

Mathématiques 2

Calcul vectoriel et géométrie analytique

Table des matières

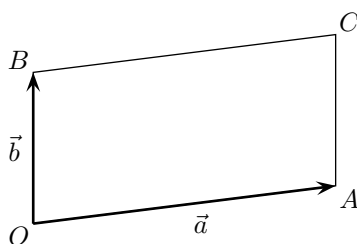
2	Calcul vectoriel et géométrie analytique	1
2.1	Calcul vectoriel	1
2.1.1	Opérations vectorielles et propriétés de base	1
2.1.2	Bases, composantes et coordonnées	2
2.1.3	Vecteurs colinéaires	2
2.1.4	Normes et vecteurs unitaires	3
2.1.5	Produit scalaire, angles et projections orthogonales	3
2.1.6	Produits vectoriel et mixte	4
2.2	Géométrie analytique du plan	5
2.2.1	Équations cartésiennes et paramétriques d'une droite	5
2.2.2	Angles et distances	6
2.3	Géométrie analytique de l'espace	6
2.3.1	Équations cartésiennes et paramétriques d'une droite et d'un plan	6
2.3.2	Angles et distances	8
2.4	Méthode des moindres carrés	9
2.5	Exercices supplémentaires et récapitulatifs	11
2.6	Solutions d'exercices choisis	12

Calcul vectoriel et géométrie analytique

2.1 Calcul vectoriel

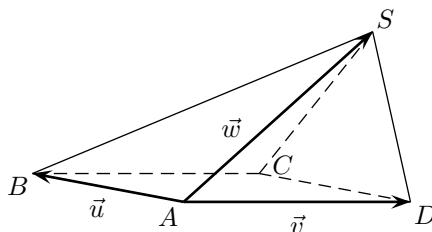
2.1.1 Opérations vectorielles et propriétés de base

2.1 On considère un parallélogramme $OACB$ et on note $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.



Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$ en fonction de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

2.2 Soit une pyramide de sommet S et dont la base $ABCD$ est un parallélogramme.



On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AS}$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{DS}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{CA}$ à l'aide de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

2.3 Soit A , B , C , D et E des points quelconques. Réduire le plus possible chaque expression.

a) $\vec{a} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$,

c) $\vec{c} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{ED}$,

b) $\vec{b} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$,

d) $\vec{d} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AB}$.

2.4 On donne deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Déterminer un vecteur $\vec{x}$ tel que

$$\frac{1}{3}(2\vec{x} + \vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{x} + 2\vec{a} - 3\vec{b}).$$

2.5 Soit un triangle ABC . Soit encore M le milieu du côté $[BC]$ et D tel que $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BA}$. Exprimer $\overrightarrow{CD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2.1.2 Bases, composantes et coordonnées

2.6 On considère trois points du plan : $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ et $C(c_1, c_2)$. Sachant que le centre de gravité G du triangle ABC est situé aux deux tiers des médianes du triangle,

- exprimer $\overrightarrow{OG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$,
- en déduire une formule donnant les coordonnées de G en fonction de celles de A , B et C ,
- calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle de sommets $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ et $C(5, -3)$.

2.7 Soit les vecteurs $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{d}$ tel que

$$-2\vec{a} + 3\vec{d} = 4\vec{b} - 3\vec{c}.$$

2.1.3 Vecteurs colinéaires

2.8 Parmi les vecteurs

$$\begin{array}{llll} \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & \vec{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} & \vec{e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \vec{g} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3/2 \end{bmatrix} \\ \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \vec{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} & \vec{f} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} & \vec{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \end{bmatrix} \end{array}$$

lesquels sont colinéaires ?

2.9 Dans chaque cas, décider si les triplets de points donnés sont alignés ou non.

- $A(5, 2)$, $B(6, -3)$ et $C(7, 8)$,
- $A(3, 8)$, $B(5, -6)$ et $C(-1, 36)$.

2.10 Comment décider si deux vecteurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont colinéaires ou si trois points quelconques A , B et C du plan sont alignés ?

2.11 Déterminer complètement le point C pour que les points A , B et C soient alignés dans les cas suivants :

- $A(-1, 5)$, $B(3, -3)$ et $C(x, 1)$,
- $A(2, -1, 10)$, $B(8, 5, 1)$ et $C(y, 3, z)$,

2.1.4 Normes et vecteurs unitaires

2.12 Calculer la distance séparant les points A et B dans les cas suivants :

a) $A(2, -1)$ et $B(-2, -4)$, b) $A(5, -3, 1)$ et $B(3, 0, 9)$, c) $A(0, 0, 1)$ et $B(6, 6, 7)$.

2.13 Trouver un vecteur unitaire $\vec{e}$ colinéaire au vecteur $\vec{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Existe-t-il plusieurs solutions ?

2.14 Soient les quatre vecteurs

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Trouver un vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} + \vec{a}_1$ soit colinéaire à $\vec{b}_1$ et $\vec{v} + \vec{a}_2$ colinéaire à $\vec{b}_2$.

2.15 Étant donné les trois vecteurs

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

quel multiple de $\vec{v}$ faut-il ajouter à $\vec{a}$ pour obtenir un vecteur colinéaire à $\vec{b}$?

2.1.5 Produit scalaire, angles et projections orthogonales

2.16 Calculer l'angle entre les paires de vecteurs suivants :

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{b) } \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Donner vos réponses en radians et en degrés (vous aurez besoin d'une machine à calculer).

2.17 Déterminer le cosinus de l'angle θ entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, sachant que $\|\vec{a}\| = 6$, $\|\vec{b}\| = 8$ et que les vecteurs $(2\vec{a} - \vec{b})$ et $(\vec{a} + \vec{b})$ sont orthogonaux.

2.18 Justifier le théorème de Pythagore en explicitant le produit scalaire $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

2.19 Justifier l'identité trigonométrique

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

en interprétant et manipulant le produit scalaire des vecteurs $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{bmatrix}$.

2.20 Déterminer à l'aide du produit scalaire les angles du triangle de sommets $A(4, 2)$, $B(7, 4)$ et $C(0, 8)$.

2.21 Calculer les composantes et la longueur de la projection (orthogonale) de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ dans les cas suivants :

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2.22 Calculer le vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ et dont la projection sur $\vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ est égale à $\vec{w}$.

2.23 Calculer le vecteur $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et dont la projection sur $\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ est égale à $\vec{w}$.

2.1.6 Produits vectoriel et mixte

2.24 Pour les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

calculer

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \vec{a} \wedge \vec{b} & \text{c) } (2\vec{b}) \wedge (-3\vec{a}) & \text{e) } \vec{a} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{b}) \\ \text{b) } \vec{a} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{c}) & \text{d) } \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) & \text{f) } (\vec{a} + \vec{b}) \wedge (\vec{a} - \vec{b}) \end{array}$$

2.25 Calculer l'aire S du triangle de sommets $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ et $C(0, 0, 3)$

2.26 Calculer le volume V du parallélépipède construit sur les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

2.27 Calculer le volume V du tétraèdre de sommets

$$P(1, 1, 1), \quad Q(2, 0, 3), \quad R(4, 1, 7) \text{ et } S(3, -1, -2).$$

2.28 Vérifier que les vecteurs $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ sont coplanaires.

2.29 Décider si les points $P(1, 2, 3)$, $Q(2, 3, 4)$, $R(-1, 5, 4)$ et $S(-2, 9, 6)$ sont coplanaires.

2.2 Géométrie analytique du plan

2.2.1 Équations cartésiennes et paramétriques d'une droite

2.30 a) Déterminer une équation cartésienne de la droite d_1 passant par le point $A(3, 5)$ et de vecteur directeur $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 & 1 \end{bmatrix}^T$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite d_2 passant par les deux points $B(-3, -2)$ et $C(4, -5)$.

2.31 a) Déterminer des équations paramétriques de la droite d_1 passant par $A(1, 2)$ et de pente 3.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite d_2 ayant pour équations paramétriques

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 3\lambda \\ x_2 = 5 + 2\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) Déterminer des équations paramétriques de la droite $(d_3) : 2x + 3y = 7$.

d) Déterminer les points d'intersection des axes de coordonnées avec la droite d_4 donnée par

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.32 a) Déterminer des équations paramétriques de la droite Δ passant par $A(5, 1)$ et $B(-7, 6)$.

b) Déterminer l'équation cartésienne de Δ obtenue par élimination du paramètre.

2.33 Indiquer, parmi les paires de droites d et t qui suivent, lesquelles sont parallèles, confondues, sécantes ou perpendiculaires.

a) $(d) : 2x_1 + 3x_2 - 5 = 0$ et $(t) : 2x_1 - 3x_2 + 5 = 0$

b) $(d) : 2x_1 + 3x_2 - 5 = 0$ et $(t) : 2x_1 + 3x_2 + 5 = 0$

c) $(d) : 2x_1 + 3x_2 - 5 = 0$ et $(t) : -2x_1 + 3x_2 + 5 = 0$

d) $(d) : 2x_1 + 3x_2 - 5 = 0$ et $(t) : 4x_1 + 6x_2 - 10 = 0$

e) $(d) : 2x_1 + 3x_2 = 0$ et $(t) : 2x_1 - 3x_2 = 0$

f) $(d) : 2x_1 + 3x_2 = 0$ et $(t) : 3x_1 - 2x_2 = 0$

g) $(d) : 2x_1 + 3 = 0$ et $(t) : 2x_1 - 3 = 0$

h) $(d) : 2 + 3x_2 = 0$ et $(t) : 2 - 3x_2 = 0$

2.34 Décider si la droite d_1 d'équation cartésienne $3x + 2y = 7$ et la droite d_2 de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 3 - 3\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

sont sécantes, parallèles et distinctes ou parallèles et confondues.

2.2.2 Angles et distances

- 2.35** Déterminer l'angle θ entre les droites d_1 et d_2 de l'exercice 2.30.
- 2.36** Déterminer la distance δ séparant le point $P(7, 4)$ de la droite passant par les deux points $A(0, 1)$ et $B(-5, 3)$.
- 2.37** Déterminer la distance δ séparant le point $P(4, 6)$ de la droite d'équation cartésienne $5x_1 - 12x_2 + 13 = 0$.
- 2.38** Calculer la distance δ séparant les droites d'équations cartésiennes $3x_1 + 4x_2 = 12$ et $3x_1 + 4x_2 = 20$.
- 2.39** Déterminer des équations cartésiennes des droites situées à une distance 3 de la droite d d'équation cartésienne $4x - 3y = 8$.
- 2.40** Déterminer des équations paramétriques des droites passant par $A(2, 3)$ et équidistantes des points $B(10, 2)$ et $C(0, 4)$.
- 2.41** Déterminer des équations cartésiennes des droites d_1 et d_2 situées à distance 3 du point $P(-2, 3)$ et parallèles à la droite d d'équation $8x_1 - 15x_2 + 34 = 0$.
- 2.42** Déterminer une équation cartésienne de la tangente t passant par le point $A(-1, 4)$ du cercle Γ de centre $C(3, 1)$.
- 2.43** Déterminer les coordonnées du point P' , symétrique du point $P(2, -4)$ par rapport à la droite d d'équation cartésienne $3x - 2y = 1$.
- 2.44** Déterminer l'équation du cercle Γ centré en $C(9, 3)$ et tangent à la droite d d'équation $x + 5y = 50$.
- 2.45** Déterminer l'équation du cercle Γ inscrit dans le triangle de sommets $A(-6, 1)$, $B(11, -6)$ et $C(-1, 6)$.
- 2.46** Déterminer des équations cartésiennes des bissectrices b_1 et b_2 des deux droites se coupant au sommet A du triangle de l'exercice 2.20.
- 2.47** Déterminer des équations cartésiennes des bissectrices b_1 et b_2 des droites d_1 et d_2 d'équations respectives

$$(d_1) : 2x + 3y + 16 = 0 \quad \text{et} \quad (d_2) : 4x + 7y - 23 = 0.$$

2.3 Géométrie analytique de l'espace

2.3.1 Équations cartésiennes et paramétriques d'une droite et d'un plan

- 2.48** Dans l'espace, on considère la droite Δ passant par $A(2, 3, 1)$ et $B(-8, 7, -4)$.
- a) Déterminer des équations paramétriques de cette droite.

- b) La droite coupe-t-elle l'axe Ox_3 ? Si oui, en quel point ?
 c) La droite coupe-t-elle l'axe Ox_2 ? Si oui, en quel point ?
 d) La droite coupe-t-elle le plan Ox_1x_3 ? Si oui, en quel point ?

2.49 Donner une équation cartésienne du plan π de représentation paramétrique

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2.50 Donner une équation cartésienne du plan π passant par les trois points $A(1, 1, -1)$, $B(-2, -2, 2)$ et $C(1, -1, 2)$.

2.51 Déterminer des équations paramétriques pour le plan π contenant le point $A(2, -1, 5)$ ainsi que la droite Δ de représentation paramétrique

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.52 Déterminer une équation cartésienne puis des équations paramétriques du plan π passant par le point $A(-1, -4, 1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 5 \end{bmatrix}^T$

2.53 Montrer que la droite δ d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \lambda \\ x_2 = -2 + 2\lambda \\ x_3 = 3 + 4\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

est parallèle au plan π d'équation cartésienne $6x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 8 = 0$.

2.54 Dans chaque cas, donner une équation cartésienne du plan

- a) passant par le point $P(3, -2, 4)$ et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OP}$;
 b) perpendiculaire au segment $[AB]$ et passant par son milieu, avec $A(0, 2, 5)$ et $B(4, -4, 1)$;
 c) passant par le point $Q(5, 0, 1)$ et parallèle au plan d'équation $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 17$.

2.55 a) Donner des équations cartésiennes de la droite $d_1(A_1, \vec{v}_1)$ où

$$\overrightarrow{OA_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

b) Même question pour la droite $d_2(A_2, \vec{v}_2)$ où

$$\overrightarrow{OA_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2.3.2 Angles et distances

2.56 Soit le plan π d'équation cartésienne $6x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 8 = 0$. Calculer la distance entre le plan π et

- a) le point $P(1, 2, 3)$;
- b) le plan d'équation $6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$;
- c) le plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

2.57 Calculer l'angle φ entre les plans

$$(\pi_1) : 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 11 = 0 \quad \text{et} \quad (\pi_2) : x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - 4 = 0.$$

2.58 On considère les plans π_1 et π_2 d'équations respectives

$$(\pi_1) : 2x - y + z = 2 \quad \text{et} \quad (\pi_2) : 3x + y - 2z = 5.$$

- a) Déterminer l'angle φ entre ces deux plans.
- b) Déterminer des équations paramétriques de la droite d , intersection de π_1 et π_2 .
- c) Déterminer une équation cartésienne du plan π contenant la droite d et passant par le point $A(1, 1, 0)$.

2.59 Calculer la distance δ entre le point $P(1, -1, -1)$ et la droite d passant par $A(1, 1, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$.

2.60 Déterminer une équation cartésienne du plan π perpendiculaire aux plans π_1 et π_2 , d'équations cartésiennes respectives $(\pi_1) : 3x - y + z = 0$ et $(\pi_2) : x + 5y + 3z = 0$, et passant par le point $A(2, 2, -1)$.

2.61 On considère les quatre points $A(1, 3, 2)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(0, 1, 3)$ et $P(5, 6, 7)$. Calculer les coordonnées du point Q , projection orthogonale de P sur le plan défini par les points A , B et C .

2.62 Calculer la distance δ séparant les droites $d_1(A_1, \vec{v}_1)$ et $d_2(A_2, \vec{v}_2)$ de l'exercice 2.55.

2.63 On considère les plans π_1 et π_2 d'équations cartésiennes respectives

$$(\pi_1) : x + y + z = 4 \quad \text{et} \quad (\pi_2) : x - y + 3z = 5.$$

- a) Déterminer des équations paramétriques de la droite d , intersection de π_1 et π_2 .
- b) Déterminer l'angle φ entre les deux plans π_1 et π_2 .
- c) Déterminer une équation cartésienne du plan π passant par le point $A(1, 2, 3)$ et parallèle à la droite d ainsi qu'à l'axe Ox .

2.64 a) Déterminer l'équation cartésienne du plan médiateur π du segment $[OQ]$ pour $Q(4, 12, 3)$.

- b) Déterminer une représentation paramétrique de la trace horizontale t de π (c.-à-d. de la droite d'intersection entre π et le sol).

- 2.65** a) Donner l'équation de la sphère Γ de rayon $r = 10$, centrée en $C(1, -1, 2)$.
 b) Déterminer le centre C' et le rayon r' du cercle d'intersection entre Γ et le plan π d'équation cartésienne $2x + y + 2z = 23$.
- 2.66** Déterminer les équations cartésiennes des plans bissecteurs σ_1 et σ_2 des plans π_1 et π_2 d'équations

$$\pi_1 : 8x + y - 4z = 0 \quad \text{et} \quad \pi_2 : 2x - y + 2z = 6.$$

2.4 Méthode des moindres carrés

- 2.67** Calculer la meilleure approximation, au sens des moindres carrés, de la solution du système linéaire

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

- 2.68** Déterminer l'ensemble S de toutes les solutions, au sens des moindres carrés, du système $A\vec{x} = \vec{b}$ défini par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- 2.69** a) Déterminer la meilleure approximation au sens des moindres carrés de la solution du système $A\vec{x} = \vec{b}$ donné par

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha > 0.$$

- b) Dans le plan muni d'un repère orthonormé Ox_1x_2 , esquisser les trois équations du système, ainsi que la meilleure approximation obtenue pour les valeurs suivantes de α : $\frac{1}{10}$, 1, 2 et 1000.

- 2.70** Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les trois droites

$$\begin{aligned} (d_1) &: 3x_1 + 4x_2 = 12 \\ (d_2) &: x_2 = 1 \\ (d_3) &: -3x_1 + 4x_2 = 12 \end{aligned}$$

- a) Vérifier graphiquement que les trois droites ne sont pas concourantes.
 b) Déterminer le point du plan minimisant la somme des carrés des distances à ces trois droites.

- 2.71** Dans le plan muni d'un repère cartésien Ox_1x_2 , quatre observateurs, situés respectivement aux points de coordonnées $A(3, 5)$, $B(6, 4)$, $C(0, 4)$ et $D(4, 0)$ repèrent au même instant un voilier dans les directions données par les angles : $\alpha_A = -\pi/2$, $\alpha_B = \pi + \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$, $\alpha_C = 0$ et $\alpha_D = 3\pi/4$.

Déterminer la position du voilier qui minimise la somme des carrés des distances à chacune des droites de visée.

- 2.72** Le tableau ci-dessous contient une série de mesures, effectuées sur une période de quatre ans, de la consommation annuelle d'électricité d'une ville.

Année	1	2	3	4
Consommation	98	102	104	111

Estimer par la méthode des moindres carrés les coefficients α et β de la droite de régression $y(t) = \alpha t + \beta$ tentant d'exprimer la consommation d'électricité en fonction de l'année t .

- 2.73** Une grandeur y a été mesurée à différents temps t :

t	1	2	3
$y(t)$	2	2	4

- Déterminer successivement la meilleure approximation au sens des moindres carrés de ces mesures par une fonction (1) quadratique, (2) linéaire, (3) constante.
 - Utiliser ces fonctions pour obtenir une prévision de la grandeur y au temps $t = 4$.
 - Au temps $t = 4$, on mesure la valeur 5 pour y . Comparer les différentes prévisions avec la valeur effective et commenter (tenter par exemple de mettre en relation ces résultats avec le nombre de mesures effectuées et de paramètres ajustés).
- 2.74** On considère les quatre points $P(-2, 2)$, $Q(-1, 3)$, $R(1, 1)$ et $S(2, 0)$ du plan $\mathbb{R}^2$. Calculer l'équation de la parabole que interpole le mieux, au sens des moindres carrés, les points P , Q , R et S .
- 2.75** Un étudiant en informatique désire tester la qualité de son programme de recherche dichotomique dans un tableau trié. Pour cela, il a mesuré le temps moyen de recherche $T(n)$ d'un élément dans un tableau de taille n . Les résultats obtenus pour différentes valeurs de n sont présentés dans la table qui suit.

Taille du tableau : n	128	256	1024	4096	16 384
Temps moyen de recherche : $T(n)$ [μ s]	42	46	58	66	72

La complexité théorique d'une recherche dichotomique étant en $O(\ln(n))$, il cherche à modéliser le temps requis par son programme par la fonction

$$T(n) = \alpha + \beta \ln(n)$$

où α et β sont deux constantes à déterminer.

Calculer les valeurs de α et β fournissant le meilleur ajustement au sens des moindres carrés.

2.5 Exercices supplémentaires et récapitulatifs

- 2.76** En sachant que $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 4$ et $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$, déterminer pour quelle valeur du paramètre réel m les vecteurs $(\vec{a} + m\vec{b})$ et $(\vec{a} - \vec{b})$ sont orthogonaux.
- 2.77** Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère cartésien, calculer la longueur h de la hauteur issue de A dans le triangle de sommets $A(-3, -2, 0)$, $B(4, 3, 1)$ et $C(5, 6, 5)$.
- 2.78** Déterminer les équations cartésiennes des droites passant par le point $A(1, 1)$ et situées à distance 3 du point $B(-5, 4)$.
- 2.79** a) Donner une représentation paramétrique ainsi qu'une équation cartésienne de la droite (e) passant par le point $A(5, 2)$ et de vecteur normal $\vec{n} = [3 \ -4]^T$.
 b) Déterminer le point B de la droite (e) équidistant des points $M(4, 3)$ et $N(5, -4)$.
 c) Déterminer les équations cartésiennes des droites (f) et (g) situées à distance 3 de la droite (e) .
 d) Déterminer le symétrique P' du point $P(0, 2)$ relativement à la droite (e) .
- 2.80** Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien, on considère les trois points $A(1, 1)$, $B(2, -1)$ et $C(x, y)$. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour les coordonnées du point C de manière à ce que l'aire du triangle ABC soit égale à 2.
- 2.81** Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien, on considère les deux points $A(2, 4)$ et $B(6, 5)$ ainsi que la droite δ d'équation cartésienne

$$(\delta) : -x + 3y = 11.$$

Déterminer tous les points C de δ pour lesquels l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est égale à 2.

- 2.82** Dans l'espace, on lance un rayon lumineux depuis le point $S(10, 2, 6)$ dans la direction $\vec{v} = [-1 \ 2 \ -1]^T$. Le rayon est intercepté par un miroir contenu dans le plan π d'équation cartésienne $2x_2 - x_3 = 8$.
- a) Déterminer les coordonnées du point d'impact I du rayon sur le miroir.
 b) Déterminer l'angle d'impact φ entre le rayon et le miroir.
 c) Déterminer la direction $\vec{v}'$ dans laquelle est réfléchi le rayon.

Remarque. Si le point P est tel que $\overrightarrow{IP} = \vec{v}$ alors $\vec{v}' = \overrightarrow{IP'}$ où le point P' est le symétrique de P par rapport au plan π .

- 2.83** Déterminer l'intersection des cercles d'équations respectives

$$\Gamma_1 : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10 \quad \text{et} \quad \Gamma_2 : (x - 4)^2 + y^2 = 4.$$

2.6 Solutions d'exercices choisis

- 2.1** $\triangleright \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ $\triangleright \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$
 $\triangleright \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ $\triangleright \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OA} = -\vec{a}$
- 2.2** $\triangleright \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AS} = \vec{w} - \vec{u}$ $\triangleright \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{u} - \vec{v}$
 $\triangleright \overrightarrow{DS} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AS} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AS} = \vec{w} - \vec{v}$ $\triangleright \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -\vec{u} - \vec{v} = -(\vec{u} + \vec{v})$
- 2.3** a) $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$, b) $\vec{b} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$, c) $\vec{c} = \vec{0}$, d) $\vec{d} = \overrightarrow{DC}$
- 2.4** $\vec{x} = 4\vec{a} + 5\vec{b}$
- 2.5** $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$
- 2.6** a) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ b) $G(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3})$ c) $G(3, 1)$
- 2.7** $\vec{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$
- 2.8** Par définition, le vecteur nul $\vec{e}$ est colinéaire à tous les vecteurs. Sinon, les paires de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{d}$, $\vec{b}$ et $\vec{h}$, $\vec{c}$ et $\vec{g}$ sont colinéaires.
- 2.9** a) Non b) Oui
- 2.11** a) $C(1, 1)$ b) $C(6, 3, 4)$
- 2.12** a) 5 b) $\sqrt{77}$ c) $6\sqrt{3}$
- 2.13** Il existe 2 vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{a}$: $\vec{e}_1 = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \frac{1}{7}\vec{a}$ et son opposé $\vec{e}_2 = -\frac{1}{7}\vec{a}$.
- 2.14** $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$
- 2.15** Il faut ajouter $-\frac{1}{8}\vec{v}$ à $\vec{a}$.
- 2.16** a) $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 1,05 \text{ rad} \approx 60,26^\circ$ b) $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 1,64 \text{ rad} \approx 94,1^\circ$
- 2.17** $\cos(\theta) = -1/6$
- 2.20** $\alpha = \pi/2$, $\beta = \arccos(1/\sqrt{5})$ et $\gamma = \arccos(2/\sqrt{5})$
- 2.21** a) $\vec{a}_{\vec{b}} = 3\vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\|\vec{a}_{\vec{b}}\| = 9$ b) $\vec{a}_{\vec{b}} = -\frac{23}{19}\vec{b} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 69 \\ -115 \\ -46 \end{bmatrix}$ et $\|\vec{a}_{\vec{b}}\| = \frac{23\sqrt{38}}{19}$
- 2.22** $\vec{u} = \frac{13}{2}\vec{v} = \begin{bmatrix} 26 \\ 32,5 \end{bmatrix}$
- 2.23** $\vec{u} = \frac{13}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/8 \\ -13/4 \end{bmatrix}$
- 2.24** a) $\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{bmatrix} -12 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$ d) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = 44$
 b) $\vec{a} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{0} = 0$ e) $\vec{a} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{b}) = -\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = -44$
 c) $(2\vec{b}) \wedge (-3\vec{a}) = 6(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \begin{bmatrix} -72 \\ -24 \\ 48 \end{bmatrix}$ f) $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge (\vec{a} - \vec{b}) = -2(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ -16 \end{bmatrix}$

- b) On élimine le paramètre en effectuant une combinaison des deux équations (méthode recommandée) ou à l'aide d'une substitution. En soustrayant 3 fois la deuxième équation au double de la première on obtient : $(d_2) : 2x_1 - 3x_2 = -11$.
- c) Plusieurs approches sont possibles pour obtenir une représentation paramétrique de la droite d_3 . La plus simple est peut-être de chercher une solution de l'équation (autrement dit un point de la droite), par exemple $x = 7/2$ et $y = 0$, et un vecteur directeur. Pour cela on part du vecteur normal $\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ donné par les coefficients de x et y , on permute ses deux composantes et on change le signe de l'une pour obtenir le vecteur directeur $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix}^T$ et finalement les équations paramétriques

$$(d_3) : \begin{cases} x = 7/2 + 3\lambda \\ y = -2\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On peut aussi chercher deux solutions particulières de l'équation cartésienne, par exemple $A(2, 1)$ et $B(-1, 3)$ et calculer ensuite les équations paramétriques de la droite passant par ces deux points pour obtenir

$$(d_3) : \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalement, la méthode générale pour obtenir une représentation paramétrique de l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires consiste à résoudre le système à l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan. Bien qu'un peu lourde pour résoudre une seule équation à deux inconnues, l'approche marche parfaitement : en isolant x on obtient l'équation $x = 7/2 - 3y/2$ ce qui correspond à la solution particulière $(7/2, 0)$ et à la solution homogène $(-3/2, 1)$. Si on multiplie cette dernière par 2 (tout multiple d'une solution homogène est encore une solution homogène) on obtient une représentation paramétrique quasi identiques à la première proposée (au signe près de la solution homogène).

- d) Pour obtenir l'intersection à le premier axe de coordonnées (l'axe Ox des abscisses), on impose $y = 0$ ce qui fixe la valeur du paramètre : $\lambda = 2/3$. On calcule ensuite la valeur de x : $x = 3 + 2/3 = 11/3$, d'où la première intersection en $(11/3, 0)$.

En fixant x à zéro on obtient $\lambda = -3$ puis $y = 2 + 9 = 11$ et l'intersection entre d_4 et l'axe Oy se situe en $(0, 11)$.

2.32 a) $(\Delta) : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -12 \\ 5 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ b) $(\Delta) : 5x_1 + 12x_2 = 37$

———— Solutions détaillées ————

- a) En prenant $A(5, 1)$ comme point particulier et

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{v} = \begin{bmatrix} -12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

comme vecteur directeur, les équation paramétriques de la droite Δ passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$ sont

$$(\Delta) : \begin{cases} x_1 = 5 - 12\lambda \\ x_2 = 1 + 5\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- b) On élimine le paramètre en multipliant la première équation par 5 et en additionnant 12 fois la seconde à ce résultat pour obtenir

$$5x_1 + 12x_2 = 5(5 - 12\lambda) + 12(1 + 5\lambda) = 25 + 12 = 37$$

d'où l'équation cartésienne $(\Delta) : 5x_1 + 12x_2 = 37$.

- 2.33** a) sécantes e) sécantes
 b) parallèles (non confondues) f) perpendiculaires
 c) sécantes g) parallèles (non confondues)
 d) confondues h) parallèles (non confondues)

2.34 Elles sont parallèles et distinctes.

2.35 $\theta = \arccos\left(\frac{31}{\sqrt{986}}\right) \approx 0,16 \text{ rad} \approx 9,16^\circ$

2.36 $\delta = \left\| \overrightarrow{AP_{\vec{n}}} \right\| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|7 \cdot 2 + 3 \cdot 5|}{\sqrt{25 + 4}} = \sqrt{29} \text{ avec } \vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \perp \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

2.37 $\delta = \frac{|5 \cdot 4 - 12 \cdot 6 + 13|}{\sqrt{25 + 144}} = 3$

2.38 $\delta = \frac{|12 - 20|}{\sqrt{9 + 16}} = 8/5$

2.39 Les deux droites à distance 3 de d sont $(d_1) : 4x - 3y = 23$ et $(d_2) : 4x - 3y = -7$.

2.40 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

2.41 $(d_1) : 8x_1 - 15x_2 + 10 = 0$ et $(d_2) : 8x_1 - 15x_2 + 112 = 0$

2.42 $(t) : 4x - 3y + 16 = 0$

2.43 $P'(-4, 0)$

2.44 $(\Gamma) : (x - 9)^2 + (y - 3)^2 = 26$

2.45 $(\Gamma) : (x + 1)^2 + (x - 2)^2 = 8$

2.46 $(b_1) : x + 5y = 14$ et $(b_2) : 5x - y = 18$

2.47 $(b_1) : (4 - 2\sqrt{5})x + (7 - 3\sqrt{5})y = 23 + 16\sqrt{5}$ et
 $(b_2) : (4 + 2\sqrt{5})x + (7 + 3\sqrt{5})y = 23 - 16\sqrt{5}$

2.48 a) $(\Delta) : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ b) Non
 c) Oui, en $(0, 19/5, 0)$
 d) Oui, en $(19/2, 0, 19/4)$

2.49 $(\pi) : 4x_1 - 2x_2 - x_3 + 3 = 0$

2.50 $(\pi) : x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$

2.51 $(\pi) : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2.52 $(\pi) : 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 8$ et $(\pi) : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2.53 La droite d et le plan π sont parallèles si et seulement si les vecteurs directeurs de d et les vecteurs normaux de π sont orthogonaux. On vérifie facilement que le produit scalaire entre le vecteur $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$, directeur pour d , et le vecteur $\vec{n} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -5 \end{bmatrix}^T$, normal pour π , est bien nul.

2.54 a) $3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 29$ b) $2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1$ c) $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9$

2.55 $(d_1) : \begin{cases} 5x - 4y = -2 \\ 3x + 4z = 2 \end{cases}$ et $(d_2) : \begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ y + z = 5 \end{cases}$

2.56 a) 2

b) $8/7$

c) Les deux plans n'étant pas parallèles, la distance les séparant n'est pas définie.

2.57 $\varphi = \arccos\left(\frac{3}{2\sqrt{21}}\right) \approx 1,24 \text{ rad} \approx 70,89^\circ$

2.58 a) $\varphi = \arccos\left(\frac{3}{2\sqrt{21}}\right) \approx 1,24 \text{ rad} \approx 70,89^\circ$

b) $(d) : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ -7 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

c) $(\pi) : x + 2y - 3z = 3$

2.59 $\delta = \sqrt{3/2}$

2.60 $(\pi) : x + y - 2z = 6$

2.61 $Q\left(\frac{19}{3}, \frac{14}{3}, \frac{17}{3}\right)$

2.62 $\delta = 25\sqrt{\frac{3}{278}} \approx 2,597$

2.63 a) $(d) : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

b) $\varphi = \arccos\left(\sqrt{\frac{3}{11}}\right) \approx 1,02 \text{ rad} \approx 58,52^\circ$

c) $(\pi) : y - z + 1 = 0$

- 2.64** a) $\pi : 8x + 24y + 6z = 169$ b) $t : \begin{cases} x = 169/8 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$
- 2.65** a) $(\Gamma) : (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 100$ b) $C'(5, 1, 6)$ et $r' = 8$
- 2.66** $(\sigma_1) : 7x - y + z = 9$ et $(\sigma_2) : x + 2y - 5z = -9$

- 2.67** Le système est clairement inconsistant (il suffit de considérer la 2^e et la 3^e équation). On établit les équations normales. La matrice du système est

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Le membre de droite est

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \vec{b} \iff \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 = -2 \\ x_2 = 3/4 - x_1 \end{cases}$$

La meilleure approximation, au sens des moindres carrés, de la solution du système linéaire donné est $x_1 = -1$ et $x_2 = 7/4$.

- 2.68** Le système est clairement inconsistant (il suffit de considérer la 1^{re} et la 3^e équation). On établit les équations normales :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 8 & 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 36 \\ 2 & 9 & 13 & 36 \\ 0 & 36 & 36 & 144 \end{bmatrix}$$

et

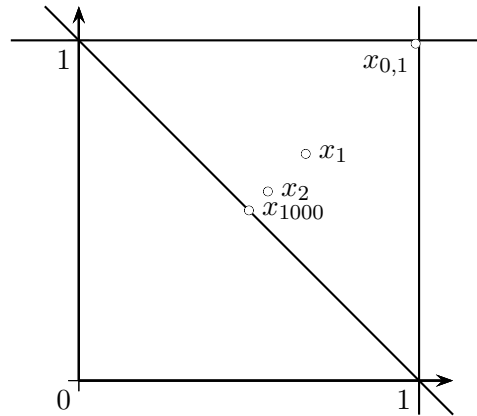
$$\mathbf{A}^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 8 & 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 16 \\ 48 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ n'est pas inversible (sa 4^e ligne est égale au quadruple de sa 2^e). Les équations normales possèdent une infinité de solutions qu'on obtient en appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan.

Après calcul on obtient que l'ensemble S de toutes les solutions, au sens des moindres carrés, du système $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ est

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2.69 \quad \text{a) } \vec{x}_\alpha = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{b)}$$



$$2.70 \quad x_1 = 0, x_2 = \frac{121}{57} \approx 2,12281$$

2.71 Le système inconsistant à résoudre est

$$\begin{cases} x_1 & = & 3 \\ x_1/\sqrt{5} - 2x_2/\sqrt{5} & = & -2/\sqrt{5} \\ x_2 & = & 4 \\ x_1/\sqrt{2} + x_2/\sqrt{2} & = & 2\sqrt{2} \end{cases}$$

et sa solution, au sens des moindres carrés, est $\vec{x} = \frac{1}{13} [33 \ 37]^T$.

La position du voilier minimisant la somme des carrés des distances aux droites de visée est donc le point X de coordonnées $\frac{1}{13} (33; 37) \approx (2,5; 2,8)$.

$$2.72 \quad \alpha = 41/10, \beta = 187/2$$

$$2.74 \quad y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{7}{3}$$

$$\begin{aligned} 2.76 \quad (\vec{a} + m\vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b}) &\iff (\vec{a} + m\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \\ &\iff \vec{a} \cdot \vec{a} + (m-1)(\vec{a} \cdot \vec{b}) - m(\vec{b} \cdot \vec{b}) = 0 \\ &\iff \|\vec{a}\|^2 + (m-1)(\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))) - m\|\vec{b}\|^2 = 0 \\ &\iff 3^2 + (m-1) \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} - m \cdot 4^2 = 0 \\ &\iff 9 + 6(m-1) - 16m = 0 \iff 10m = 3 \iff m = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

2.77 En projetant orthogonalement le vecteur $\overrightarrow{BA}$ sur le vecteur $\overrightarrow{BC}$ on obtient la décomposition $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}_{\parallel} + \overrightarrow{BA}_{\perp}$ et la hauteur h cherchée est simplement égale à la norme de $\overrightarrow{BA}_{\perp}$:

$$\overrightarrow{BA}_{\parallel} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad h = \|\overrightarrow{BA}_{\perp}\| = \|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA}_{\parallel}\| = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\| = 7.$$

- 2.78** Les équations cartésiennes des deux droites passant par $A(1, 1)$ et à distance 3 de $B(-5, 4)$ sont $y = 1$ et $4x + 3y = 7$.

_____ Solution détaillée _____

Les deux droites cherchées ne sont rien d'autres que les tangentes, passant par A , au cercle de rayon 3 centré en B .

La distance horizontale entre A et B étant égale à 6, aucune de ces tangentes n'est verticale. On peut donc chercher des tangentes d'équation cartésienne de la forme

$$y = mx + h \quad \Longleftrightarrow \quad mx - y + h = 0.$$

Comme le point $A(1, 1)$ appartient aux tangentes on obtient une première condition sur m et h :

$$m - 1 + h = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h = 1 - m.$$

La distance δ entre la tangente et le centre $B(-5, 4)$ du cercle est

$$\delta = \frac{|m \cdot (-5) - 1 \cdot 4 + h|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

et le carré de cette distance est égal au carré du rayon du cercle, c.-à-d. à 9, si

$$\frac{(-5m + h - 4)^2}{m^2 + 1} = 9.$$

En remplaçant h par $1 - m$ l'équation devient

$$\begin{aligned} \frac{(-5m + (1 - m) - 4)^2}{m^2 + 1} = 9 & \Longleftrightarrow (-6m - 3)^2 = 9(m^2 + 1) \\ & \Longleftrightarrow 36m^2 + 36m + 9 = 9m^2 + 9 \\ & \Longleftrightarrow 27m^2 + 36m = 0 \\ & \Longleftrightarrow m(3m + 4) = 0. \end{aligned}$$

Les équations cartésiennes des deux tangentes sont donc $y = 1$ et $y = -\frac{4}{3}x + (1 + \frac{4}{3})$, cette dernière équation s'écrivant aussi $3y = -4x + 7$ ou encore $4x + 3y = 7$.

- 2.79** a) $(e) : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (e) : 3x - 4y = 7$

b) $B(1, -1)$

c) $(f) : 3x - 4y = 22$ et $(g) : 3x - 4y = -8$

d) $P'(18/5, -14/5)$

- 2.80** $C \in \delta_1 \cup \delta_2$ avec $(\delta_1) : 2x + y = 7$ et $(\delta_2) : 2x + y = -1$

- 2.81** $C_1(4, 5)$ et $C_2(-8, 1)$

- 2.82** a) $I(8, 6, 4)$

b) Si $\vec{n}$ est un vecteur normal de π , $\sin(\varphi) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{n}\|} = \sqrt{\frac{5}{6}}$ et $\varphi = \arcsin(\sqrt{\frac{5}{6}}) \approx 1,15 \text{ rad} \approx 65,9^\circ$

$$\begin{aligned} \text{c) } \vec{v}' &= \overrightarrow{IP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{IP_n} - \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OI} + \vec{v} - 2\vec{v_n} - \overrightarrow{OI} \\ &= \vec{v} - 2\frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

- 2.83** Les deux cercles s'intersectent en $(2, 0)$ et en $(4, 2)$.

