

Mathématiques 2

Chap. 2 : Calcul vectoriel et géométrie analytique

Jean-François Hêche

Printemps 2025

2.1 Calcul vectoriel



2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

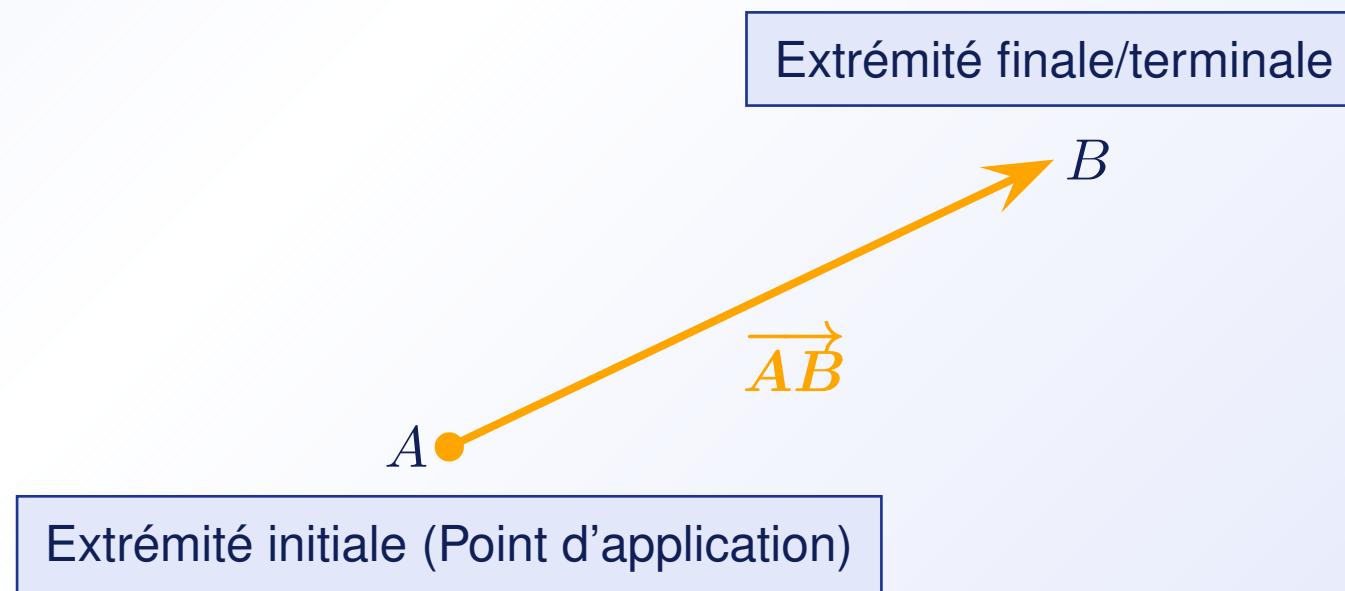
2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

Soient A et B deux points distincts (du plan, de l'espace, ...).

- Le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ correspond au segment orienté (à la flèche) allant de A vers B .
- Le point A est l'**extrémité initiale** du vecteur. Il est également appelé son **point d'application**.
- Le point B est l'**extrémité finale** ou **terminale** du vecteur.



2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- En géométrie, le choix du point d'application d'un vecteur n'est pas important.

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est entièrement caractérisé par

- ▶ sa **direction** : la direction (la pente) de la droite passant par A et B ;
- ▶ son **sens** : de A vers B (le sens de la demi-droite AB) ;
- ▶ sa **longueur** ou **norme**, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ (voire simplement $|\overrightarrow{AB}|$).

- Dans certaines applications (typiquement en physique), le choix du point d'application d'un vecteur est important. On parle alors de **vecteurs liés** pour les différencier des **vecteurs libres** considérés ici.

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

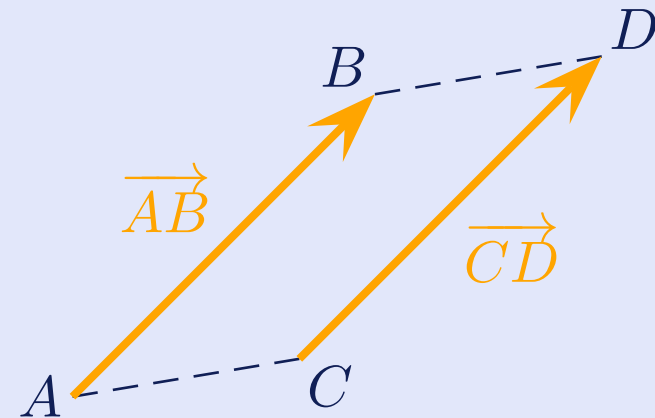
2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

■ Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux**, et on note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, si et seulement si

- ▶ ils ont **même direction** (les droites AB et CD sont parallèles ou confondues) ;
- ▶ ils ont **même sens** ;
- ▶ ils ont **même longueur**.



- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement s'il existe une translation transformant $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{CD}$.
- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

Vecteurs colinéaires, opposés, unitaires

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

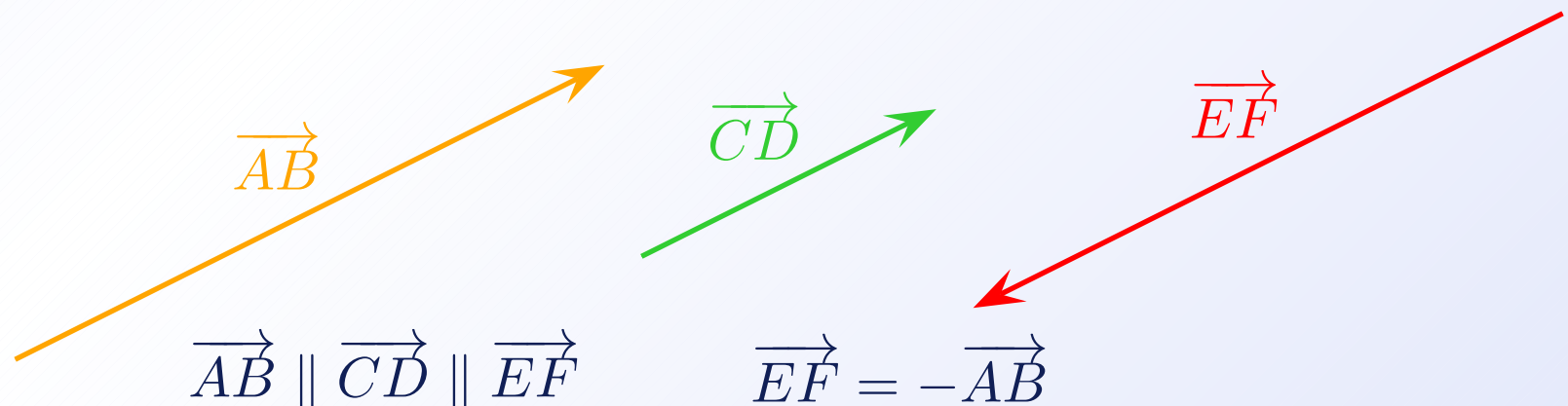
- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ de même direction sont dits **colinéaires**, ou **parallèles**, et on note $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

- Deux vecteurs de même direction et de même longueur mais de sens opposés sont dits **opposés**.

En particulier $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés et on note

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

- Un vecteur **unitaire** est un vecteur de norme 1.



2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

Si les deux extrémités du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont confondues, c.-à-d. si $A = B$, on obtient le **vecteur nul** noté $\vec{0}$.

- La norme (la longueur) du vecteur nul est égale à zéro.
- La direction et le sens du vecteur nul sont **indéterminés**.
- Tous les vecteurs nuls sont égaux entre eux.
- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs (y compris lui-même).
- Le vecteur nul est également orthogonal à tous les vecteurs (y compris lui-même).

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

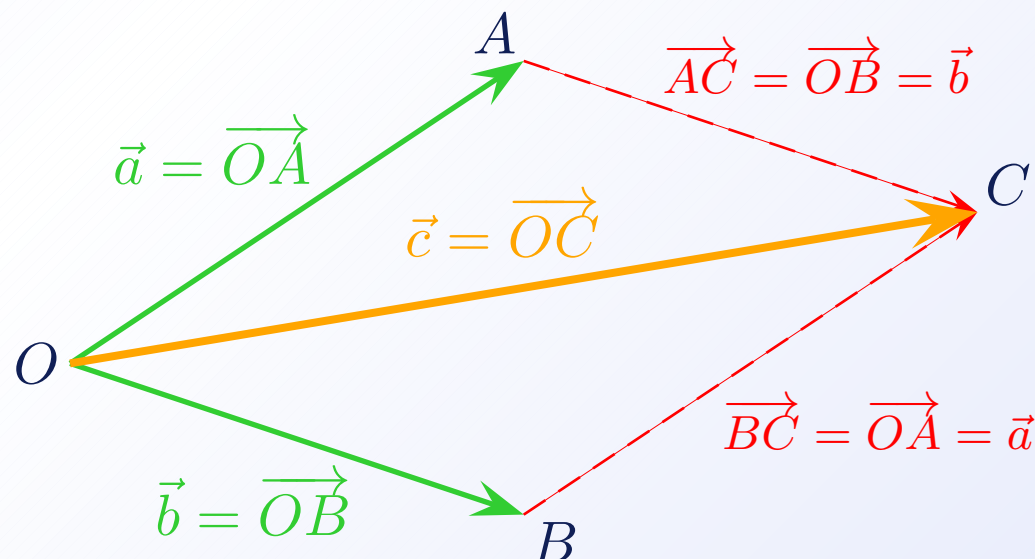
2.4 Moindres carrés

La somme de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le vecteur $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ obtenu par la règle du parallélogramme ou par construction bout à bout.

Règle du parallélogramme. On choisit le même point d'application O pour les deux vecteurs :

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB}.$$

La somme $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ est le vecteur représenté par la diagonale $\overrightarrow{OC}$ du parallélogramme $OACB$.



Addition vectorielle (2)

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

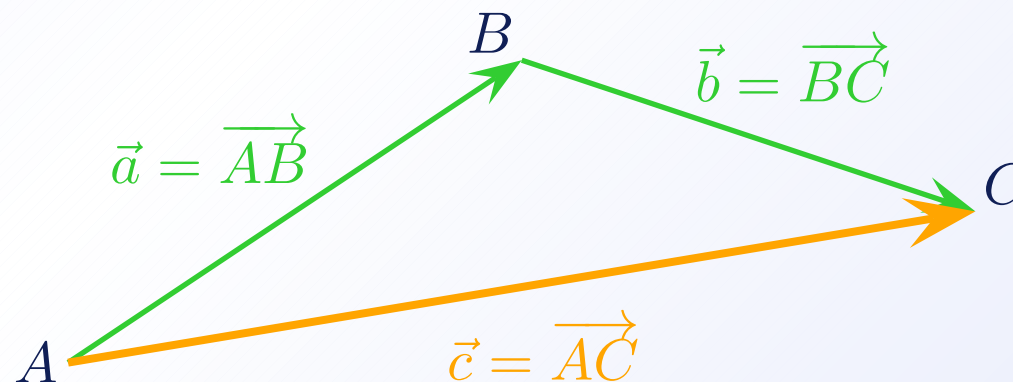
2.4 Moindres carrés

Construction bout à bout. On choisit l'extrémité finale de $\vec{a}$ comme extrémité initiale de $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC}.$$

La somme de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est alors

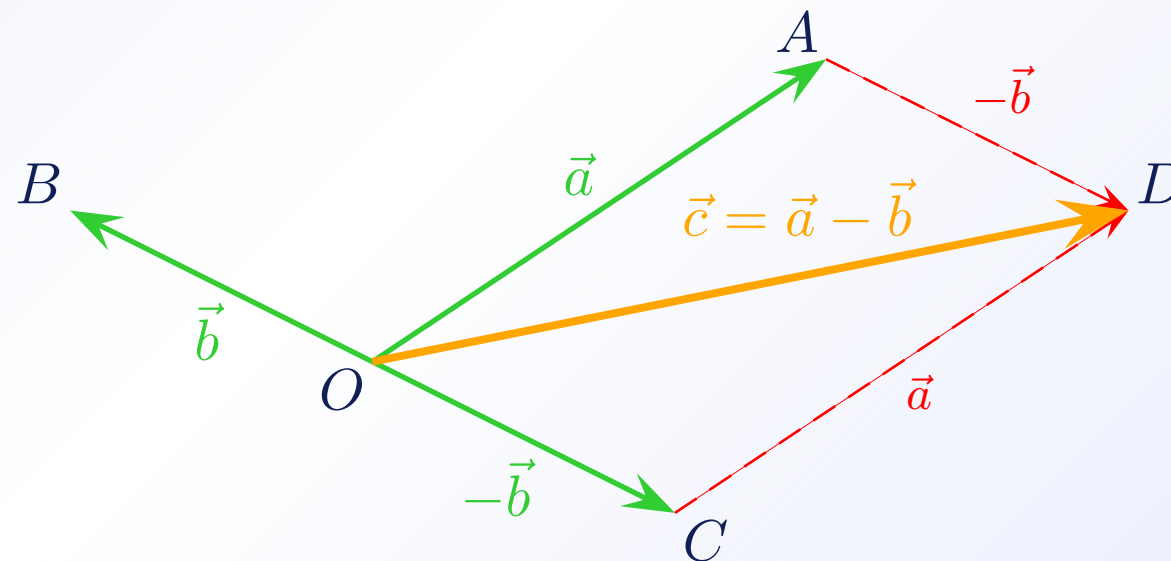
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



Soustraction vectorielle

La différence des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le vecteur $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ obtenu en additionnant au vecteur $\vec{a}$ l'opposé du vecteur $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$



2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

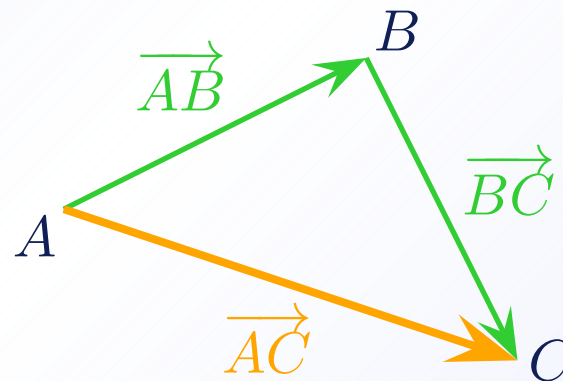
2.4 Moindres carrés

- La construction bout à bout est également connue sous le nom de **relation de Chasles** :

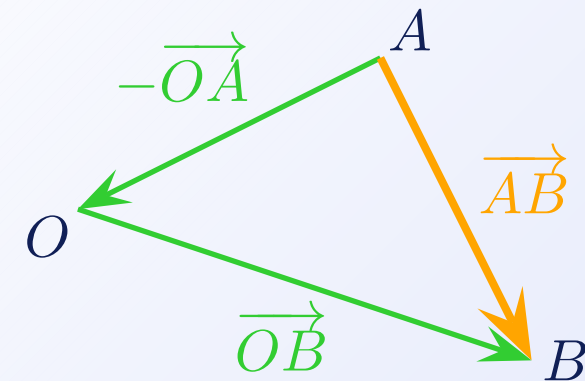
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

- Cette relation s'écrit aussi

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Propriétés de l'addition vectorielle

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- **Commutativité** : quels que soient les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, on a toujours

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

- **Associativité** : quels que soient les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, on a toujours

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

- **Élément neutre** : quel que soit le vecteur $\vec{a}$, on a toujours

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} = \vec{0} + \vec{a}.$$

- **Élément opposé** : quel que soit le vecteur $\vec{a}$, il existe toujours un (seul) vecteur opposé $-\vec{a}$ vérifiant

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} = (-\vec{a}) + \vec{a}.$$

Multiplication par un scalaire

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

Soient λ un scalaire non nul (autrement dit un nombre réel non nul) et $\vec{v}$ un vecteur non nul.

Le **produit de $\vec{v}$ par λ** , note $\lambda\vec{v}$ ou $\lambda \cdot \vec{v}$, est le vecteur ayant

- la même direction que $\vec{v}$;
- le même sens que $\vec{v}$ si λ est positif ou le sens opposé à celui de $\vec{v}$ si λ est négatif ;
- une longueur égale à $|\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$.

- Si $\lambda = 0$ alors $\lambda\vec{v} = \vec{0}$ quel que soit $\vec{v}$.
- Si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\lambda\vec{v} = \vec{0}$ quel que soit λ .
- L'opposé du vecteur $\vec{v}$ s'obtient en multipliant $\vec{v}$ par -1 .



Propriétés de la multiplication par un scalaire

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- **Distributivités** : quels que soient les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et les scalaires λ et μ , on a toujours

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

et

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}.$$

- **Associativité numérique** : quels que soient le vecteur $\vec{a}$ et les scalaires λ et μ , on a toujours

$$(\lambda \cdot \mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$$

- **Élément neutre** : quel que soit le vecteur $\vec{a}$, on a toujours

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- On se donne deux axes perpendiculaires :
 - ▶ un axe Ox_1 horizontal appelé l'**axe des abscisses** et orienté de gauche à droite ;
 - ▶ un axe Ox_2 vertical appelé l'**axe des ordonnées** et orienté de bas en haut ;
 - ▶ se coupant en un point O appelé l'**origine**.
- Sur chaque axe on choisit des segments unités $[OE_1]$ et $[OE_2]$.
- Les vecteurs $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ et $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ sont les **vecteurs de base**.
- Le couple $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ forme une **base orthonormée** de l'ensemble des vecteurs du plan.
- Le triplet $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ définit un **repère cartésien** du plan avec le point O comme **origine**.

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

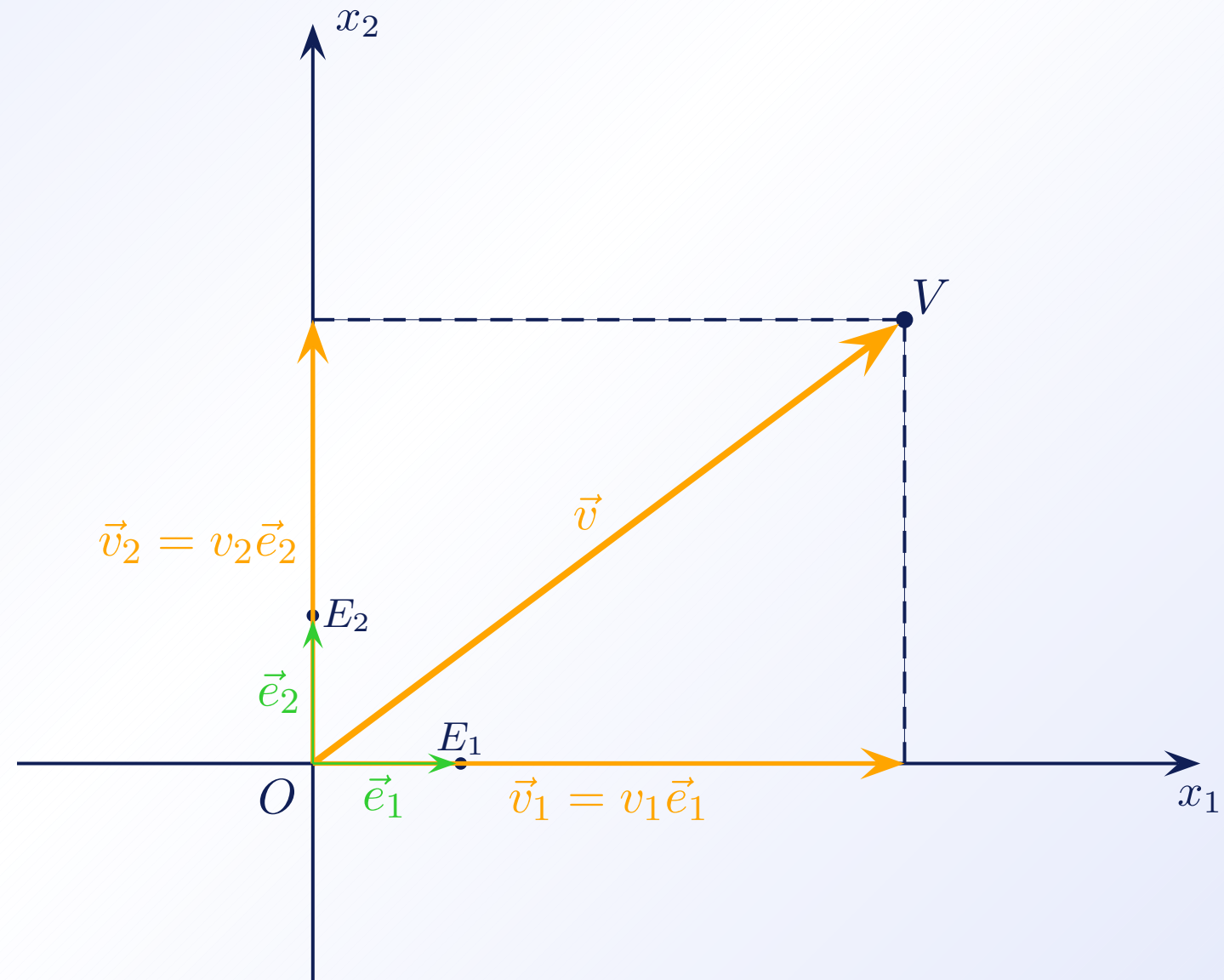
Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés



2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- Soit V un point du plan et $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$. Par projection sur les axes Ox_1 et Ox_2 on a

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$$

- ▶ $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont les **composantes vectorielles** de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$.
 - ▶ v_1 et v_2 sont les **composantes numériques** de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$.
- Dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$, le vecteur $\vec{v}$ est représenté (de manière unique) par le vecteur colonne

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

et on notera $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$.

- Dans le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$, le point V a les **coordonnées cartésiennes** (v_1, v_2) et on notera $V(v_1, v_2)$.

Opérations vectorielles dans une base

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

Soient $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ deux vecteurs.

■ **Égalité** : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales :

$$\vec{u} = \vec{v} \iff \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \iff u_1 = v_1 \text{ et } u_2 = v_2$$

■ **Addition, soustraction et multiplication par un scalaire** : les trois opérations se font composantes par composantes :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{bmatrix}$$

Opérations vectorielles dans une base (2)

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

■ Vecteur nul et vecteurs de base :

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

■ Vecteur opposé :

$$-\vec{v} = \begin{bmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix}$$

■ Relation de Chasles : pour deux points $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ on a

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{bmatrix}$$

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

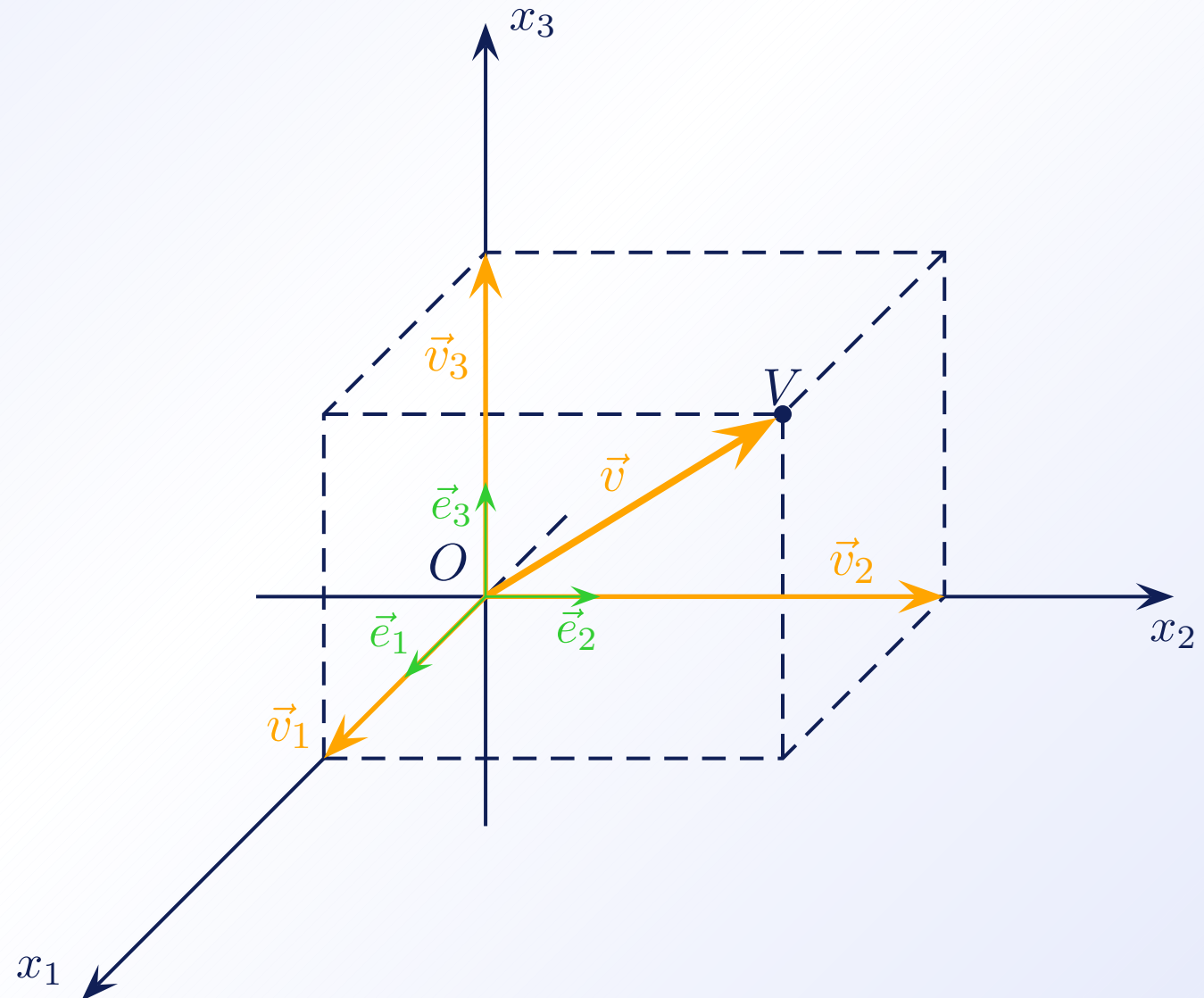
Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- On se donne trois axes perpendiculaires deux à deux :
 - ▶ un axe Ox_1 pour les abscisses ;
 - ▶ un axe Ox_2 pour les ordonnées ;
 - ▶ un axe Ox_3 pour les hauteurs ;
 - ▶ se coupant en un point O .
- Sur chaque axe on choisit des segments unités $[OE_1]$, $[OE_2]$ et $[OE_3]$.
- Les vecteurs $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$ et $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ et $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OE_3}$ sont les **vecteurs de base**.
- Le triplet $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ forme une **base orthonormée** de l'ensemble des vecteurs de l'espace.
- Le quadruplet $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ définit un **repère cartésien** de l'espace avec le point O comme **origine**.



2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- Soit V un point de l'espace et $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$. Par projection sur les axes Ox_1 , Ox_2 et Ox_3 on a

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$$

- Dans la base $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$, le vecteur $\vec{v}$ est représenté (de manière unique) par le vecteur colonne (**vecteur de composantes**)

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

et on notera $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$.

- Dans le repère $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$, le point V a les **coordonnées cartésiennes** (v_1, v_2, v_3) et on notera $V(v_1, v_2, v_3)$.

Norme euclidienne dans le plan

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- Dans le plan muni d'une base orthonormée, la norme (euclidienne) du vecteur $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ est, par Pythagore,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

- La longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à la distance entre les points $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ et vaut

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Norme euclidienne dans l'espace

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- De même, dans l'espace muni d'une base orthonormée, la norme du

vecteur $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ est

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

alors que celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Propriétés de la norme euclidienne

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- **Inégalité triangulaire** : quels que soient les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ on a toujours

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

De plus il n'y a égalité que si les deux vecteurs sont colinéaires et de même sens (ou si un des deux vecteurs est nul).

- **Positivité et séparation** : la norme d'un vecteur est un nombre positif ou nul et le seul vecteur de norme zéro est le vecteur nul :

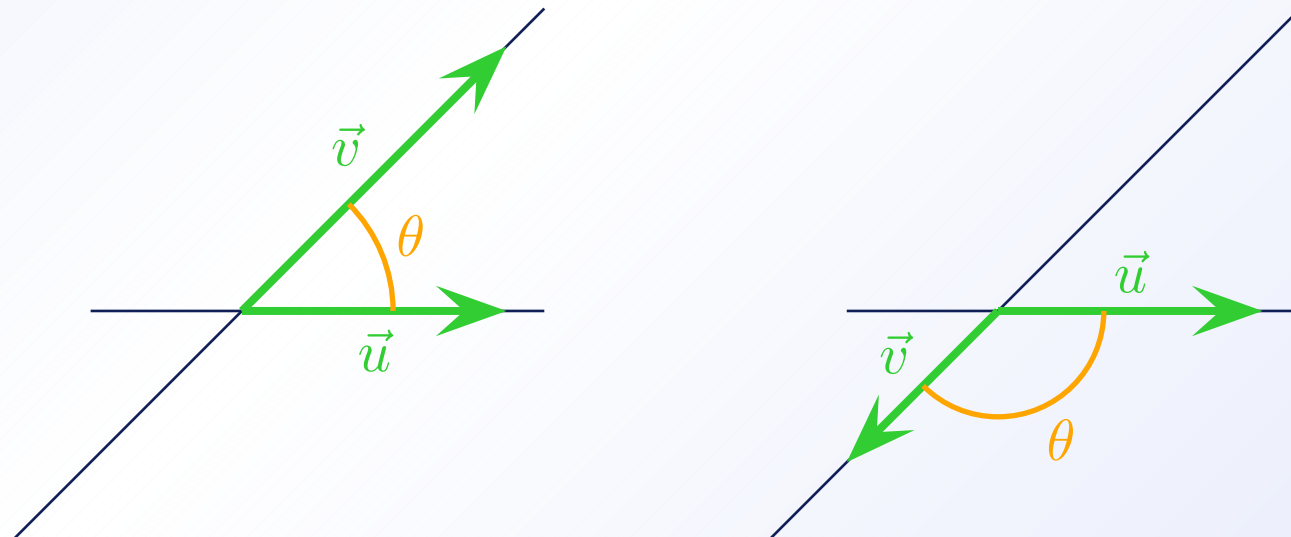
$$\|\vec{a}\| \geq 0 \quad \forall \vec{a} \quad \text{et} \quad \|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$$

- **Homogénéité** : quels que soient le scalaire λ et le vecteur $\vec{a}$ on a toujours

$$\|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$$

Angle entre deux vecteurs

L'angle entre deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se mesure en représentant les deux vecteurs comme des segments orientés de même origine et est alors égal à l'angle compris entre les deux demi-droites issues de cette origine commune et contenant les deux vecteurs.



- L'angle entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, mesuré en radians comme il se doit, est toujours compris entre 0 et π .

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

Le **produit scalaire** (euclidien) des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le scalaire (le nombre réel) défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta)$$

où θ est l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** (ou **perpendiculaires**) si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est égal au vecteur nul alors le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal à zéro.

Une conséquence directe est que le vecteur nul est orthogonal à n'importe quel vecteur (y compris lui-même).

Angle entre deux vecteurs (2)

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

L'**angle entre deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$** est le nombre réel $\theta \in [0, \pi]$ vérifiant

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

- Si un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal, par convention, à $\pi/2$ (l'angle entre le vecteur nul et lui-même n'est pas défini).
- NOTATION. L'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté

$$\angle(\vec{u}, \vec{v})$$

et on a donc, pour deux vecteurs non nuls,

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \right).$$

Propriétés du produit scalaire

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- **Commutativité/Symétrie** : quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a toujours

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

- **Linéarité** : quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ on a toujours

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

et

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

et quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et le scalaire λ on a toujours

$$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

et

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

- **Positivité** : quel que soit le vecteur $\vec{u}$ on a toujours

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$$

et

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$$

Interprétation géométrique du produit scalaire

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

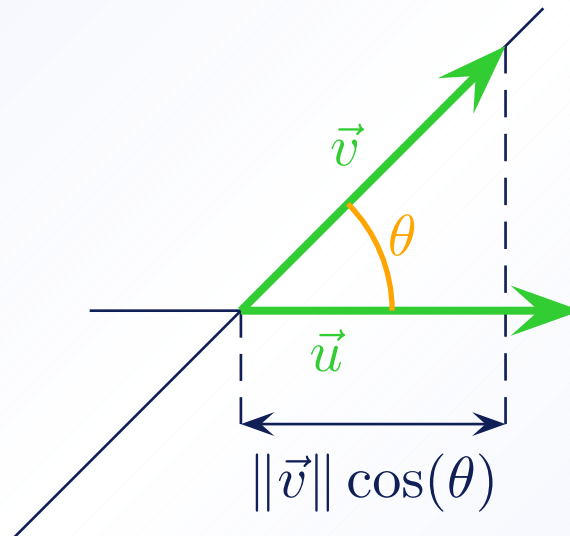
Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

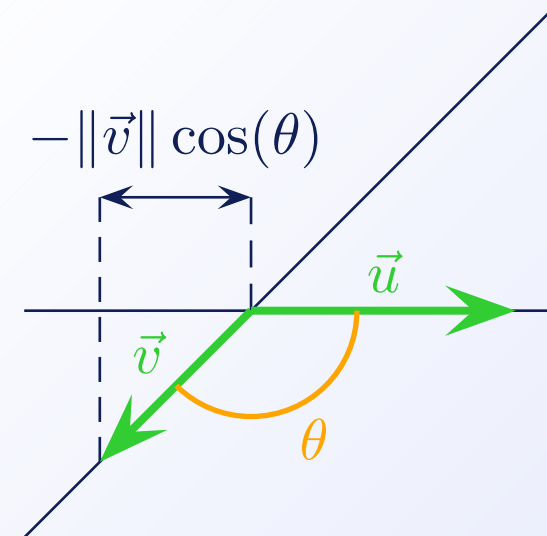
2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal **au produit de la norme du premier vecteur et de la longueur de la projection orthogonale du second sur le premier**, cette longueur étant comptée positivement si l'angle entre les deux vecteurs est aigu et négativement si cet angle est obtus.



$$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$$



$$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$$

Produit scalaire dans une base orthonormée

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- Dans la base orthonormée $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ (base canonique) des vecteurs du plan, le produit scalaire des vecteurs

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

est simplement égal à

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

- De même, dans la base canonique $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ des vecteurs de l'espace, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ et $\vec{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$ est

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Projections orthogonales

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

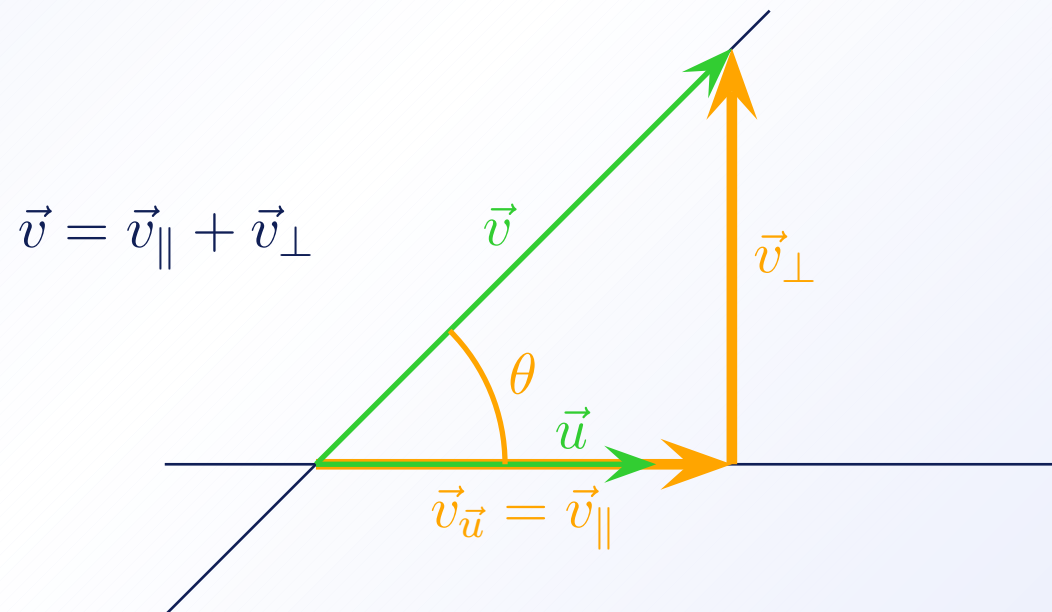
Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- La **projection orthogonale** du vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}$ est notée $\vec{v}_{\vec{u}}$ ou $\vec{v}_{\parallel}$ (lorsque le vecteur $\vec{u}$ sur lequel on projette est clairement établi).
- La composante de $\vec{v}$ orthogonale à $\vec{u}$ est, elle, notée $\vec{v}_{\perp}$.



- REMARQUE. Les deux notations $\vec{v}_{\parallel}$ et $\vec{v}_{\perp}$ supposent que le vecteur $\vec{u}$ sur lequel on projette est clairement identifié par le contexte.

Projections orthogonales (2)

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- En partant de l'interprétation géométrique du produit scalaire, on obtient que la longueur de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ est

$$\|\vec{v}_{\vec{u}}\| = \begin{cases} \|\vec{v}\| \cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|} & \text{si } \theta \text{ est aigu (c.-à-d. si } \vec{u} \cdot \vec{v} > 0) \\ -\|\vec{v}\| \cos(\theta) = -\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|} & \text{si } \theta \text{ est obtus (c.-à-d. si } \vec{u} \cdot \vec{v} < 0) \end{cases}$$

- Cette projection est colinéaire à $\vec{u}$ et donc à $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ (vecteur unitaire de même direction et même sens que $\vec{u}$).
- Finalement elle est de même sens que $\vec{u}$ si θ est aigu et de sens opposé à $\vec{u}$ si θ est obtus.
- Pour obtenir la projection $\vec{v}_{\vec{u}}$ il suffit de multiplier $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ par $\|\vec{v}_{\vec{u}}\|$ si θ est aigu et de multiplier $-\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ par $\|\vec{v}_{\vec{u}}\|$ si θ est obtus.

Projections orthogonales (3)

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

■ On obtient alors

$$\vec{v}_{\vec{u}} = \begin{cases} \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|} \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} & \text{si } \theta \text{ est aigu} \\ -\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|} \cdot \left(-\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u} & \text{si } \theta \text{ est obtus} \end{cases}$$

■ La **projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$** est donc

$$\vec{v}_{\vec{u}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \cdot \vec{u}$$

■ Quant à la **longueur de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$** , elle, est égale à

$$\|\vec{v}_{\vec{u}}\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|}$$

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

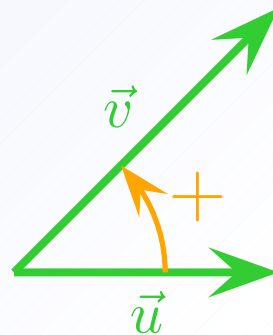
Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

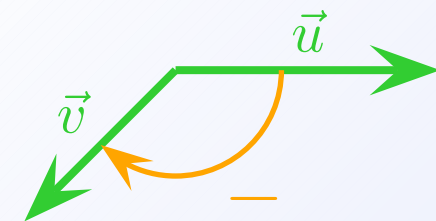
2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- Dans le plan, une base $(\vec{u}, \vec{v})$ (c.-à-d. un couple de vecteurs non colinéaires) est dite **directe** ou **orientée positivement** si le passage de $\vec{u}$ à $\vec{v}$ (par la rotation de plus petit angle) se fait dans le sens trigonométrique positif (sens contraire des aiguilles d'une montre, sens anti-horaire).



$(\vec{u}; \vec{v})$ est une base directe



$(\vec{u}; \vec{v})$ est une base indirecte

- Dans l'espace, une base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ (c.-à-d. un triplet de vecteurs non coplanaires) est dite **directe** ou **orientée positivement** si elle vérifie la règle (des 3 doigts) de la main droite (aussi appelée règle du tire-bouchon ou du tournevis).

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs

Vecteurs égaux

Vecteurs colinéaires

Addition vectorielle

Relation de Chasles

Multiplication par λ

Coordonnées

Normes

Angles

Produit scalaire

Projections

Produit vectoriel

Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

Le **produit vectoriel** associe à tout couple $(\vec{a}, \vec{b})$ de vecteurs de l'espace un troisième vecteur $\vec{c}$ noté

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} \quad \text{ou} \quad \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (\text{lu « a cross b »})$$

■ Si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont non colinéaires, le vecteur $\vec{c}$ est tel que

- 1) la direction de $\vec{c}$ est orthogonale à celles de $\vec{a}$ et $\vec{b}$, autrement dit $\vec{c}$ est un vecteur normal au plan engendré par $\vec{a}$ et $\vec{b}$;
- 2) le sens de $\vec{c}$ est donné par la règle de la main droite, autrement dit le triplet $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ forme une base directe de l'espace ;
- 3) la norme de $\vec{c}$ est égale à $\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\theta)$ où θ est l'angle compris entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$, autrement dit la norme de $\vec{c}$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

■ Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires alors leur produit vectoriel est égal à $\vec{0}$.

Propriétés du produit vectoriel

- **Anti-commutativité/Antisymétrie** : inverser l'ordre des vecteurs du couple change le sens du produit vectoriel :

$$\vec{b} \wedge \vec{a} = -(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

- **Distributivité** (à gauche et à droite) :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$$

et

$$(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$$

- **Compatibilité avec la multiplication par un scalaire** :

$$(\lambda \vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

- Les deux propriétés précédentes peuvent être combinées en une seule, la **bilinéarité** :

$$\vec{a} \wedge (\lambda \vec{b} + \mu \vec{c}) = \lambda(\vec{a} \wedge \vec{b}) + \mu(\vec{a} \wedge \vec{c})$$

et

$$(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) \wedge \vec{c} = \lambda(\vec{a} \wedge \vec{c}) + \mu(\vec{b} \wedge \vec{c})$$

Propriétés du produit vectoriel (2)

■ Identité de Lagrange :

$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2$$

DÉMONSTRATION. Soit θ l'angle compris entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$, de la définition du produit vectoriel on a

$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \sin^2(\theta)$$

alors que de celle du produit scalaire on a

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \cos^2(\theta).$$

Il ne reste plus qu'à additionner ces deux résultats pour obtenir

$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2.$$

■ Non-associativité : le produit vectoriel n'est pas associatif en général :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} \quad \text{en général.}$$

Calcul du produit vectoriel

- Dans la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'ensemble des vecteurs de l'espace (et plus généralement dans toute **base orthonormée directe** de l'ensemble des vecteurs de l'espace), le produit vectoriel de

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

est égal à

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Soit $\vec{c} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$. On a $\vec{a} \cdot \vec{c} = a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3 + a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1 = 0$. De manière

similaire on vérifie que $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ et le vecteur $\vec{c}$ est bien orthogonal aux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

On a également

$$\begin{aligned} \|\vec{c}\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 \\ &\quad - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 \end{aligned}$$

alors que

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a_1^2b_1^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_2^2 + 2a_1a_3b_1b_3 + 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_3^2.$$

En sommant, on obtient

$$a_1^2b_1^2 + a_2^2b_1^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_3^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2$$

et le vecteur $\vec{c}$ a la bonne norme.

■ Pour les vecteurs $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ on a

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 16 \\ 14 \end{bmatrix}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & 1 & 5 \\ \vec{e}_2 & -2 & 4 \\ \vec{e}_3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\ &= -10\vec{e}_1 - (-16)\vec{e}_2 + 14\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} -10 \\ 16 \\ 14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.1 Calcul vectoriel

Vecteurs
Vecteurs égaux
Vecteurs colinéaires
Addition vectorielle
Relation de Chasles
Multiplication par λ
Coordonnées
Normes
Angles
Produit scalaire
Projections
Produit vectoriel
Produit mixte

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

Le **produit mixte** associe à tout triplet $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ de vecteurs de l'espace un nombre réel noté $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ et égal à

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad \text{ou} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}).$$

- Les deux expressions précédentes sont toujours égales.
- **La valeur absolue du produit mixte $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ est égale au volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.**
- Les trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul.
- Le produit mixte $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ est positif si le triplet $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ est orienté positivement et négatif s'il est orienté négativement.

- En partant de sa définition et de la formule de calcul du produit vectoriel on obtient

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- EXEMPLE. Le tétraèdre de sommets $A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 2)$, $C(2, 3, 2)$ et $D(4, 1, 2)$ a un volume égal à 1 car le volume signé du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ est

$$\begin{aligned} V = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AC} & \overrightarrow{AD} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 3) + (1 - 9) = 2 - 8 = -6. \end{aligned}$$

- RAPPEL. Le volume du tétraèdre est égal à un sixième de celui du parallélépipède.

2.2 Géométrie analytique du plan



2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

Le plan $\mathbb{R}^2$

Droite du plan

Équation vectorielle

Équations
paramétriques

Équation cartésienne

Équation normale

Positions relatives

Angles

Distance point-droite

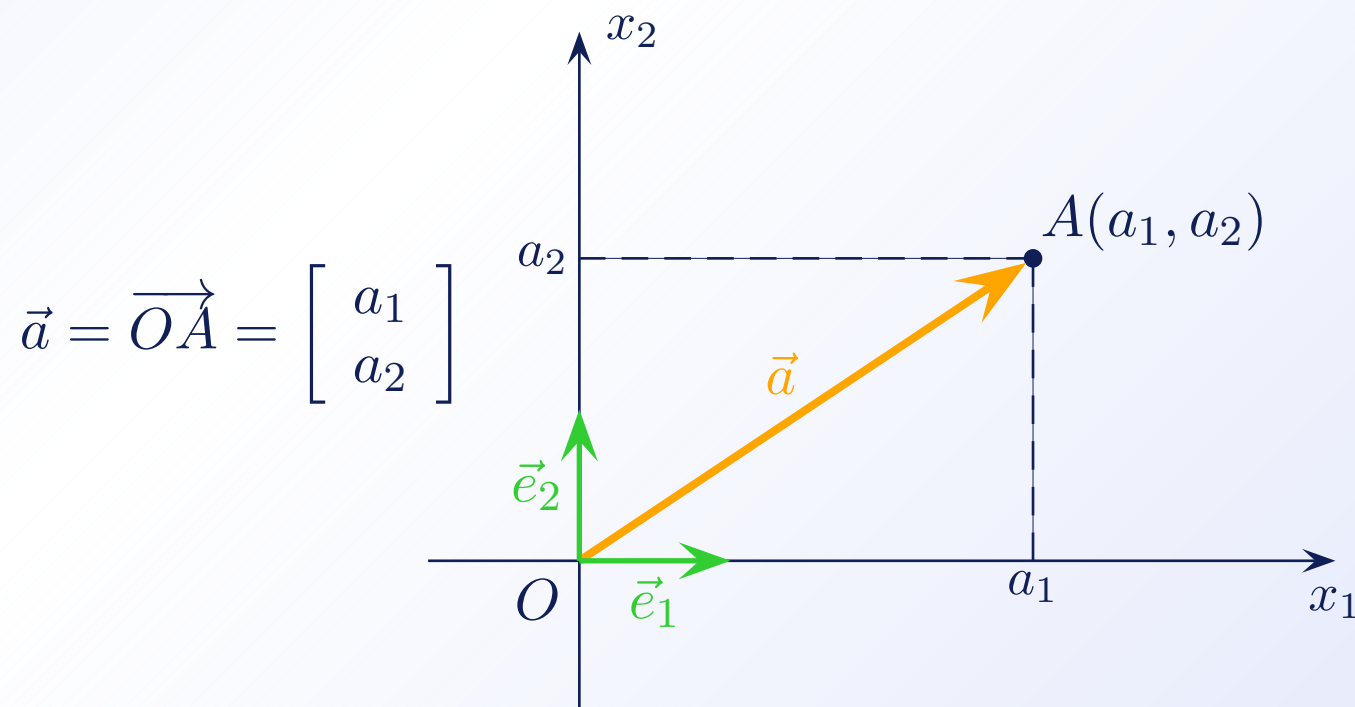
Dist. entre 2 droites

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

On travaille dans le plan, noté $\mathbb{R}^2$, muni

- d'une **base canonique** $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ orthonormée et directe, aussi notée $(\vec{i}, \vec{j})$;
- d'un **repère cartésien** $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, aussi noté $(O, \vec{i}, \vec{j})$;
- du produit scalaire euclidien.



2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

Le plan $\mathbb{R}^2$

Droite du plan

Équation vectorielle

Équations
paramétriques

Équation cartésienne

Équation normale

Positions relatives

Angles

Distance point-droite

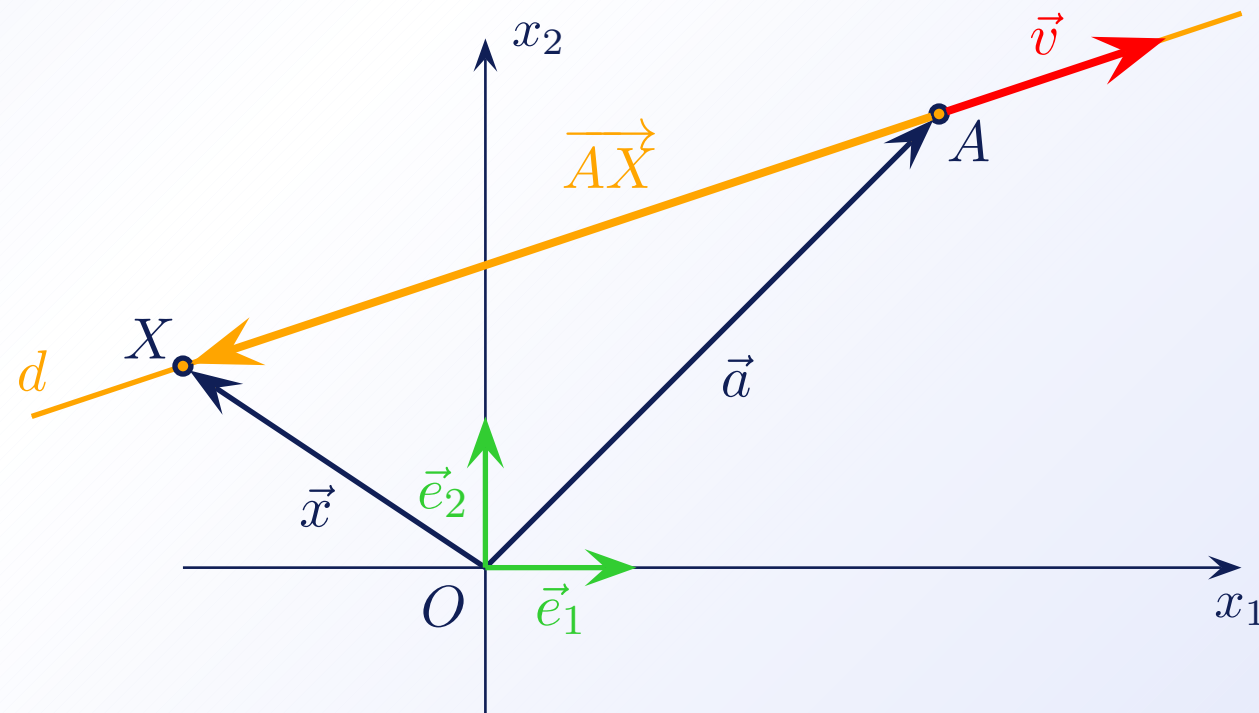
Dist. entre 2 droites

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- Soit A un point du plan et $\vec{v}$ un vecteur **non nul**. La **droite d passant par A** et de **vecteur directeur $\vec{v}$** est l'ensemble des points X pour lesquels $\overrightarrow{AX}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

$$d = d(A, \vec{v}) = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AX} = \lambda \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$



2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

Le plan $\mathbb{R}^2$

Droite du plan

Équation vectorielle

Équations
paramétriques

Équation cartésienne

Équation normale

Positions relatives

Angles

Distance point-droite

Dist. entre 2 droites

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- Si X est un point quelconque de $d = d(A, \vec{v})$ et si on pose $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ et $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, alors

$$\begin{aligned} X \in d &\iff \overrightarrow{AX} = \lambda \vec{v}, & \lambda \in \mathbb{R} \\ &\iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{v}, & \lambda \in \mathbb{R} \\ &\iff \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{v}, & \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- La forme

$$\boxed{\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}} \quad (1)$$

est appelée l'équation (paramétrique) vectorielle de d .

- REMARQUES. Pour définir d , on peut choisir pour A n'importe quel point de d et on peut remplacer $\vec{v}$ par n'importe quel multiple **non nul**.

- En passant aux composantes, l'équation (1) s'écrit

$$\begin{cases} x_1 &= a_1 &+ \lambda v_1 \\ x_2 &= a_2 &+ \lambda v_2 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (2)$$

avec

$$X(x_1, x_2), \quad A(a_1, a_2) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

- Le système (2) correspond aux **équations paramétriques** de la droite d .
- REMARQUE. Le choix du point A et du vecteur directeur $\vec{v}$ n'étant pas unique, une droite admet une infinité de représentations paramétriques.

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

Le plan $\mathbb{R}^2$

Droite du plan

Équation vectorielle

Équations
paramétriques

Équation cartésienne

Équation normale

Positions relatives

Angles

Distance point-droite

Dist. entre 2 droites

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- En éliminant le paramètre λ dans les équations paramétriques de d on obtient une **équation cartésienne** de la droite. Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0 \quad (3)$$

où A_1 , A_2 et A_3 sont trois nombres réels vérifiant $(A_1, A_2) \neq (0, 0)$.

- Si $A_1 = 0$, la droite est horizontale (x_1 peut prendre n'importe quelle valeur alors que celle de x_2 est fixée).
- Si $A_2 = 0$, la droite est verticale (cette fois c'est x_2 qui peut prendre n'importe quelle valeur et x_1 qui est fixé).
- Si la droite n'est pas verticale ($A_2 \neq 0$), on peut isoler x_2 et écrire son équation cartésienne sous la forme (bien connue)

$$x_2 = mx_1 + h \quad \text{ou encore} \quad y = mx + h$$

où m est la pente de la droite et h son ordonnée à l'origine.

Vecteur normal et équation normale de d

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

Le plan $\mathbb{R}^2$

Droite du plan

Équation vectorielle

Équations
paramétriques

Équation cartésienne

Équation normale

Positions relatives

Angles

Distance point-droite

Dist. entre 2 droites

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

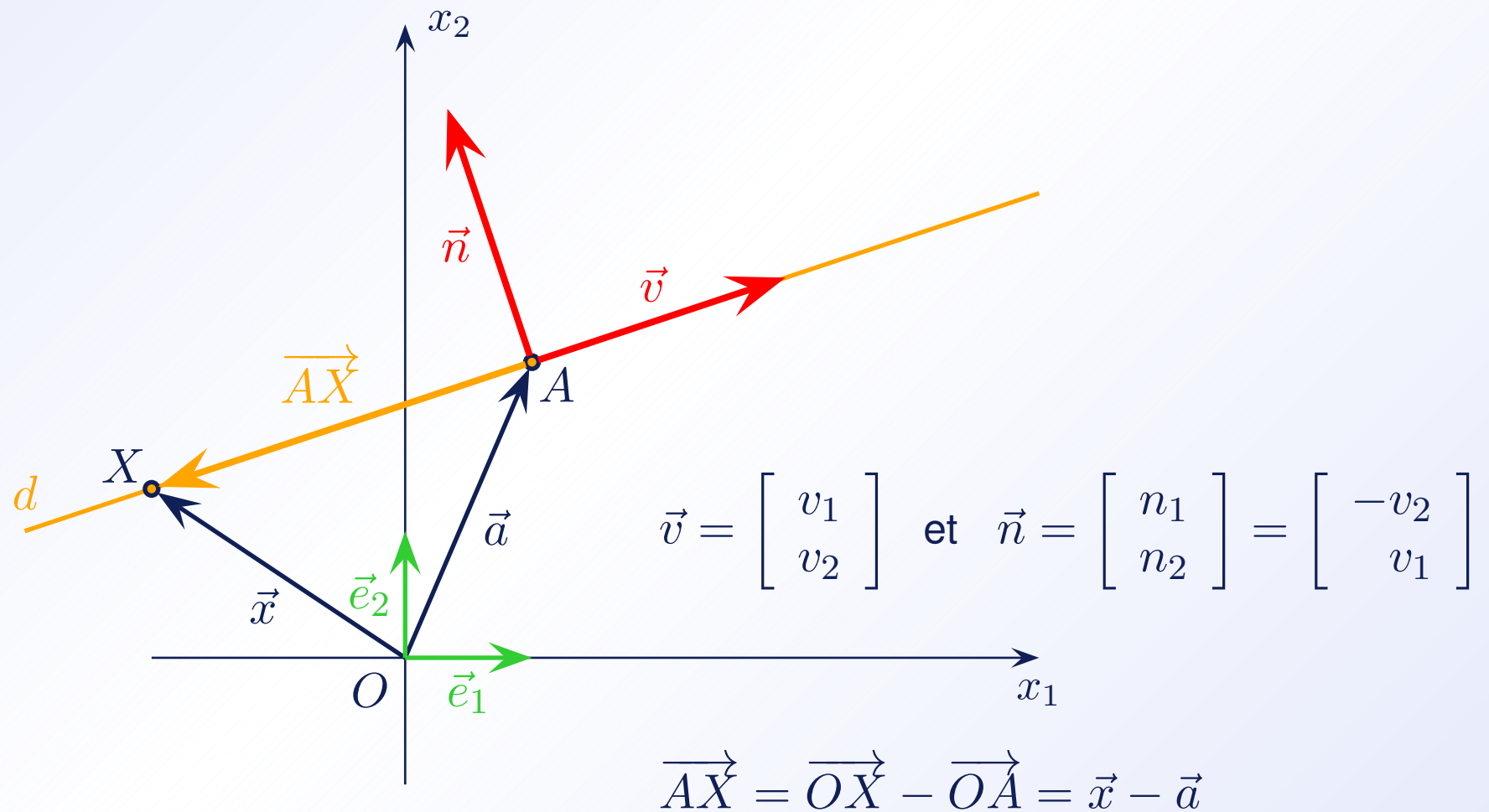
- Un **vecteur normal** à d est un vecteur **non nul** $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{v}$, c.-à-d. tel que $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.
- La droite d , passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$, est formée de tous les points X pour lesquels les vecteurs $\overrightarrow{AX}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Dans cette approche, la droite d est décrite par son **équation normale**

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \quad (4)$$

où

$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}.$$



Liens entre les différentes représentations de d

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

Le plan $\mathbb{R}^2$

Droite du plan

Équation vectorielle

Équations
paramétriques

Équation cartésienne

Équation normale

Positions relatives

Angles

Distance point-droite

Dist. entre 2 droites

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- Si on développe l'équation normale $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ on obtient

$$n_1x_1 + n_2x_2 - (n_1a_1 + n_2a_2) = 0$$

et en comparant cette expression à l'équation cartésienne

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$$

on obtient

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -A_2 \\ A_1 \end{bmatrix}$$

Les coefficients de x_1 et x_2 dans l'équation cartésienne de d correspondent aux composantes d'un vecteur normal à d .

Positions relatives de deux droites

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

Le plan $\mathbb{R}^2$

Droite du plan

Équation vectorielle

Équations
paramétriques

Équation cartésienne

Équation normale

Positions relatives

Angles

Distance point-droite

Dist. entre 2 droites

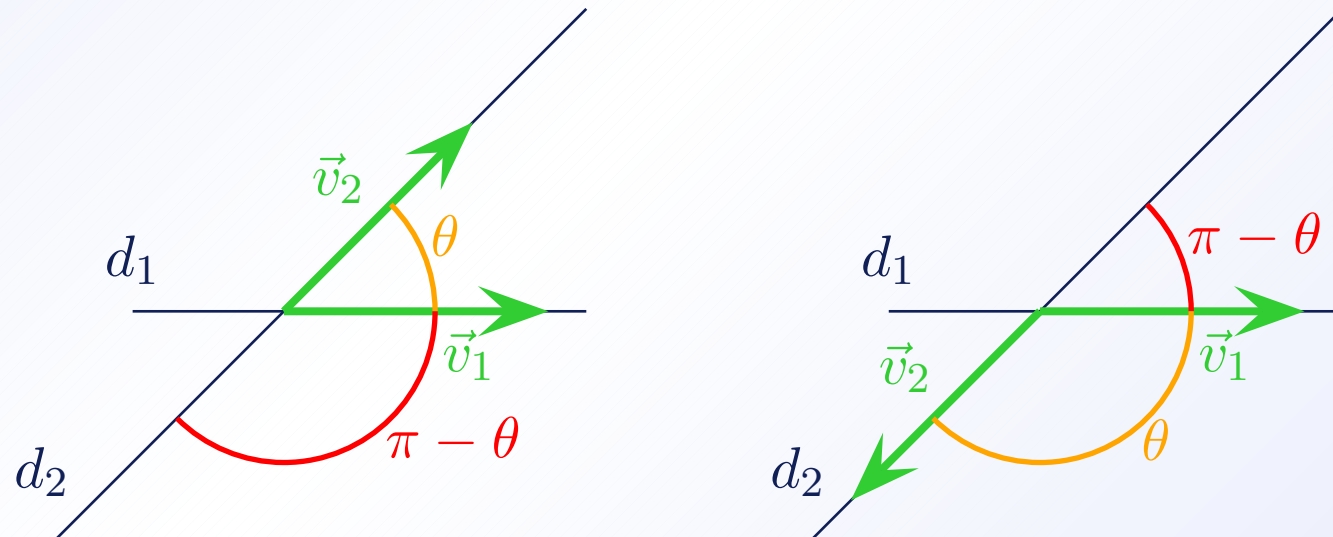
2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- Deux droites sont **parallèles** si leurs vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires (parallèles) ou, de manière équivalente, si leurs vecteurs normaux respectifs sont colinéaires.
 - ▶ Deux droites parallèles n'ont aucun point en commun ou en ont une infinité.
 - ▶ Si elles ont une infinité de points en commun elles sont dites **confondues** et représentent le même ensemble de points du plan.
- Deux droites sont **sécantes** si elles possèdent un seul point en commun.
- Deux droites sont **perpendiculaires** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux ou, de manière équivalente, si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Angle entre deux droites

L'**angle entre deux droites sécantes** est égal au plus petit angle compris entre des vecteurs directeurs de chacune des droites ou, de manière équivalente, entre des vecteurs normaux de chacune des droites.



$$\angle(d_1, d_2) = \min \left(\angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2), \pi - \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \right) \in [0; \pi/2]$$

- L'angle entre deux droites confondues est égal à 0 alors que celui entre deux droites parallèles mais non confondues n'est pas défini.

Distance d'un point à une droite

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

Le plan $\mathbb{R}^2$

Droite du plan

Équation vectorielle

Équations
paramétriques

Équation cartésienne

Équation normale

Positions relatives

Angles

Distance point-droite

Dist. entre 2 droites

2.3 Géom. dans l'espace

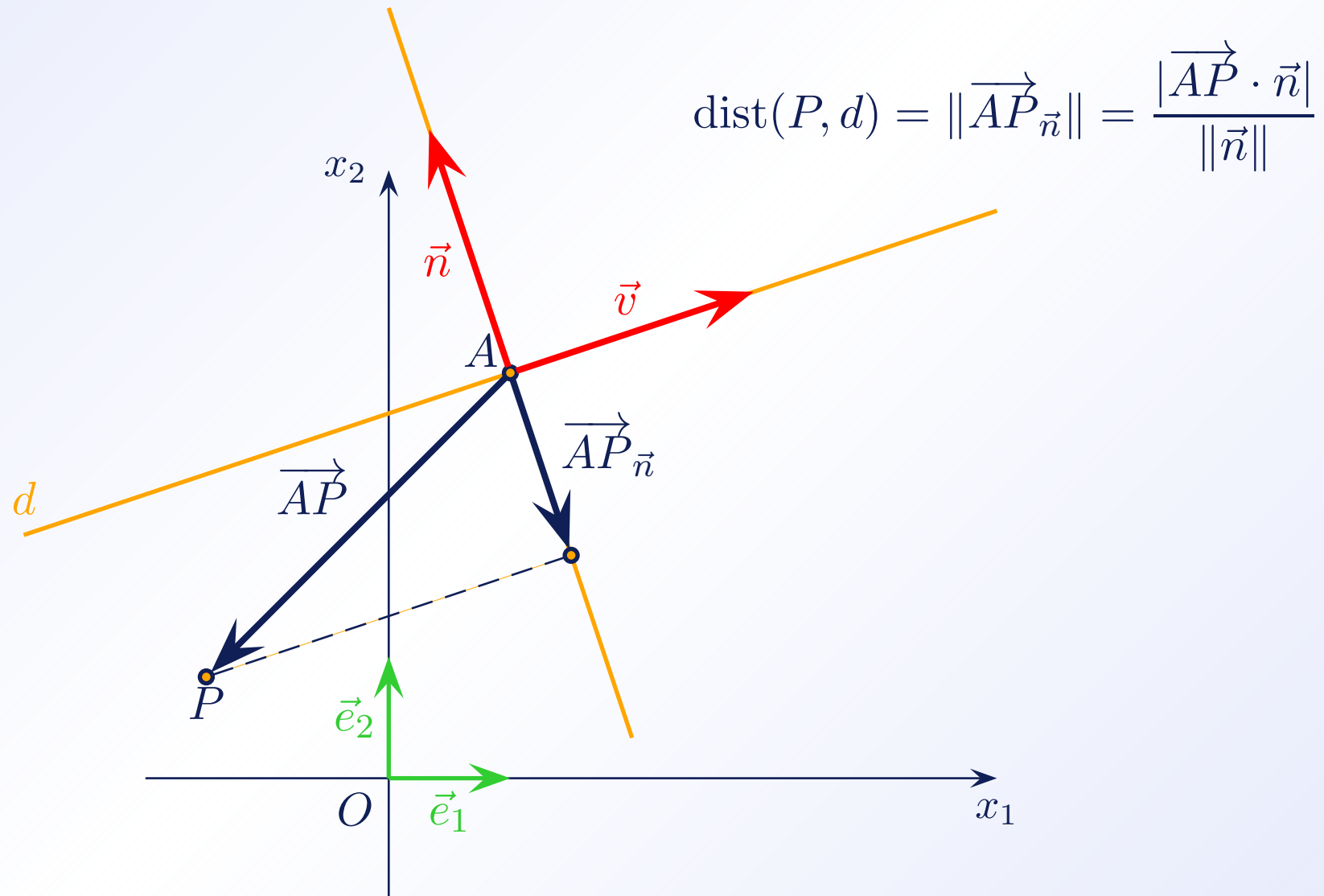
2.4 Moindres carrés

- La distance du point P à la droite d est égale à la longueur de la projection orthogonale de $\overrightarrow{AP}$ sur $\vec{n}$ où A est un point quelconque de d et $\vec{n}$ est un vecteur normal à d :

$$\text{dist}(P, d) = \|\overrightarrow{AP}_{\vec{n}}\|.$$

- En utilisant les résultats obtenus précédemment on a

$$\text{dist}(P, d) = \|\overrightarrow{AP}_{\vec{n}}\| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$



Distance d'un point à une droite (2)

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

Le plan $\mathbb{R}^2$

Droite du plan

Équation vectorielle

Équations
paramétriques

Équation cartésienne

Équation normale

Positions relatives

Angles

Distance point-droite

Dist. entre 2 droites

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- Si l'équation cartésienne de la droite d est $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0$, on sait que

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

est un vecteur normal à d . Ainsi, si les coordonnées cartésiennes des points sont $P(x_1, x_2)$ et $A(a_1, a_2)$, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} &= \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \\ &= A_1x_1 + A_2x_2 - (A_1a_1 + A_2a_2) \\ &= A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 \end{aligned}$$

car $A \in d \iff A_1a_1 + A_2a_2 = -A_3$. La distance entre P et d est donc

$$\text{dist}(P(x_1, x_2), d) = \frac{|A_1x_1 + A_2x_2 + A_3|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$$

Distance entre deux droites parallèles

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

Le plan $\mathbb{R}^2$

Droite du plan

Équation vectorielle

Équations
paramétriques

Équation cartésienne

Équation normale

Positions relatives

Angles

Distance point-droite

Dist. entre 2 droites

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- Parler de distance entre deux droites du plan n'a de sens que pour deux droites parallèles (confondues ou non).

- La distance entre deux droites parallèles d_1 et d_2 est égale à la distance entre d_1 et un point quelconque de d_2 (ou inversement).

- Si les droites d_1 et d_2 sont données par les équations cartésiennes

$$(d_1) : A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0 \quad \text{et} \quad (d_2) : A_1x_1 + A_2x_2 + A'_3 = 0$$

alors la distance entre d_1 et d_2 est simplement

$$\text{dist}(d_1, d_2) = \frac{|A_3 - A'_3|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$$

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

Le plan $\mathbb{R}^2$

Droite du plan

Équation vectorielle

Équations
paramétriques

Équation cartésienne

Équation normale

Positions relatives

Angles

Distance point-droite

Dist. entre 2 droites

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

- La distance entre la droite d d'équation $3x_1 + 2x_2 - 1 = 0$ et le point $P(4, -1)$ est

$$\text{dist}(P, d) = \frac{|3 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{9}{\sqrt{13}}.$$

- Pour calculer la distance entre les droites d'équations $(d_1) : y = 4 - 3x$ et $(d_2) : 6x + 2y = 1$ on commence par récrire leurs équations cartésiennes sous une forme « compatible » :

$$(d_1) : 6x + 2y - 8 = 0 \quad \text{et} \quad (d_2) : 6x + 2y - 1 = 0.$$

La distance séparant les deux droites est alors simplement

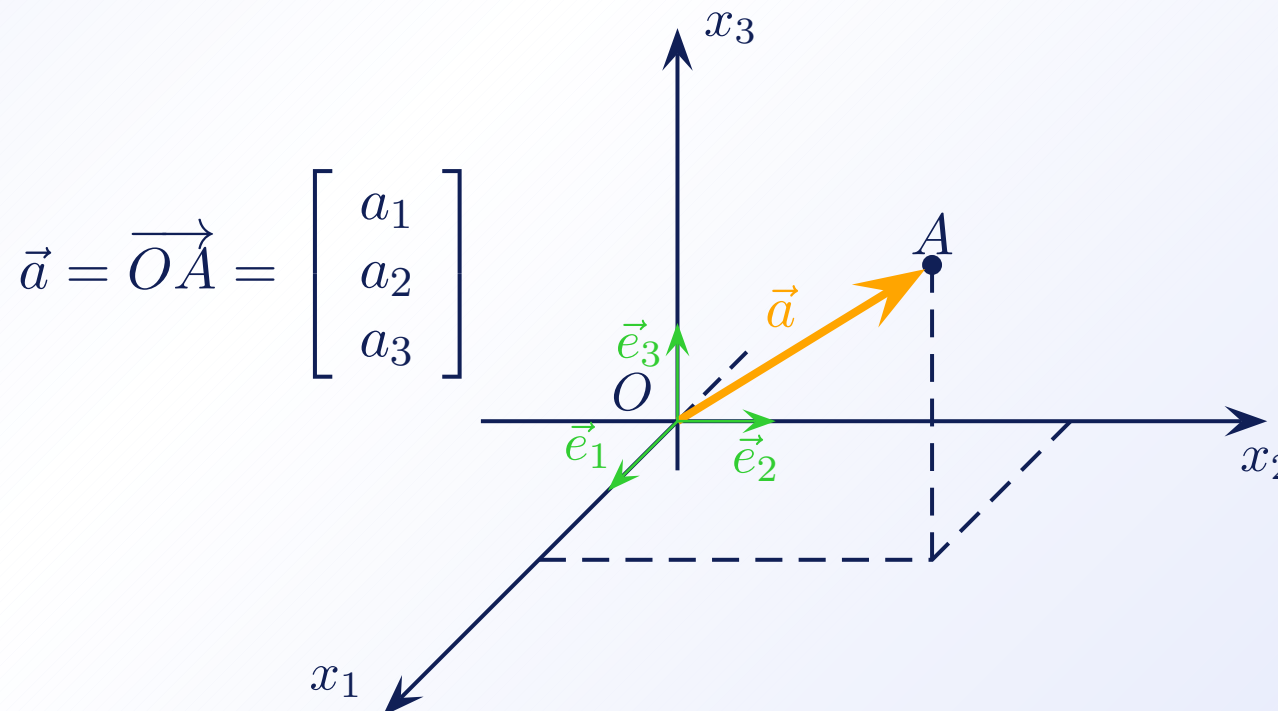
$$\text{dist}(d_1, d_2) = \frac{|-8 - (-1)|}{\sqrt{6^2 + 2^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{40}} = \frac{7}{2\sqrt{10}}.$$

2.3 Géométrie analytique de l'espace



On travaille dans le plan, noté $\mathbb{R}^3$, muni

- d'une **base canonique** $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ orthonormée et directe, aussi notée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;
- d'un **repère cartésien** $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, aussi noté $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;
- du produit scalaire euclidien, du produit vectoriel et du produit mixte.



- Soient A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non colinéaires**. Le **plan π passant par A** et de **vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$** est l'ensemble des points X pour lesquels $\overrightarrow{AX}$ est une **combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** :

$$\pi = \pi(A, \vec{u}, \vec{v}) = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{AX} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

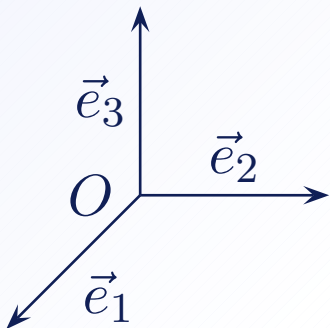
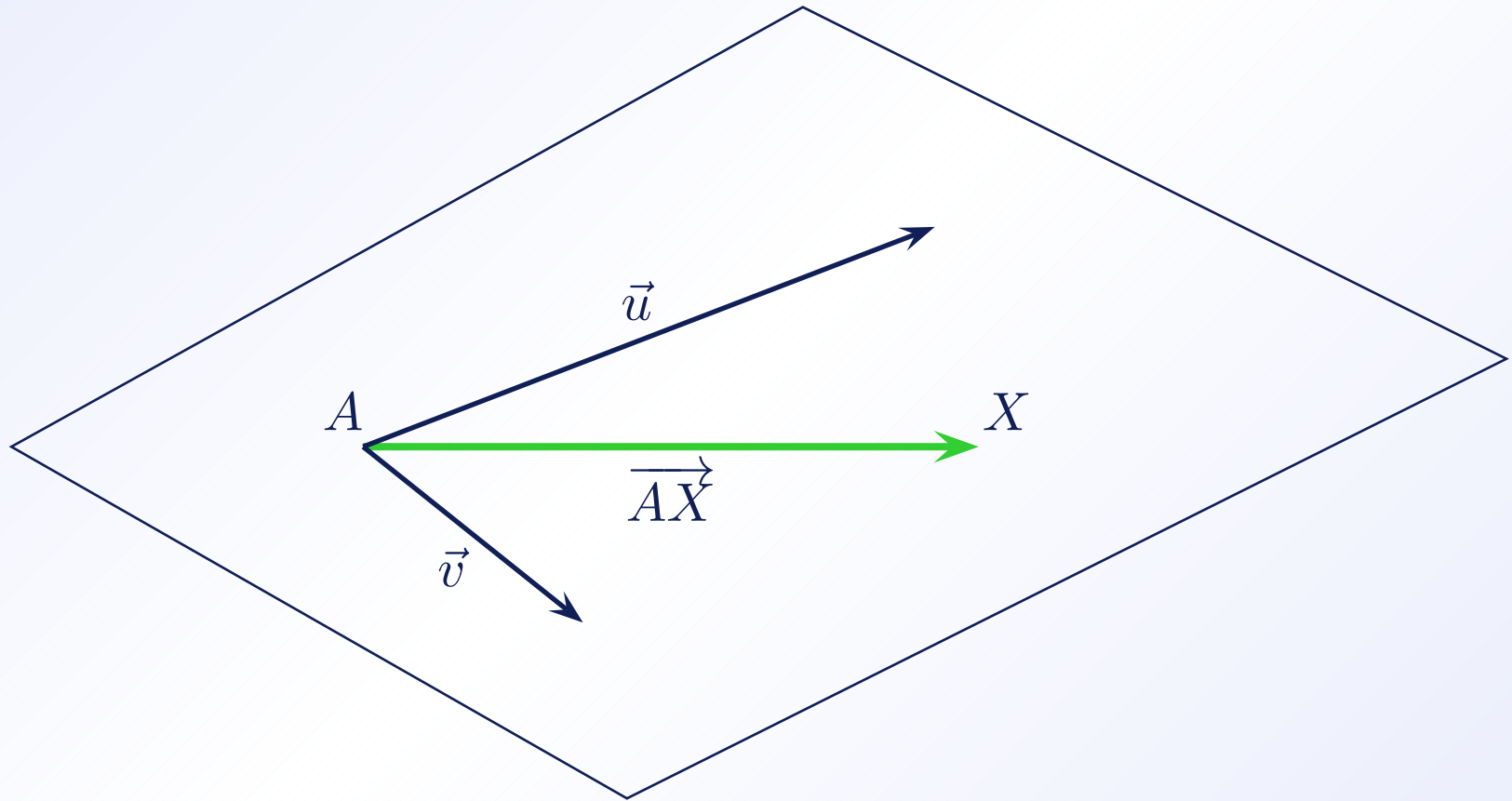
- Si X est un point quelconque de $\pi = \pi(A, \vec{u}, \vec{v})$ et si on pose $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ et $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, alors

$$\begin{aligned} X \in \pi &\iff \overrightarrow{AX} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, & \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ &\iff \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, & \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ &\iff \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, & \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- La forme

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (5)$$

est appelée l'**équation (paramétrique) vectorielle de π** .



Équations paramétriques de π

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

Le plan $\mathbb{R}^3$

Plan de l'espace

Équations param.

Équation normale

Équation cartésienne

Droite de l'espace

Équation cartésienne

Distance point-plan

Angle entre 2 plans

Distance entre 2 plans

Distance droite-plan

Distance point-droite

Distance entre 2 droites

Angle entre 2 droites

Distance entre 2 droites

2.4 Moindres carrés

- En passant aux composantes, l'équation (5) s'écrit

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ x_3 = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (6)$$

ou, de manière équivalente,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (7)$$

- Les systèmes (6) et (7) définissent les **équations paramétriques** du plan π .
- REMARQUE. Le choix du point A et des deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas unique, un plan admet une infinité de représentations paramétriques.

Vecteur normal et équation normale de π

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

Le plan $\mathbb{R}^3$

Plan de l'espace

Équations param.

Équation normale

Équation cartésienne

Droite de l'espace

Équation cartésienne

Distance point-plan

Angle entre 2 plans

Distance entre 2 plans

Distance droite-plan

Distance point-droite

Distance entre 2 droites

Angle entre 2 droites

Distance entre 2 droites

2.4 Moindres carrés

- Tout vecteur $\vec{n}$, **non nul**, orthogonal aux deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de π est un **vecteur normal** du plan.

En particulier le vecteur

$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

est un vecteur normal du plan $\pi = \pi(A, \vec{u}, \vec{v})$.

- Le plan π , passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$, est formé de tous les points X pour lesquels les vecteurs $\overrightarrow{AX}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

On obtient alors l'**équation normale** de π :

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \quad (8)$$

où

$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}.$$

- En développant l'équation normale de π on obtient

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - \underbrace{(n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3)}_{\vec{n} \cdot \vec{a}} = 0$$

Cette expression est en fait une équation cartésienne de π .

- De manière générale, tout plan π peut être décrit par une **équation cartésienne** de la forme

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0 \quad (9)$$

où A_1, A_2, A_3 et A_4 sont quatre nombres avec $(A_1, A_2, A_3) \neq (0, 0, 0)$.

Les coefficients de x_1, x_2 et x_3 dans l'équation cartésienne d'un plan π correspondent aux composantes d'un vecteur normal de π .

Équation cartésienne de π (2)

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

Le plan $\mathbb{R}^3$

Plan de l'espace

Équations param.

Équation normale

Équation cartésienne

Droite de l'espace

Équation cartésienne

Distance point-plan

Angle entre 2 plans

Distance entre 2 plans

Distance droite-plan

Distance point-droite

Distance entre 2 droites

Angle entre 2 droites

Distance entre 2 droites

2.4 Moindres carrés

- L'équation cartésienne d'un plan π peut être obtenue en éliminant les deux paramètres de sa représentation paramétrique.

- Elle peut également être obtenue à l'aide du produit mixte.

En effet, le point X appartient à $\pi = \pi(A, \vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires, autrement dit, si et seulement si le produit mixte de ces trois vecteurs est nul :

$$[\vec{x} - \vec{a}, \vec{u}, \vec{v}] = 0.$$

- REMARQUE. L'équation précédente n'est qu'une écriture alternative de l'équation normale de π .

En effet $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ étant un vecteur normal de π on a

$$[\vec{x} - \vec{a}, \vec{u}, \vec{v}] = 0 \iff (\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0 \iff (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0.$$

Droite de l'espace : équations paramétriques

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

Le plan $\mathbb{R}^3$

Plan de l'espace

Équations param.

Équation normale

Équation cartésienne

Droite de l'espace

Équation cartésienne

Distance point-plan

Angle entre 2 plans

Distance entre 2 plans

Distance droite-plan

Distance point-droite

Distance entre 2 droites

Angle entre 2 droites

Distance entre 2 droites

2.4 Moindres carrés

- La construction paramétrique d'une droite est identique dans l'espace et dans le plan.
- Étant donné un point A et un vecteur $\vec{v}$ **non nul**. La **droite d passant par A** et de **vecteur directeur $\vec{v}$** est décrite par l'équation (paramétrique) **vectorielle**

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (10)$$

où

$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \overrightarrow{OA}.$$

- En passant aux composantes, on obtient les **équations paramétriques** de d .

$$\begin{cases} x_1 &= a_1 &+ \lambda v_1 \\ x_2 &= a_2 &+ \lambda v_2 \\ x_3 &= a_3 &+ \lambda v_3 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (11)$$

- En éliminant le paramètre λ dans les équations paramétriques de d on obtient **deux** équations cartésiennes de plans, la droite d étant alors égale à leur intersection.
- De manière générale, toute droite d de l'espace peut être représentée par deux **équations cartésiennes** de la forme

$$\begin{cases} A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0 \\ B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_4 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

où chaque équation correspond à celle d'un plan contenant d .

- Dans les équations (12) les vecteurs

$$\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

correspondent à des vecteurs normaux aux plans π_1 et π_2 dont la droite d est l'intersection et le vecteur

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$$

est un **vecteur directeur** de d .

- En effet, $\vec{v}$ étant orthogonal à $\vec{n}_1$ il appartient à π_1 mais étant également orthogonal $\vec{n}_2$ il appartient également à π_2 et $\vec{v}$ est contenu dans l'intersection des deux plans.

Distance d'un point à un plan

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

Le plan $\mathbb{R}^3$

Plan de l'espace

Équations param.

Équation normale

Équation cartésienne

Droite de l'espace

Équation cartésienne

Distance point-plan

Angle entre 2 plans

Distance entre 2 plans

Distance droite-plan

Distance point-droite

Distance entre 2 droites

Angle entre 2 droites

Distance entre 2 droites

2.4 Moindres carrés

- La distance séparant un point P d'un plan π est égale à la longueur de la projection orthogonale de $\overrightarrow{AP}$ sur $\vec{n}$ où A est un point quelconque de π et $\vec{n}$ est un vecteur normal à π :

$$\text{dist}(P, \pi) = \|\overrightarrow{AP}_{\vec{n}}\| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

- La définition de la distance entre un point et un plan de l'espace est identique à celle de la distance entre un point et une droite dans le plan. De plus si l'équation cartésienne de π est $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$, on sait que

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

est un vecteur normal à π .

Distance d'un point à un plan (2)

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

Le plan $\mathbb{R}^3$

Plan de l'espace

Équations param.

Équation normale

Équation cartésienne

Droite de l'espace

Équation cartésienne

Distance point-plan

Angle entre 2 plans

Distance entre 2 plans

Distance droite-plan

Distance point-droite

Distance entre 2 droites

Angle entre 2 droites

Distance entre 2 droites

2.4 Moindres carrés

- Ainsi, si les coordonnées cartésiennes du point P sont (x_1, x_2, x_3) , on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} &= (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \cdot \vec{n} = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} - \overrightarrow{OA} \cdot \vec{n} \\ &= A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4\end{aligned}$$

car $A \in \pi \iff \overrightarrow{OA} \cdot \vec{n} = -A_4$ (quel que soit le point A de π).

- La distance entre P et π est donc

$$\text{dist}(P(x_1, x_2, x_3), \pi) = \frac{|A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}$$

- Deux plans π_1 et π_2 peuvent être **parallèles** ou **sécants**.

- Les deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

Ils peuvent alors être **strictement parallèles** s'ils ne possèdent aucun point en commun ou **confondus** s'ils contiennent les mêmes points.

- S'ils sont sécants, leur intersection est une droite. On peut alors définir l'angle entre π_1 et π_2 à partir de l'angle entre leurs vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$:

$$\angle(\pi_1, \pi_2) = \min \left(\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2), \pi - \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right) \in [0; \pi/2]$$

- Comme dans le cas de l'angle entre deux droites sécantes, l'angle entre deux plans sécants est toujours compris entre 0 et $\pi/2$ et les deux plans sont **perpendiculaires** lorsque l'angle entre les deux est égal à $\pi/2$.

Distance entre deux plans parallèles

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

Le plan $\mathbb{R}^3$

Plan de l'espace

Équations param.

Équation normale

Équation cartésienne

Droite de l'espace

Équation cartésienne

Distance point-plan

Angle entre 2 plans

Distance entre 2 plans

Distance droite-plan

Distance point-droite

Distance entre 2 droites

Angle entre 2 droites

Distance entre 2 droites

2.4 Moindres carrés

- La distance entre deux plans parallèles π_1 et π_2 est égale à la distance entre π_1 et un point quelconque de π_2 (ou inversement).

- Si les plans sont donnés par les équations cartésiennes

$$(\pi_1) : A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$$

et

$$(\pi_2) : A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A'_4 = 0$$

alors la distance entre π_1 et π_2 est simplement

$$\text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \frac{|A_4 - A'_4|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}$$

car quels que soient le point $A \in \pi_1$ et le point $B \in \pi_2$ on a

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{OB} \cdot \vec{n} - \overrightarrow{OA} \cdot \vec{n} = -A'_4 - (-A_4) = A_4 - A'_4.$$

Distance entre une droite et un plan parallèles

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

Le plan $\mathbb{R}^3$

Plan de l'espace

Équations param.

Équation normale

Équation cartésienne

Droite de l'espace

Équation cartésienne

Distance point-plan

Angle entre 2 plans

Distance entre 2 plans

Distance droite-plan

Distance point-droite

Distance entre 2 droites

Angle entre 2 droites

Distance entre 2 droites

2.4 Moindres carrés

- Une droite d et un plan π sont **parallèles** si le vecteur directeur de d est coplanaire avec les vecteurs directeurs de π ou, de manière équivalente, si le vecteur directeur de d est orthogonal au vecteur normal de π .
- Si on note $\vec{v}$ le vecteur directeur de d , $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ceux de π et $\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ son vecteur normal, les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul :

$$[\vec{v}, \vec{u}_1, \vec{u}_2] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{v} \cdot (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

et on a bien l'équivalence avec l'orthogonalité entre $\vec{v}$ et $\vec{n}$.

- La distance entre une droite d et un plan π parallèles est simplement la distance entre un point quelconque de d et le plan π .
- Si la droite d et le plan π ne sont pas parallèles, ils possèdent un unique point d'intersection. On peut alors définir l'angle entre d et π à partir de l'angle entre le vecteur $\vec{v}$ de d et le vecteur normal $\vec{n}$ de π (on y revient...).

Distance d'un point à une droite

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

Le plan $\mathbb{R}^3$

Plan de l'espace

Équations param.

Équation normale

Équation cartésienne

Droite de l'espace

Équation cartésienne

Distance point-plan

Angle entre 2 plans

Distance entre 2 plans

Distance droite-plan

Distance point-droite

Distance entre 2 droites

Angle entre 2 droites

Distance entre 2 droites

2.4 Moindres carrés

- La distance entre un point P et une droite d est égale à la plus petite distance entre P et un point de d (même définition que dans le plan).
- Si A désigne un point quelconque de d et $\vec{v}$ un vecteur directeur de d , la norme du produit vectoriel $\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{v}$. Il suffit de diviser cette norme par celle de $\vec{v}$ (la base du parallélogramme) pour obtenir sa hauteur.
- La distance entre un point P et une droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$ est donc

$$\text{dist}(P, d) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

Distance entre deux droites parallèles

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

Le plan $\mathbb{R}^3$

Plan de l'espace

Équations param.

Équation normale

Équation cartésienne

Droite de l'espace

Équation cartésienne

Distance point-plan

Angle entre 2 plans

Distance entre 2 plans

Distance droite-plan

Distance point-droite

Distance entre 2 droites

Angle entre 2 droites

Distance entre 2 droites

2.4 Moindres carrés

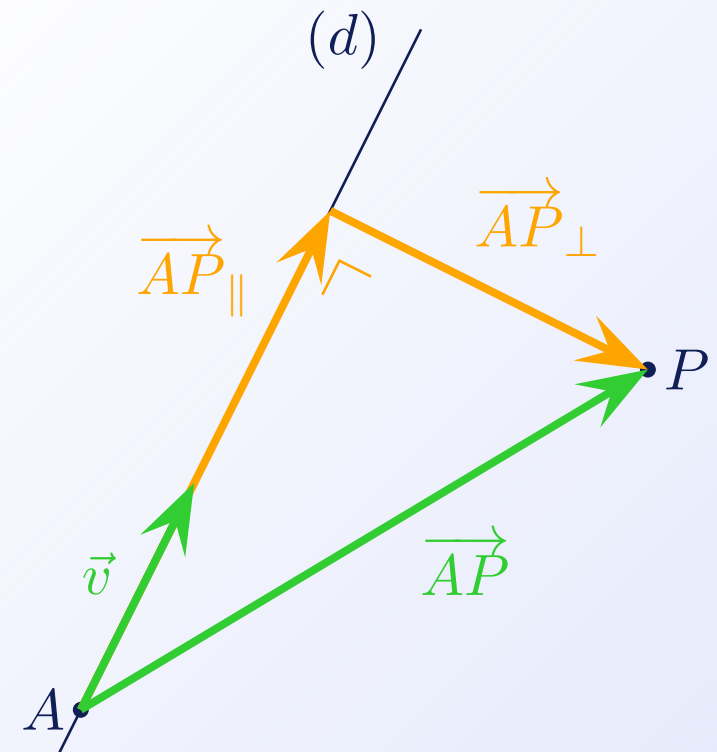
- Deux droites de l'espace sont **parallèles** si leurs vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires.
- La distance entre deux droites parallèles est égale à la distance entre la première droite et un point P quelconque de la seconde (ou inversement).

- REMARQUE. On peut aussi calculer la distance entre P et d par projection orthogonale de $\overrightarrow{AP}$ sur $\vec{v}$. On a alors

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP}_{\parallel} + \overrightarrow{AP}_{\perp}$$

et

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, d) &= \|\overrightarrow{AP}_{\perp}\| \\ &= \|\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AP}_{\parallel}\|. \end{aligned}$$



Angle entre deux droites ou entre une droite et un plan sécants

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

Le plan $\mathbb{R}^3$

Plan de l'espace

Équations param.

Équation normale

Équation cartésienne

Droite de l'espace

Équation cartésienne

Distance point-plan

Angle entre 2 plans

Distance entre 2 plans

Distance droite-plan

Distance point-droite

Distance entre 2 droites

Angle entre 2 droites

Distance entre 2 droites

2.4 Moindres carrés

- Deux droites de l'espace sont **sécantes** si elles possèdent un et un seul point commun.
- L'angle entre deux droites d_1 et d_2 sécantes, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, est défini et se calcule de la même manière dans l'espace ou dans le plan :

$$\angle(d_1, d_2) = \min \left(\angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2), \pi - \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \right) \in [0; \pi/2]$$

- Pour un plan π et une droite d sécants, l'angle entre π et d se calcule en prenant le plus petit angle entre un vecteur normal $\vec{n}$ de π et un vecteur directeur $\vec{v}$ de d et en prenant le complément à $\pi/2$:

$$\angle(\pi, d) = \frac{\pi}{2} - \min \left(\angle(\vec{n}, \vec{v}), \pi - \angle(\vec{n}, \vec{v}) \right) \in [0; \pi/2]$$

Distance entre deux droites gauches

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

Le plan $\mathbb{R}^3$

Plan de l'espace

Équations param.

Équation normale

Équation cartésienne

Droite de l'espace

Équation cartésienne

Distance point-plan

Angle entre 2 plans

Distance entre 2 plans

Distance droite-plan

Distance point-droite

Distance entre 2 droites

Angle entre 2 droites

Distance entre 2 droites

2.4 Moindres carrés

- Deux droites de l'espace qui ne sont ni parallèles ni sécantes sont dites **gauches**.
- La distance entre deux droites gauches $d_1 = d(A, \vec{v}_1)$ et $d_2 = d(B, \vec{v}_2)$ est égale à la plus petite distance entre un point de d_1 et un point de d_2 et est donnée par la formule

$$\text{dist}(d_1, d_2) = \frac{|\vec{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2|}{\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\|}$$

- La valeur absolue du produit mixte $[\vec{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2]$ est égale au volume du parallélépipède construit sur $\vec{AB}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. En divisant ce volume par la norme du produit vectoriel $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$, égale à l'aire de la base de ce parallélépipède, on obtient sa hauteur qui n'est rien d'autre que la distance entre les deux droites.

Distance entre deux droites gauches (2)

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

Le plan $\mathbb{R}^3$

Plan de l'espace

Équations param.

Équation normale

Équation cartésienne

Droite de l'espace

Équation cartésienne

Distance point-plan

Angle entre 2 plans

Distance entre 2 plans

Distance droite-plan

Distance point-droite

Distance entre 2 droites

Angle entre 2 droites

Distance entre 2 droites

2.4 Moindres carrés

■ Un autre raisonnement permettant d'établir la formule précédente est possible :

- Soient $d_1 = d(A, \vec{v}_1)$ et $d_2 = d(B, \vec{v}_2)$ les deux droites gauches passant, respectivement, par les points A et B et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.
- Les plans $\pi_1(A, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ et $\pi_2(B, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ sont parallèles, de vecteur normal $\vec{n} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ et contiennent, respectivement, d_1 et d_2 .
- La distance entre les deux droites gauches d_1 et d_2 est égale à celle entre les plans parallèles π_1 et π_2 :

$$\begin{aligned} \text{dist}(d_1, d_2) &= \text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \|\overrightarrow{AB}_{\vec{n}}\| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \\ &= \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)|}{\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\|} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2]|}{\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\|}. \end{aligned}$$

2.4 Méthodes des moindres carrés



Rappels sur les systèmes linéaires inconsistants

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

Système inconsistant

Meilleure approximation

Critères des moindres carrés

Interprétation géom.

Les équations normales

Matrice de projection

- Considérons un système d'équations linéaires $A\vec{x} = \vec{b}$ avec $A : m \times n$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Ce système peut posséder

- 1) une solution unique,
- 2) une infinité de solutions,
- 3) aucune solution.

Dans le dernier cas il est dit **inconsistant** ou **incompatible**.

- L'algorithme de Gauss-Jordan permet de détecter une telle situation car le système $A\vec{x} = \vec{b}$ est inconsistant si et seulement si la matrice échelonnée équivalente à la matrice augmentée $\overline{A}$ du système possède un **1 directeur en dernière colonne**.

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

Système inconsistant

**Meilleure
approximation**

Critères des moindres
carrés

Interprétation géom.

Les équations normales

Matrice de projection

- Confronté à un système inconsistant on peut chercher à en calculer la (ou les) « **moins mauvaise(s)** » solution(s).
- Plusieurs critères ont été proposés pour choisir la **meilleure approximation** de la solution d'un système linéaire inconsistant.
- Le plus connu et, de loin, le plus utilisé en pratique remonte à Gauss lui-même et consiste à retenir la (ou les) solution(s) $\vec{x}$ **minimisant la somme des carrés des erreurs**, ces dernières étant définies comme la différence entre la valeur du membre de gauche et celle du membre de droite de chaque équation :

$$\vec{r} = A\vec{x} - \vec{b}.$$

- Selon le **critère des moindres carrés** la meilleure solution d'un système inconsistant $A\vec{x} = \vec{b}$ est donc le (ou les) vecteur(s) $\vec{x}^*$ minimisant la norme (euclidienne) au carré du vecteur $A\vec{x} - \vec{b}$:

$$\vec{x}^* = \operatorname{argmin}(\|A\vec{x} - \vec{b}\|^2).$$

REMARQUES.

- a) Le vecteur des erreurs $\vec{r} = A\vec{x} - \vec{b}$ est également appelé le vecteur des **résidus**.
- b) La minimisation de la norme **au carré** du vecteur $\vec{r}$ fournit la même solution que la minimisation de la norme de $\vec{r}$.
- c) Si le système est consistant, la meilleure approximation au sens des moindres carrés est simplement la (ou les) solution(s) du système.

- Considérons le système à une seule inconnue

$$\begin{cases} x = 5 \\ 2x = 3 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A} = \vec{a}} \cdot x = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

- Ce système est clairement inconsistant. Pour trouver sa meilleure solution approchée, au sens des moindres carrés, il faut chercher la valeur à donner à x pour laquelle la norme (au carré) du vecteur

$$\vec{r} = \vec{a}x - \vec{b}$$

est minimale. Le vecteur $\vec{p} = \vec{a}x$ associé correspond alors **au point de la droite (δ) de vecteur directeur $\vec{a}$ (et passant par l'origine) le plus proche du point $\vec{b}$.**

Interprétation géométrique

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

Système inconsistant

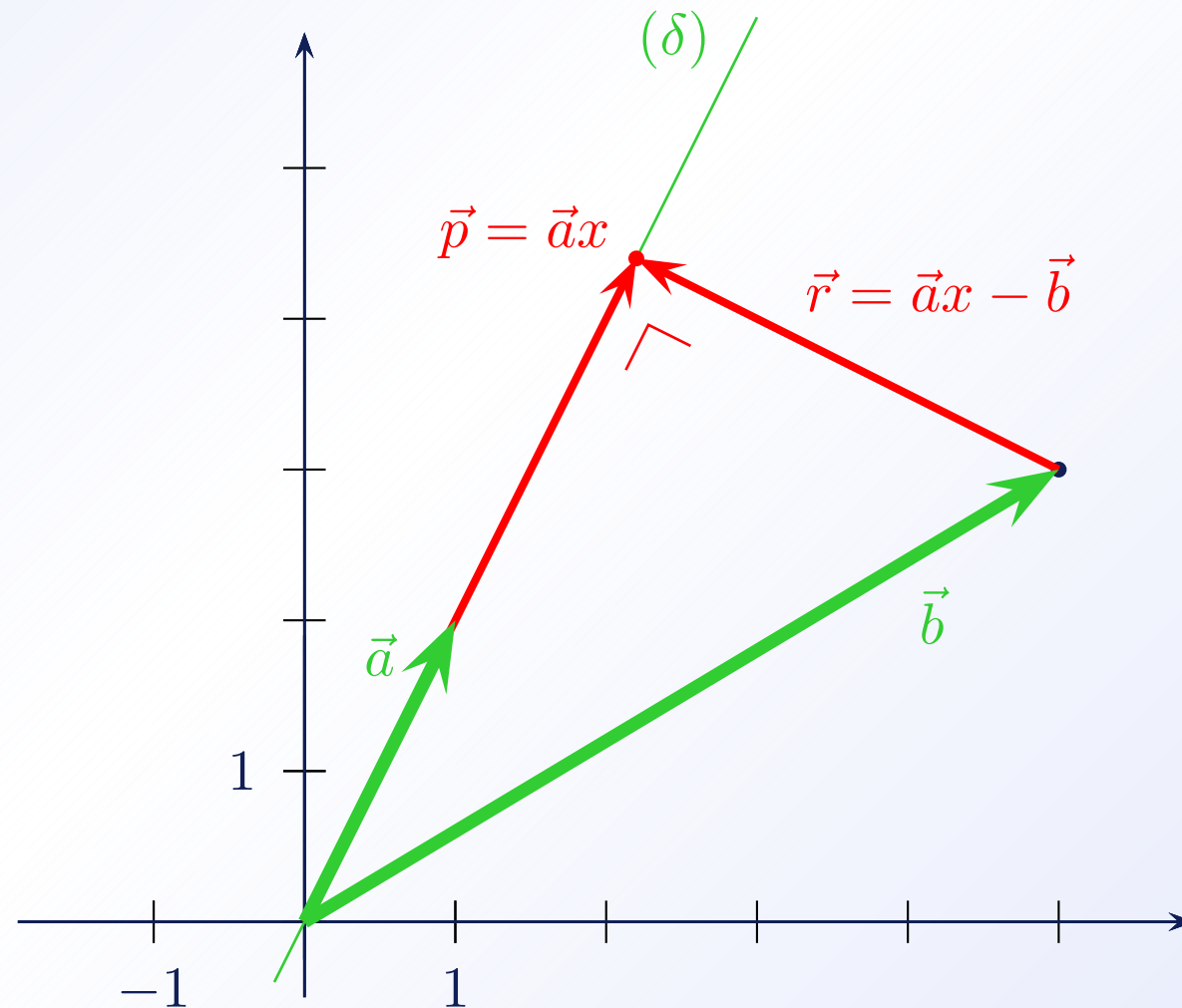
Meilleure approximation

Critères des moindres carrés

Interprétation géom.

Les équations normales

Matrice de projection



- Lorsque le vecteur $\vec{x}$ parcourt tout $\mathbb{R}^n$, le vecteur $\mathbf{A}\vec{x}$ parcourt, lui, le sous-espace engendré par les colonnes de la matrice $\mathbf{A}$ du système (sous-espace appelé *enveloppe linéaire* et noté $\text{lin}(\mathbf{A})$).

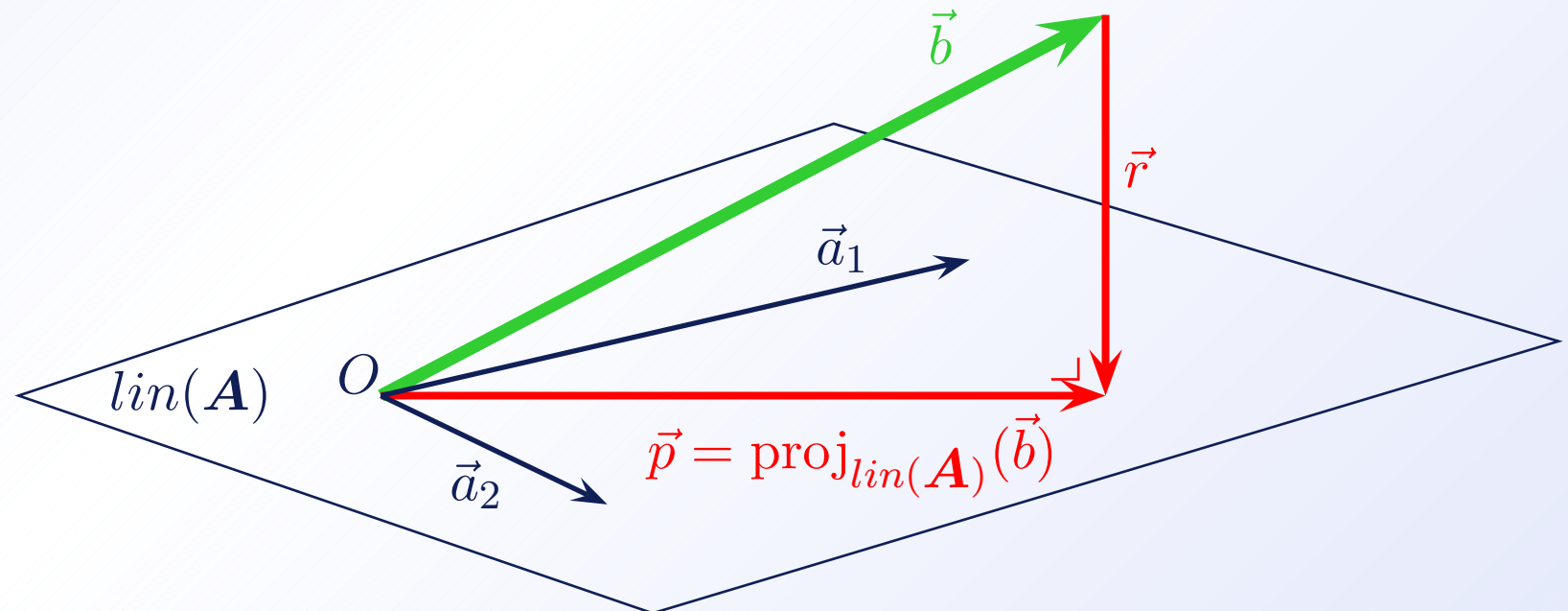
- EXEMPLE. Pour la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, lorsque le vecteur $\vec{x} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}$ parcourt tout $\mathbb{R}^2$ le point

$$\vec{p} = \mathbf{A}\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

parcourt tout le plan (π) passant par l'origine et dont les deux vecteurs directeurs correspondent aux colonnes de $\mathbf{A}$.

- Afin de minimiser la norme du vecteur $\vec{r} = A\vec{x} - \vec{b}$ il suffit de déterminer le vecteur $\vec{p}$ de $\text{lin}(A)$ le plus proche de $\vec{b}$. La solution de ce problème est bien connue et consiste à choisir pour $\vec{p}$ la **projection orthogonale de $\vec{b}$ sur $\text{lin}(A)$** :

$$\vec{p} = \text{proj}_{\text{lin}(A)}(\vec{b}).$$



- Le vecteur $\vec{r}$ doit être orthogonal à $\text{lin}(\mathbf{A})$ et tel est le cas si et seulement si le produit scalaire entre ce vecteur et chacune des n colonnes $\vec{a}_i$ de la matrice $\mathbf{A}$ est nul, c.-à-d. si et seulement si

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{r} = \vec{a}_2 \cdot \vec{r} = \dots = \vec{a}_n \cdot \vec{r} = 0.$$

- Le calcul du produit scalaire $\vec{a}_i \cdot \vec{r}$ n'est pas différent de celui du produit matriciel $\vec{a}_i^T \vec{r}$ (d'un vecteur-ligne par un vecteur-colonne). Le vecteur $\vec{r}$ doit donc vérifier

$$\vec{a}_1^T \vec{r} = \vec{a}_2^T \vec{r} = \dots = \vec{a}_n^T \vec{r} = 0$$

conditions qui s'écrivent aussi, sous forme matricielle, $\mathbf{A}^T \vec{r} = \vec{0}$.

- En remplaçant $\vec{r}$ par $\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b}$, on obtient le système $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b}) = \vec{0}$ et $\vec{r}$ est orthogonal à $\text{lin}(\mathbf{A})$ si et seulement si $\vec{x}$ est solution des **équations normales**

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \vec{x} = \mathbf{A}^T \vec{b}.$$

La meilleure approximation au sens des moindres carrés de la solution du système (incompatible) $A\vec{x} = \vec{b}$ est donnée par la solution des équations normales :

$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}.$$

- Ce système d'équations linéaires est **toujours compatible**, il peut cependant posséder une solution unique ou une infinité de solutions !
- Lorsque les équations normales possèdent une solution unique, c'est-à-dire **lorsque la matrice $A^T A$ est inversible**, la meilleure approximation de la solution du système $A\vec{x} = \vec{b}$ est

$$\vec{x}^* = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}.$$

Exemple 1

Considérons le système

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 2 \\ 2x_1 - 5x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = -3 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Si on cherche à résoudre ce système à l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan on obtient :

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{array} \right] L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-7} \end{array} \right] \end{aligned}$$

et le système est sans solutions.

Exemple 1 (2)

Pour déterminer sa meilleure solution approchée, au sens des moindres carrés, on calcule les équations normales

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \vec{x} = \mathbf{A}^T \vec{b}.$$

On obtient premièrement

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -14 \\ -14 & 35 \end{bmatrix}$$

puis

$$\mathbf{A}^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -14 \end{bmatrix}.$$

Exemple 1 (3)

Ici, la matrice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ est inversible car

$$\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 6 & -14 \\ -14 & 35 \end{vmatrix} = 6 \cdot 35 - 14^2 = 210 - 196 = 14 \neq 0.$$

La solution des équations normales est donc unique et la meilleure approximation, au sens des moindres carrés, de la solution du système initial est

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -14 \\ -14 & 35 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -14 \\ -14 & 35 \end{vmatrix}} = \frac{49}{14} = \frac{7}{2}$$

et

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -14 & -14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -14 \\ -14 & 35 \end{vmatrix}} = \frac{14}{14} = 1.$$

Exemple 2

Considérons maintenant le système

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

Ici aussi le système est inconsistant comme on le constate en essayant d'échelonner sa matrice augmentée :

$$\overline{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{array} \right] L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-7} \end{array} \right]$$

Exemple 2 (2)

Le calcul des équations normales donne :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -14 & 10 \\ -14 & 35 & -28 \\ 10 & -28 & 26 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{A}^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -14 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Contrairement à l'exemple précédent, la matrice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ n'est pas inversible car

$$\begin{vmatrix} \color{red}{6} & -14 & 10 \\ \color{red}{-14} & 35 & -28 \\ \color{red}{10} & -28 & 26 \end{vmatrix} = 6(35 \cdot 26 - 28^2) + 14(-14 \cdot 26 + 28 \cdot 10) \\ \quad \quad \quad \color{red}{\uparrow} \quad \quad \quad + 10(14 \cdot 28 - 35 \cdot 10) \\ = 756 - 1176 + 420 = 0$$

Exemple 2 (3)

On doit donc résoudre les équations normales à l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan (ou une de ses variantes).

En échelonnant et réduisant la matrice augmentée $\overline{B}$ des équations normales $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$ on obtient

$$\overline{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -14 & 10 & 7 \\ -14 & 35 & -28 & -14 \\ 10 & -28 & 26 & 7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 7/2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

L'ensemble S des solutions, au sens des moindres carrés, du système initial est donc

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right. \right\}.$$

Exemple 2 (4)

Il est important de remarquer que, **quelle que soit la solution $\vec{x} \in S$ choisie, on obtient toujours la même projection orthogonale $\vec{p} = \mathbf{A}\vec{x}$ (qui est, elle, unique) et le même vecteur d'erreurs**

$$\vec{r} = \vec{p} - \vec{b} = \mathbf{A}\vec{x} - \vec{b}.$$

En effet

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\vec{x} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 7/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\alpha \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{= \vec{0}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \\ -5/2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.1 Calcul vectoriel

2.2 Géométrie du plan

2.3 Géom. dans l'espace

2.4 Moindres carrés

Système inconsistant

Meilleure approximation

Critères des moindres carrés

Interprétation géom.

Les équations normales

Matrice de projection

- Lorsque la matrice $A^T A$ est inversible, l'unique solution des équations normales est

$$\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}.$$

- La projection orthogonale $\vec{p}$ du vecteur $\vec{b}$ sur le sous-espace engendré par les colonnes de la matrice A est alors

$$\vec{p} = \text{proj}_{\text{lin}(A)}(\vec{b}) = A\vec{x} = A(A^T A)^{-1} A^T \vec{b}.$$

et la matrice

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T$$

n'est rien d'autre que la **matrice de projection orthogonale sur l'espace $\text{lin}(A)$** .