et d_2 est

$$\begin{aligned} \delta = \text{dist}(d_1, d_2) &= \frac{|\overrightarrow{A_1 A_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2|}{\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} -4 + 5 & -3 & 3 \\ 7 - 4 & 1 & 5 \\ -3 - 15 & 4 & -4 \end{vmatrix} \right|}{\left\| \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} \right\|} \\ &= \frac{\left| \begin{vmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{-3} & \textcolor{red}{3} \\ 3 & 1 & 5 \\ -18 & 4 & -4 \end{vmatrix} \right|}{\left\| \begin{bmatrix} -24 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -18 & -4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -18 & 4 \end{vmatrix} \right|}{6 \left\| \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|} \\ &= \frac{|(-4 - 20) + 3(-12 + 90) + 3(12 + 18)|}{6 \cdot 5} = \frac{|-24 + 234 + 90|}{30} = \frac{|300|}{30} = \underline{\underline{10}}. \end{aligned}$$

b) Les deux points qui réalisent cette distance sont $B_1(1, 2, 7) \in d_1$ et $B_2(-7, 2, 1) \in d_2$.