

Mathématiques 2

Chap. 1 : Calcul intégral

Jean-François Hêche

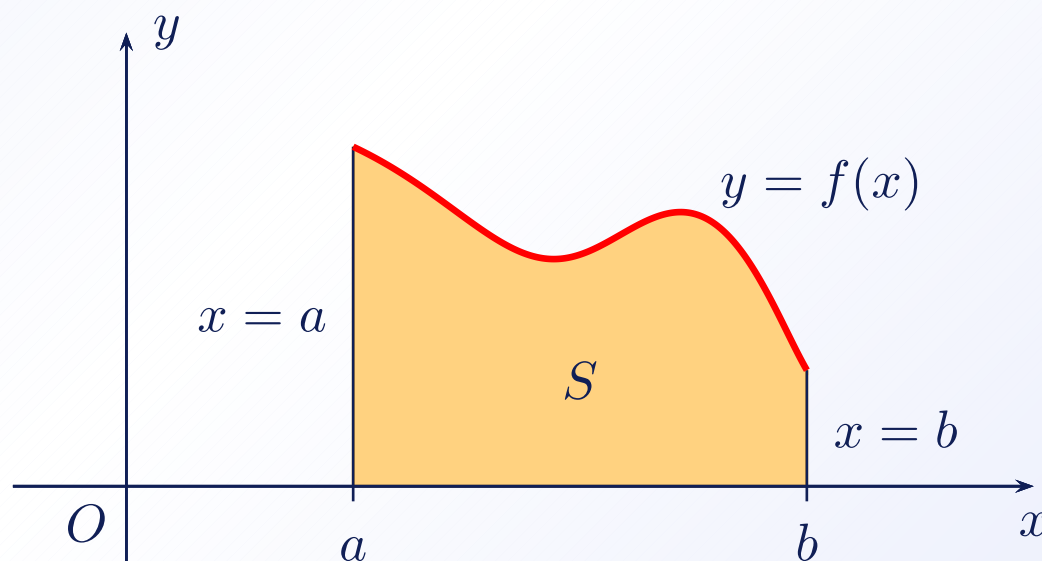
Printemps 2025

1.1 Intégrales définies et sommes de Riemann



Le problème de l'aire sous le graphe d'une fonction

- On considère une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive ou nulle dans un intervalle réel $[a, b]$ non vide.
- On cherche à calculer l'aire S de la surface comprise entre l'axe Ox des abscisses, le graphe représentatif de la fonction $f(x)$ et les verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.



- On construit une **subdivision** de l'intervalle $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

c'est-à-dire un découpage de l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles $[x_{k-1}, x_k]$ de largeurs respectives $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ pour $k = 1, \dots, n$.

- Le **pas** Δx de cette subdivision est égal à la largeur du plus grand sous-intervalle :

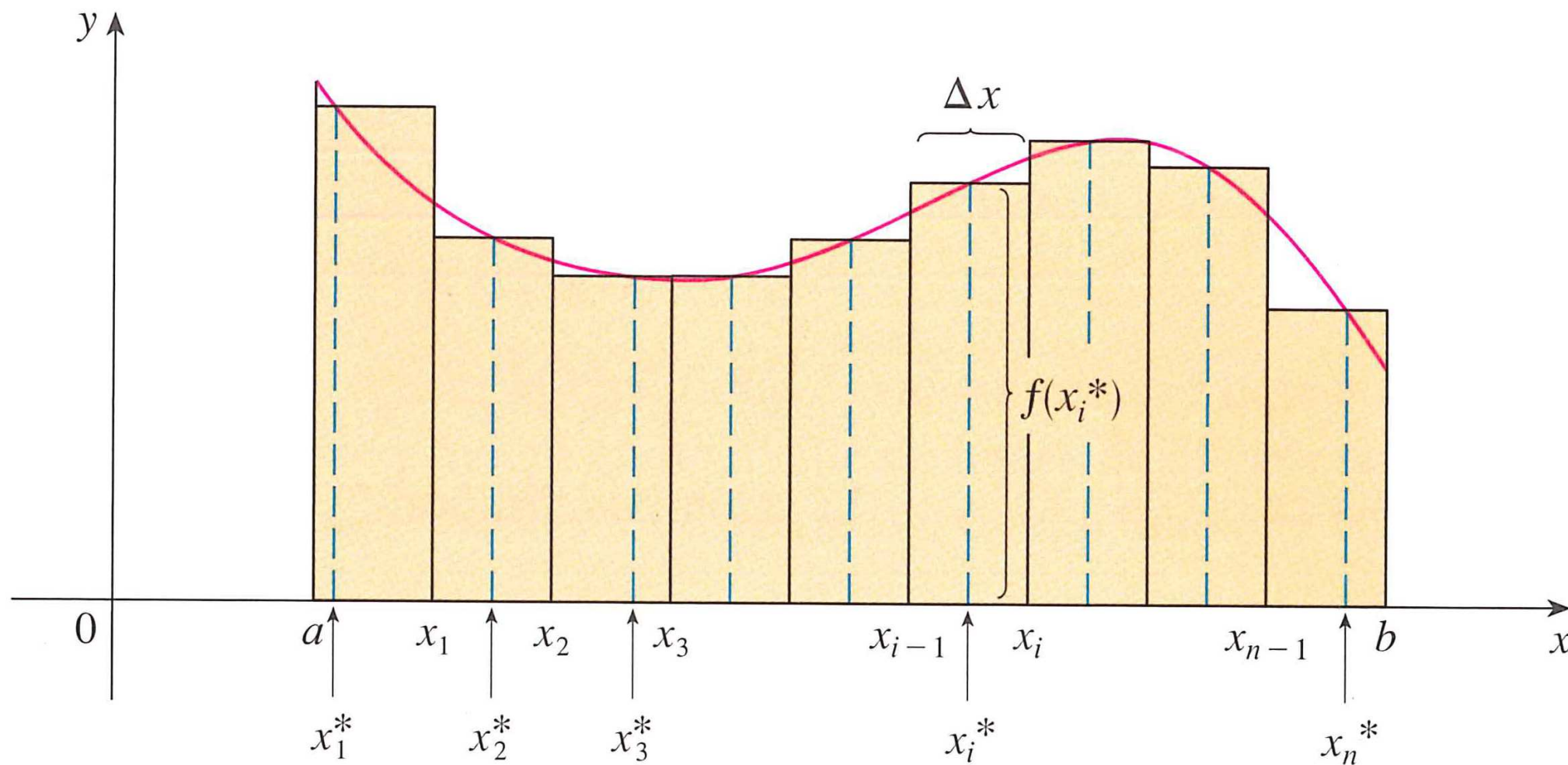
$$\Delta x = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k.$$

- On choisit un point x_k^* dans chaque sous-intervalle : $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$.
- On approche l'aire S par la somme des aires des rectangles de base $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ et de hauteur $f(x_k^*)$:

$$S \approx \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k.$$

Cette somme est appelée une **somme de Riemann**.

Illustration graphique



- Pour obtenir la valeur de l'aire S , on passe à la limite lorsque le pas Δx tend vers 0 (le nombre n de sous-intervalles tendant alors vers $+\infty$) :

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k.$$

- La limite précédente est appelée l'**intégrale définie de la fonction f entre a et b** et est notée

$$\int_a^b f(x) dx.$$

- L'intervalle $[a, b]$ est appelé l'**intervalle d'intégration**.



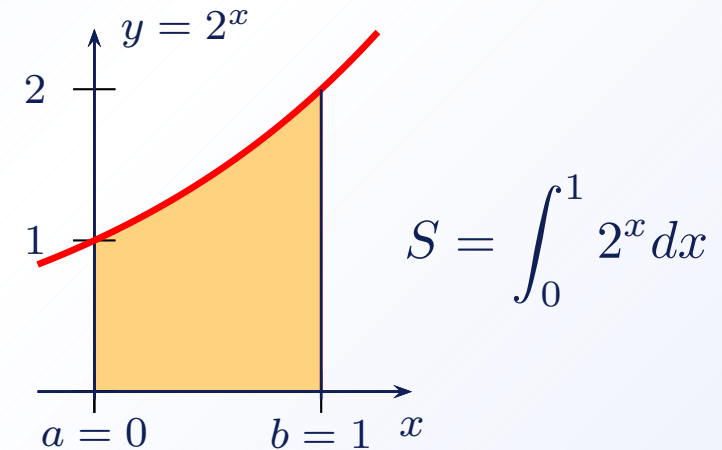
Georg Friedrich Bernhard Riemann
(1826 - 1866)

Exemple

- On cherche à calculer la valeur de l'intégrale définie

$$S = \int_0^1 2^x dx$$

correspondant à l'aire sous le graphe de l'exponentielle d'équation $y = f(x) = 2^x$ dans l'intervalle $[0, 1]$.



- On choisit une subdivision **régulière** de l'intervalle $[0, 1]$ en n sous-intervalles. On a alors

$$x_k = \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

et, quel que soit k ,

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n} = \Delta x.$$

- Dans chaque sous-intervalle on choisit la borne inférieure comme point d'évaluation :

$$x_k^* = x_{k-1} = \frac{k-1}{n}.$$

Exemple (2)

- La somme de Riemann correspondant aux choix précédents est

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k-1}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(2^{\frac{1}{n}}\right)^{k-1}$$

- Pour obtenir S il reste à calculer la limite de la somme précédente lorsque $\Delta x = 1/n$ tend vers 0, c.-à-d. lorsque n tend vers $+\infty$:

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(2^{\frac{1}{n}}\right)^{k-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(2^{\frac{1}{n}}\right)^k$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \left(2^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - 2^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^{\frac{1}{n}} - 1}$$

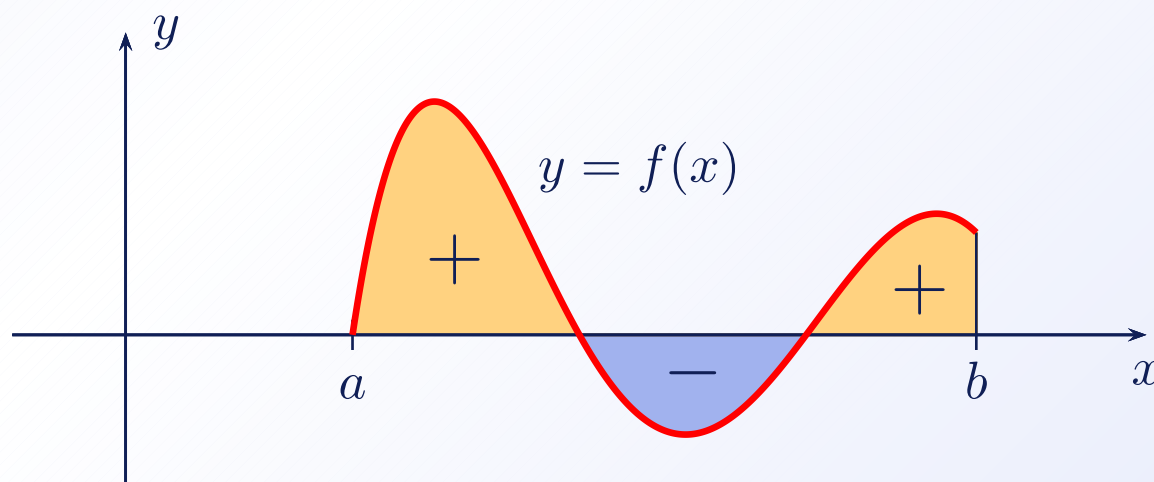
$$\stackrel{h=1/n}{=} \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{h}{2^h - 1} \stackrel{\text{B.-H.}}{=} \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{1}{\ln(2) 2^h} = \frac{1}{\ln(2)} \approx 1,4427.$$

Fonctions intégrables et règles des signes

- Toute fonction f continue entre a et b est intégrable (au sens de Riemann) entre a et b et la valeur de cette intégrale est un nombre réel.

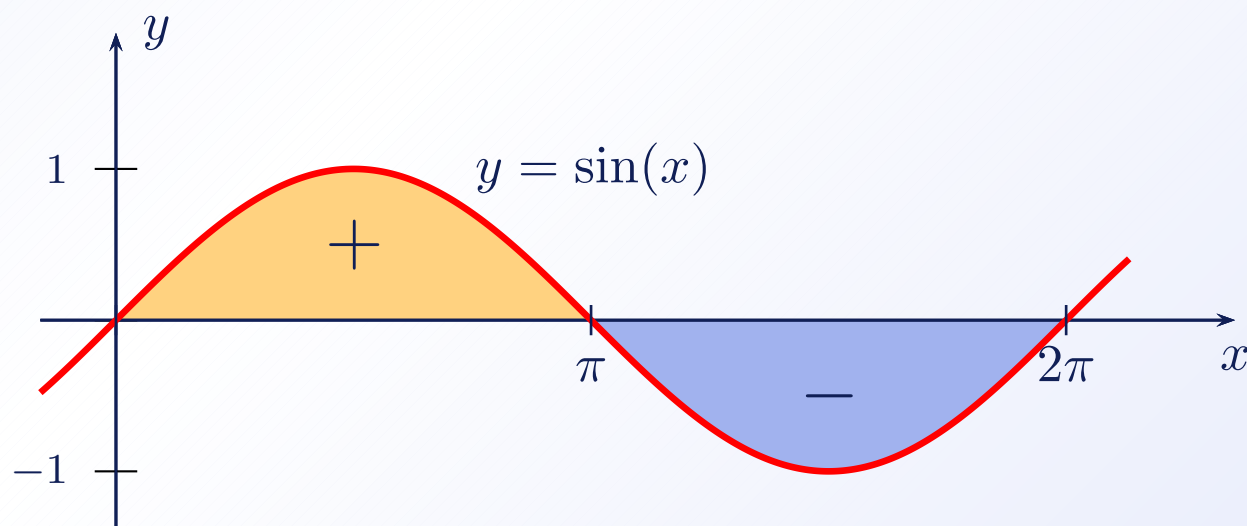
De plus, ce nombre est toujours bien défini (c.-à-d. unique) car on peut montrer que la limite des sommes de Riemann ne dépend pas du choix des subdivisions ni de celui des points x_k^* .

- En particulier, la définition de l'intégrale définie à l'aide de sommes de Riemann n'est pas limitée aux seules fonctions non négatives mais s'applique également aux fonctions de signe quelconque, l'aire étant mesurée positivement là où f prend des valeurs positives et négativement là où f prend des valeurs négatives.



- Une conséquence de cette « règle des signes » est qu'il est possible d'avoir une intégrale nulle même si $f(x)$ n'est pas nulle.
- EXEMPLE. C'est le cas de l'intégrale de la fonction $f(x) = \sin(x)$ entre 0 et 2π :

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0.$$



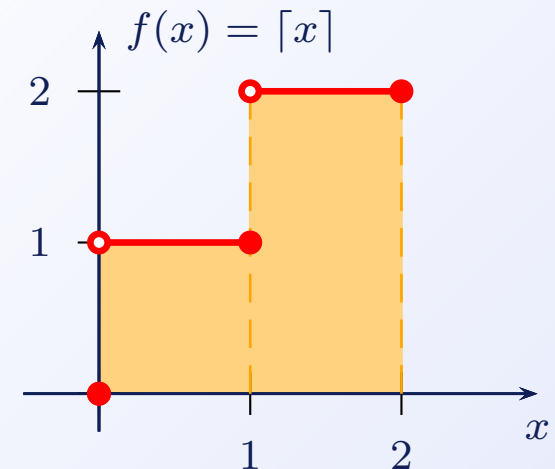
Intégrale d'une fonction discontinue

- La notion d'intégrale définie peut également être généralisée à de nombreuses **fonctions non continues** (mais pas toutes).
- En particulier l'intégrale définie existe si la fonction f est **bornée** et présente un **nombre fini de points de discontinuité** dans l'intervalle $[a, b]$.

Il suffit dans un tel cas de calculer l'aire sous le graphe de f pour chaque morceau et de sommer le tout.

- EXEMPLE. Pour la fonction partie entière supérieure, on a

$$\begin{aligned}\int_0^2 [x] dx &= \int_0^1 1 dx + \int_1^2 2 dx \\ &= 1 + 2 = 3.\end{aligned}$$



- Dans certains cas il est même possible d'intégrer une fonction f entre a et b lorsqu'elle présente des asymptotes verticales dans l'intervalle $[a, b]$ ou lorsque a tend vers $-\infty$ ou b vers $+\infty$ (on parle alors d'**intégrales impropres** ou **généralisées**).

- Si on inverse les bornes d'intégration a et b , la valeur de l'intégrale change de signe (car cela revient à changer le signe de tous les Δx_k) :

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

quels que soient les nombres a et b .

- En généralisant la propriété précédente on obtient la **relation de Chasles** pour les intégrales définies :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

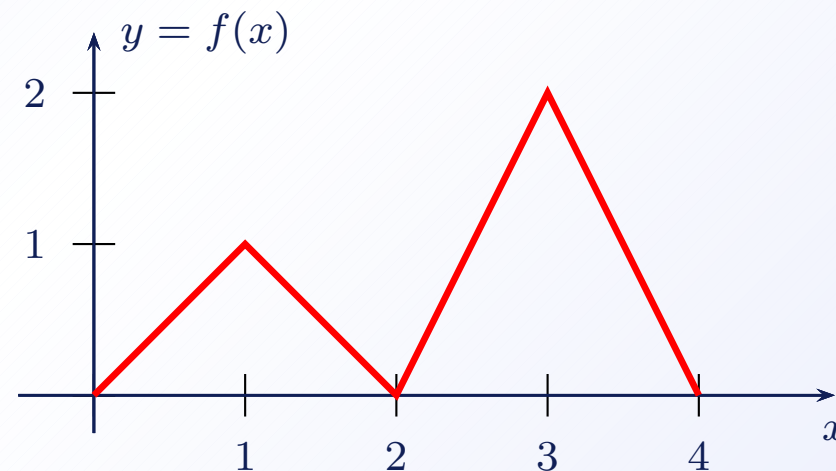
quels que soient les nombres a , b et c et quel que soit leur ordre.

Exemple

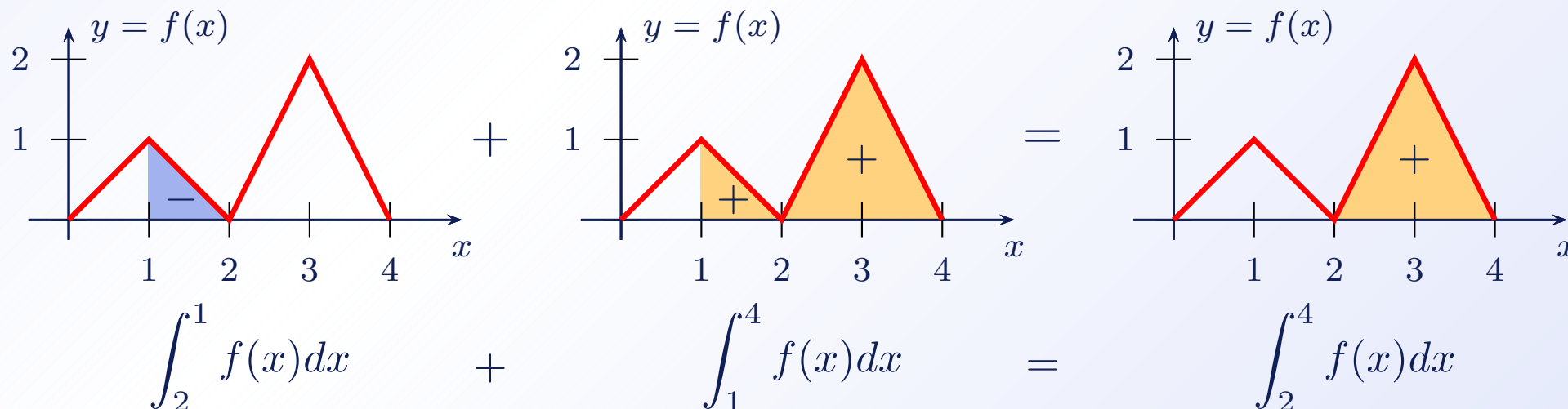
■ On considère la fonction $y = f(x)$ dont le graphe est esquisé ci-contre.

■ En utilisant la relation de Chasles on a

$$\begin{aligned}\int_2^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx &= \int_2^4 f(x)dx \\ &= \frac{(4-2) \cdot 2}{2} = 2\end{aligned}$$



■ Géométriquement on a



- L'intégration est une **opération linéaire** :

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

et

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Conséquence directe de la linéarité :

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

Exemple

- L'aire de la surface bornée délimitée par les graphes représentatifs des fonctions $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$ est égale à la valeur de l'intégrale

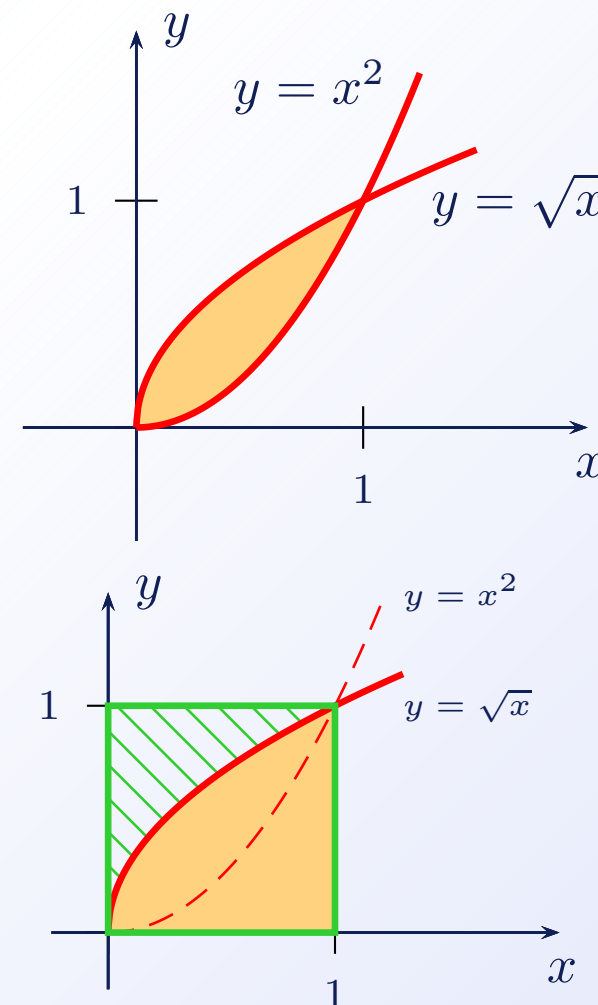
$$\begin{aligned}\int_0^1 (f(x) - g(x)) dx &= \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx.\end{aligned}$$

- Géométriquement on a $\int_0^1 \sqrt{x} dx = 1 - \int_0^1 x^2 dx$.

- On montrera en exercices que $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

- On obtient alors

$$\int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = 1 - 2 \int_0^1 x^2 dx = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$



- Si f et g sont deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a, b]$ et telles que

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

- En particulier si f est intégrable et positive (respectivement négative) sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx \text{ est positive (respectivement négative).}$$

- Dans le même registre, si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x dans $[a, b]$ alors

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

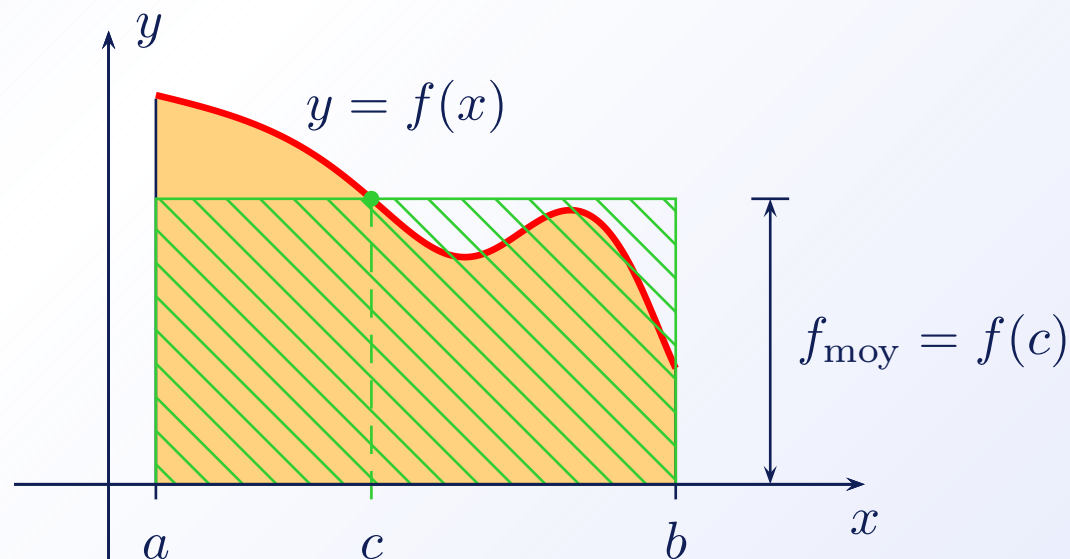
Théorème de la moyenne

- Si f est une fonction **continue** sur $[a, b]$ alors il existe un nombre $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c)$$

ou, exprimé autrement, tel que

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx$$



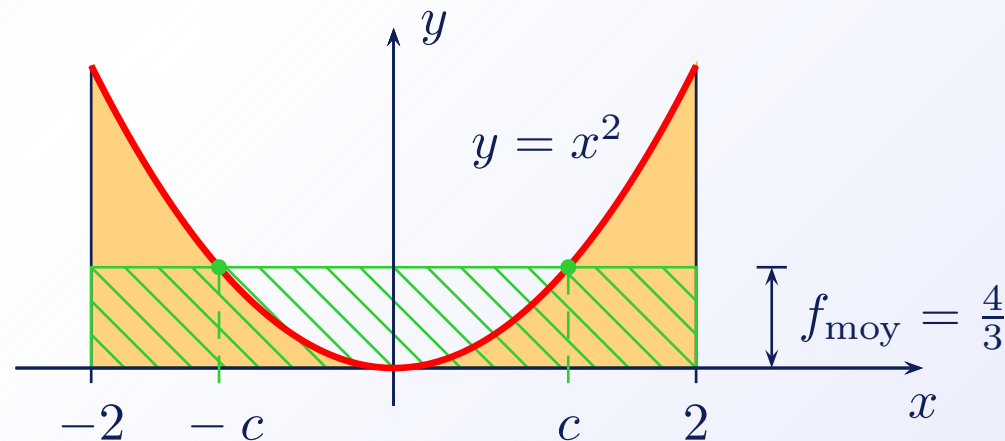
- La valeur $f(c)$ est appelée la **valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$.

Exemple

- On a montré en exercices que, pour tout nombre $b \geq 0$, on a $\int_{-b}^b x^2 dx = \frac{2b^3}{3}$.
- Pour $b = 2$ on obtient $\int_{-2}^2 x^2 dx = \frac{16}{3}$ et la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[-2, 2]$ est

$$f_{\text{moy}} = \frac{\int_{-2}^2 x^2 dx}{4} = \frac{\frac{16}{3}}{4} = \frac{4}{3}.$$

Il existe deux valeurs de c dans $[-2, 2]$ telles que $f(c) = f_{\text{moy}} : c = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$.



1.2 Primitives et intégrales indéfinies



- Soit f une fonction réelle définie dans un intervalle réel I et continue dans cet intervalle, toute fonction F dérivable sur I et dont la dérivée sur I est égale à f est appelée une **primitive** de f sur I .

Autrement dit, **$F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur I** si, et seulement si,

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

■ EXEMPLES.

- La fonction $F(x) = \sin(x)$ est une primitive de la fonction $f(x) = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ car

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x) = f(x) \quad \text{quel que soit } x \in \mathbb{R}.$$

- La fonction $F(x) = 3x^2 - 1$ est une primitive de $f(x) = 6x$ sur $\mathbb{R}$ car

$$F'(x) = (3x^2 - 1)' = 6x = f(x) \quad \text{quel que soit } x \in \mathbb{R}.$$

- La dérivée d'une (fonction) constante étant nulle, si une fonction f possède une primitive F sur I alors on en obtient une infinité d'autres en additionnant n'importe quelle (fonction) constante C à F :

Si F est une primitive de f sur I alors $F + C$ est également une primitive de f sur I , quelle que soit la constante $C \in \mathbb{R}$.

- Réciproquement, si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I alors $F_1 - F_2$ est une (fonction) constante car

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{quel que soit } x \in I$$

et les seules fonctions dont la dérivée est nulle sur tout un intervalle sont les fonctions constantes.

- Ainsi, **dès qu'une fonction admet une primitive sur I , elle en admet une infinité, toutes égales à une constante additive près.**

- Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur I , nous venons de voir que toutes les primitives de $f(x)$ sur I sont de la forme

$$F(x) + C$$

où C est une constante réelle quelconque, appelée **constante d'intégration**.

- La famille de toutes ces fonctions est appelée l'**intégrale indéfinie** de f et est notée

$$\int f(x)dx.$$

On a donc

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

où $F(x)$ est une primitive (quelconque) de $f(x)$ sur I .

- Pour déterminer l'intégrale indéfinie de la fonction $f(x) = x^2$ on commence par trouver une primitive de f .
 - ▶ La dérivée de $g(x) = x^3$ est $g'(x) = 3x^2$ qui est presque la fonction f .
 - ▶ La dérivée de $h(x) = \frac{x^3}{3}$ est $h'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x)$.
 - ▶ La fonction $h(x) = \frac{x^3}{3}$ est donc une primitive de $f(x)$ (sur $\mathbb{R}$ tout entier).
 - ▶ Pour obtenir l'intégrale indéfinie de $f(x) = x^2$ il suffit d'ajouter la constante d'intégration à cette primitive. On obtient alors

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- Le passage d'une fonction à son intégrale indéfinie est appelée **intégration** et est l'**opération réciproque de la dérivation**.

En anglais, les primitives et les intégrales indéfinies sont d'ailleurs appelées « antidérivées » (*antiderivatives*).

- L'intégration (la recherche d'une primitive) est une opération nettement plus délicate que la dérivation et requiert un peu de doigté, pas mal d'entraînement ainsi que la connaissance de plusieurs techniques d'intégration.
- De plus, même pour des fonctions continues et « plutôt simples », il n'est pas toujours possible d'exprimer explicitement une primitive.

Tel est le cas, par exemple, pour les intégrales indéfinies

$$\int e^{x^2} dx \quad \text{ou} \quad \int \sin(x^2) dx$$

pour lesquelles il n'existe aucune formule élémentaire.

Propriétés de base des primitives et des intégrales indéfinies

- Tout comme la dérivation, l'intégration est une **opération linéaire** :

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

et

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$$

quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- L'intégration étant une « antidérivation », on a pour toute fonction f dérivable

$$\int f'(x) dx = f(x) + C$$

$C \in \mathbb{R}$.

■ Pour la fonction $f(x) = x^2 - \cos(2x)$ on a, en utilisant la linéarité de l'intégration,

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int (x^2 - \cos(2x)) dx \\&= \int x^2 dx - \int \cos(2x) dx \\&= \frac{1}{3} \int 3x^2 dx - \frac{1}{2} \int 2 \cos(2x) dx \\&= \frac{1}{3} \int (x^3)' dx - \frac{1}{2} \int (\sin(2x))' dx \\&= \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} \sin(2x) + C, \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Recherche de primitives : Identification d'une dérivée élémentaire

- La recherche d'une primitive est un problème central pour le calcul des intégrales définies mais c'est une opération bien plus délicate et difficile que la dérivation.
- Dans les cas les plus simples (mais néanmoins fréquents) il est possible d'effectuer une intégration immédiate **en reconnaissant la fonction à intégrer comme la dérivée d'une fonction connue** et en utilisant la propriété

$$\int f'(x)dx = f(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- **Évidemment cela nécessite de bien connaître les dérivées des fonctions élémentaires !**
- EXEMPLE.

$$\int (1 + \tan^2(x))dx = \int (\tan(x))'dx = \tan(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Identification de la dérivée d'une fonction élémentaire (2)

- Parfois (et même assez souvent), il faut mettre en évidence ou amplifier par la bonne constante afin de faire apparaître une dérivée connue.

► EXEMPLE.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int (\sqrt{x})' dx = 2\sqrt{x} + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

- Parfois, il faut reformuler l'expression à intégrer pour faire apparaître une dérivée connue.

► EXEMPLE.

$$\int \tan^2(x) dx = \int (1 + \tan^2(x) - 1) dx = \int (1 + \tan^2(x)) dx - \int dx = \tan(x) - x + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Intégration des fonctions puissances

- Rappelons que pour tout entier n non nul, la dérivée de la fonction $f(x) = x^n$ est

$$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}, \quad \text{quel que soit } x \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{R}^* \text{ si } n < 0).$$

- Il n'est pas difficile d'établir à partir du résultat précédent que, pour tout entier $n \neq -1$, la fonction

$$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

est une primitive de $f(x) = x^n$ sur $\mathbb{R}$ (si $n \geq 0$) ou $\mathbb{R}^*$ (si $n < -1$).

- EXEMPLE. Pour le polynôme $P(x) = x^4 - 4x^3 + x$ on a

$$\begin{aligned} \int P(x)dx &= \int (x^4 - 4x^3 + x) dx = \int x^4 dx + \int -4x^3 dx + \int x dx \\ &= \frac{1}{5} \int 5x^4 dx - \int 4x^3 dx + \frac{1}{2} \int 2x dx = \frac{1}{5} \int (x^5)' dx - \int (x^4)' dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int (x^2)' dx = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Intégration des fonctions puissances (2)

- Le résultat précédent reste valable dans le cas où l'exposant a de la fonction puissance est un rationnel ou même un réel. Il est cependant nécessaire de restreindre le domaine de définition de la fonction à $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$ (sauf cas particuliers, par exemple pour $a = 1/3$).
- Ainsi, quel que soit l'exposant réel $a \neq -1$, la fonction

$$F(x) = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$$

est une primitive de $f(x) = x^a$ sur $\mathbb{R}_+$.

- EXEMPLES. Sur $\mathbb{R}_+^*$, une primitive de la fonction $f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x}} = x^{-\frac{1}{4}}$ est

$$F(x) = \frac{1}{-\frac{1}{4} + 1} x^{(-\frac{1}{4} + 1)} = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3}$$

alors que pour $g(t) = 2t^{\sqrt{3}}$ on a $\int g(t)dt = \int 2t^{\sqrt{3}}dt = \frac{2t^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

- La fonction $\ln$ (logarithme naturel) est définie pour tout réel strictement positif. Elle est également continue et même différentiable en tout point de son domaine de définition et on a

$$(\ln(x))' = \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{quel que soit } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

- Ainsi quel que soit l'intervalle fermé et borné I inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(x)$ est une primitive de $1/x$ sur I et on a alors

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

- Cependant, la fonction $\ln(-x)$ est, elle, définie pour tout réel strictement négatif et est continue et différentiable en tout point de son domaine de définition. De plus on a

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}, \quad \text{quel que soit } x \in \mathbb{R}_-^*.$$

- Quel que soit l'intervalle fermé et borné I inclus dans $\mathbb{R}_-^*$, $\ln(-x)$ est donc une primitive de $1/x$ sur I et on a alors

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

- Afin d'unifier les deux primitives précédentes il est fréquent d'utiliser une valeur absolue et d'écrire

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

- Lors du calcul d'une intégrale définie à l'aide de l'expression précédente, le signe de x (et plus généralement de l'argument du logarithme) sera connu et la valeur absolue pourra être supprimée ou remplacée par une multiplication par (-1) selon le cas.

Il faut bien garder à l'esprit que la fonction $1/x$ n'étant pas définie en 0, elle ne peut pas être intégrée sur un intervalle contenant cette valeur mais uniquement sur des intervalles fermés et bornés entièrement contenus dans $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.

Identification de la dérivée d'une fonction composée

- Rappelons que la dérivée de la composition de la fonction f par la fonction g est

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f' \quad \text{qui s'écrit aussi} \quad (g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x).$$

- En termes d'intégrales, cela correspond à la propriété

$$\int (g \circ f)'(x) dx = \int g'(f(x))f'(x) dx = (g \circ f)(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- EXEMPLE.

$$\int 2t \cos(t^2) dt = \int (\sin(t^2))' dt = \sin(t^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\blacksquare \int f(x)^a \cdot f'(x) dx = \frac{1}{a+1} \cdot f(x)^{a+1} + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq -1$$

$$\blacksquare \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int f(x)^{-1} f'(x) dx = \ln |f(x)| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare \int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare \int f'(x) \cdot \cos(f(x)) dx = \sin(f(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare \int f'(x) \cdot \sin(f(x)) dx = -\cos(f(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\blacksquare \int \frac{f'(x)}{1 + (f(x))^2} dx = \arctan(f(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Intégration d'une puissance de f fois f'

- Soit f une fonction continue et dérivable dans un intervalle $I = [a, b]$. La dérivée de f à la puissance a (quel que soit a réel) est $(f(x)^a)' = a f(x)^{a-1} \cdot f'(x)$.

En inversant le processus on obtient que

$$F(x) = \frac{1}{a+1} f(x)^{a+1} \text{ est une primitive de } f(x)^a \cdot f'(x) \text{ quel que soit } a \neq -1.$$

- EXEMPLE 1. On cherche à calculer l'intégrale indéfinie $\int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} dx$.

Si on pose $f(x) = \ln(x)$ on a $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $\frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} = (f(x))^{\frac{1}{2}} \cdot f'(x)$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} dx &= \frac{2}{3} \int \frac{3}{2} \cdot \frac{(\ln(x))^{\frac{1}{2}}}{x} dx \\ &= \frac{2}{3} (\ln(x))^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{\ln^3(x)} + C, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Intégration d'une puissance de f fois f' (2)

■ EXEMPLE 2. On cherche à calculer l'intégrale indéfinie $\int x(4 - 5x^2)^{14} dx$.

Si on pose $f(x) = 4 - 5x^2$ on a $f'(x) = -10x$ et

$$x(4 - 5x^2)^{14} = \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot (-10x)(4 - 5x^2)^{14} = \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot f'(x) \cdot f(x)^{14}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int x(4 - 5x^2)^{14} dx &= -\frac{1}{10} \int (-10x)(4 - 5x^2)^{14} dx = -\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{15} \cdot (4 - 5x^2)^{15} + C \\ &= -\frac{1}{150} \cdot (4 - 5x^2)^{15} + C, \end{aligned}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Intégration d'une puissance de f fois f' (3)

- Si $a = -1$, l'expression à intégrer est de la forme $f(x)^{-1} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ et avec un raisonnement similaire à celui utilisé pour intégrer $x^{-1} = \frac{1}{x}$ on obtient que

$$F(x) = \ln |f(x)| \text{ est une primitive de } \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

- EXEMPLE. On cherche à calculer l'intégrale indéfinie $\int \tan(t) dt$. On a $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ et en posant $f(t) = \cos(t)$ on a $f'(t) = -\sin(t)$. Ainsi

$$\tan(t) = -\frac{-\sin(t)}{\cos(t)} = -\frac{f'(t)}{f(t)}$$

et

$$\int \tan(t) dt = -\int \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} dt = -\ln |\cos(t)| + C, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

- Parfois il faut utiliser une identité pour « mettre en forme » l'expression à intégrer.

► EXEMPLE.

$$\begin{aligned}\int \sin^3(x) dx &= \int \sin(x)(1 - \cos^2(x)) dx = \int \sin(x) dx + \int -\sin(x) \cos^2(x) dx \\ &= \int (-\cos(x))' dx + \int \left(\frac{1}{3} \cos^3(x) \right)' dx = \frac{1}{3} \cos^3(x) - \cos(x) + C\end{aligned}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

- Ou utiliser d'autres « trucs et astuces » classiques.

► EXEMPLE.

$$\int \frac{x}{x-1} dx = \int \frac{x-1+1}{x-1} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = x + \ln|x-1| + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

Primitives de quelques fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$
c	cx
$x^a \quad (a \neq -1)$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln x $
e^x	e^x

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $
$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\arctan(x)$

Pour $a > 0$, on a $a = e^{\ln(a)}$ et la dérivée de a^x est $(a^x)' = \left(e^{\ln(a)x}\right)' = \ln(a)e^{\ln(a)x} = \ln(a)a^x$.

Ainsi, pour $a > 0$ et $\neq 1$, $\frac{a^x}{\ln(a)}$ est une primitive de a^x .

1.3 Théorème fondamental de l'analyse



Théorème fondamental de l'analyse

Théorème. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et x un point de cet intervalle, alors la fonction S définie sur $[a, b]$ par

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est **la** primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en a (la fonction S est donc continue et dérivable sur $[a, b]$ et sa dérivée est égale à f).

Dit autrement, si l'intégrale de Riemann d'une fonction continue f est dérivée par rapport à sa borne supérieure on obtient la valeur de f en cette borne :

$$S'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Une conséquence immédiate de ce théorème est que toute fonction continue sur $[a, b]$ admet une primitive sur $[a, b]$ (car toute fonction continue sur $[a, b]$ possède une intégrale définie sur l'intervalle $[a, x]$ quel que soit $x \in [a, b]$).

Corollaire. Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et F une primitive de f dans cet intervalle, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Le nombre $F(b) - F(a)$ est souvent noté $F(x) \Big|_a^b$ ou $\left[F(x) \right]_a^b$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Si F est une fonction dérivable sur $[a, b]$, le résultat précédent s'écrit aussi

$$\int_a^b dF = \int_a^b F'(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

- On a déjà établi que $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$. On a donc

$$\int_a^b x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

- Sur $\mathbb{R}$, une primitive de la fonction $f(x) = 2^x$ est $F(x) = \frac{2^x}{\ln(2)}$ car

$$F'(x) = \left(\frac{2^x}{\ln(2)} \right)' = \left(\frac{e^{\ln(2)x}}{\ln(2)} \right)' = \frac{\ln(2)e^{\ln(2)x}}{\ln(2)} = e^{\ln(2)x} = 2^x.$$

Ainsi

$$\int_0^1 2^x dx = \left. \frac{2^x}{\ln(2)} \right|_0^1 = \frac{2^1}{\ln(2)} - \frac{2^0}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)}.$$

Démonstration du théorème

- Soit x dans $[a, b]$. L'aire « sous le graphe » de la fonction f entre a et x est $S(x) = \int_a^x f(t)dt$.
- Si on ajoute Δx à x , l'aire sous le graphe de f entre a et $x + \Delta x$ devient

$$S(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = S(x) + f(x^*)\Delta x$$

avec x^* dans l'intervalle $[x, x + \Delta x]$ (l'existence de x^* découle du théorème de la moyenne).

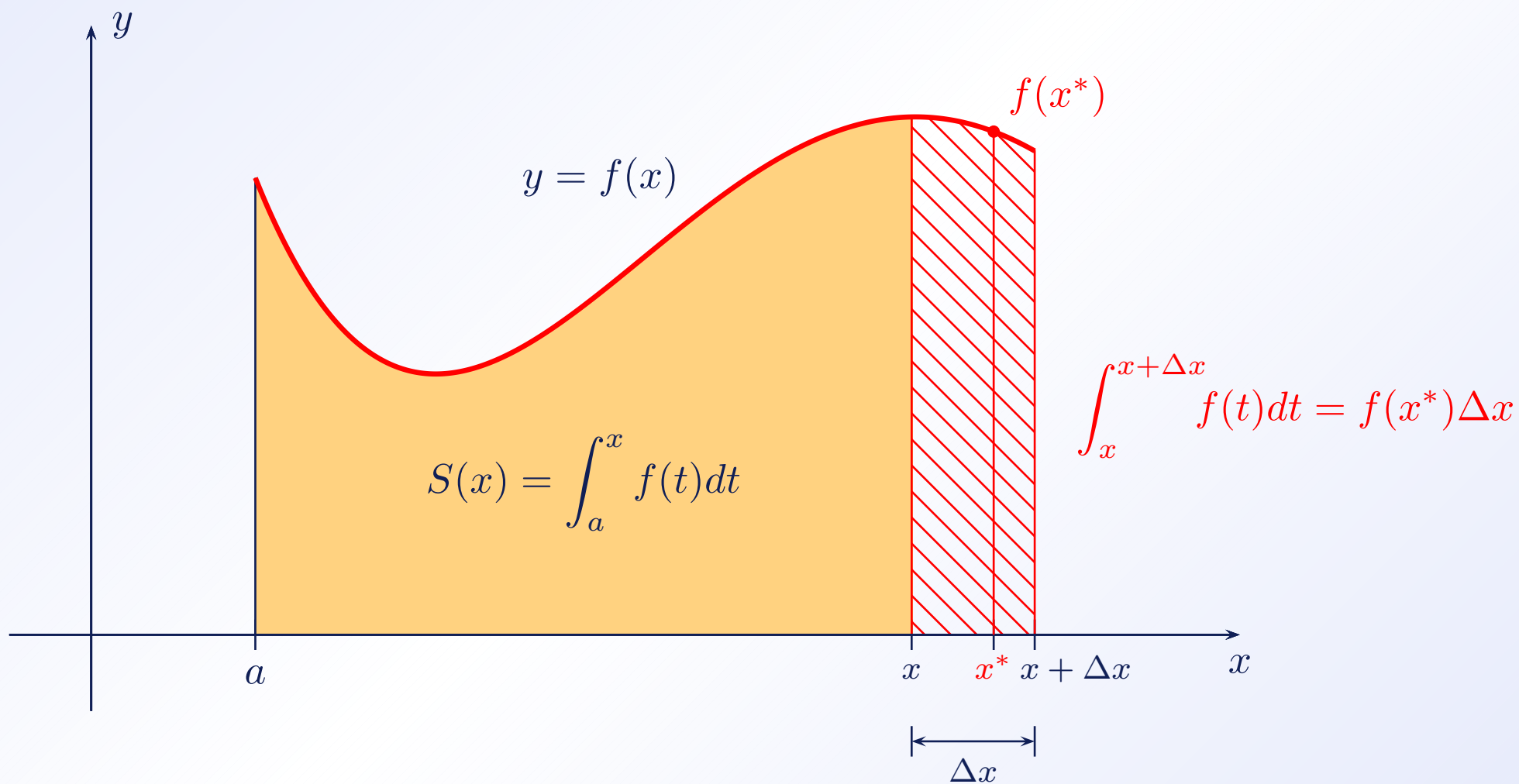
- L'égalité précédente s'écrit aussi $\frac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} = f(x^*)$ et en faisant tendre Δx vers zéro on obtient

$$S'(x) = f(x), \quad \text{quel que soit } x \text{ entre } a \text{ et } b.$$

(La vitesse à laquelle l'aire sous le graphe de f augmente est égale à f .)

- La fonction $S(x)$ est donc une primitive de la fonction f dans l'intervalle $[a, b]$. De plus, lorsque $x = a$, on a $S(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ et $S(x)$ est la primitive de f qui s'annule en $x = a$.

Illustration graphique



Démonstration du corollaire

- Soit $F(x)$ une primitive quelconque de f dans l'intervalle $[a, b]$.
- Toutes les primitives étant égales à une constante additive près, il doit exister $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$F(x) = S(x) + C$$

quel que soit x entre a et b .

- Pour $x = a$ on a $F(a) = S(a) + C$ et on en déduit que $C = F(a)$ car $S(a) = 0$.
- Ainsi la primitive F vérifie

$$F(x) = S(x) + F(a) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$$

quel que soit x entre a et b . En particulier pour $x = b$ on a

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + F(a) \quad \Longleftrightarrow \quad \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

1.4 Techniques d'intégration

1.4.1 Intégration par changement de variable et par substitution



Intégration par changement de variable et par substitution

- Les techniques d' **intégration par changement de variable** et **par substitution** sont deux approches miroir consistant à introduire une nouvelle variable d'intégration en remplacement de la variable d'intégration actuelle.
 - ▶ Lors d'un changement de variable, on remplace la variable d'intégration actuelle x par une fonction d'une nouvelle variable d'intégration t .
 - ▶ Lors d'une substitution, on introduit une nouvelle variable d'intégration t égale à une fonction de la variable d'intégration actuelle x .
- Les deux techniques sont intimement liées entre elles, un changement de variable pouvant être vu comme une substitution « à l'envers » et réciproquement.
- Cette proximité est telle qu'il n'est pas rare de voir les deux méthodes présentées comme une seule et même technique d'intégration, les dénominations « par changement de variable » ou « par substitution » étant alors utilisées de façon interchangeable.

Intégration par changement de variable

- L'**intégration par changement de variable** consiste à interpréter la variable d'intégration initiale comme une fonction (**inversible**) d'une nouvelle variable d'intégration.
- Plus spécifiquement, si on pose $x = \varphi(t)$ avec φ une fonction inversible on a

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \quad \text{ou, en termes de différentielles,} \quad dx = \varphi'(t)dt$$

et l'intégrale (indéfinie) d'une fonction $f(x)$ devient

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

- Tout l'art dans l'utilisation de cette technique repose dans le choix de la fonction φ qui doit amener au calcul d'une intégrale plus simple que celle de départ.
- Une fois cette étape effectuée, le changement de variable inverse, consistant à remplacer t par $\varphi^{-1}(x)$, permet d'obtenir une primitive de la fonction de départ.

■ On veut calculer l'intégrale indéfinie $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$.

► On pose $x = \varphi(t) = t^2 + 1$ avec $t \geq 0$. On a alors $\frac{dx}{dt} = 2t$ et $dx = 2t dt$.

► En remplaçant x par $t^2 + 1$ et dx par $2t dt$, l'intégrale devient

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{(t^2+1)-1}}{t^2+1} 2t dt = 2 \int \frac{t^2}{t^2+1} dt = 2 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt \\ &= 2 \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = 2(t - \arctan(t)) + C. \end{aligned}$$

► En effectuant la substitution inverse $t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ on obtient finalement

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx = 2(\sqrt{x-1} - \arctan(\sqrt{x-1})) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

■ On veut calculer l'intégrale indéfinie $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

► On pose $x = \varphi(t) = \sin(t)$ (avec $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$). On a alors

$$\frac{dx}{dt} = \cos(t) \quad \text{et} \quad dx = \cos(t) dt.$$

► En remplaçant x par $\sin(t)$ et dx par $\cos(t)dt$, l'intégrale devient

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} dt = \int dt = t + C.$$

► Il ne reste plus qu'à effectuer la substitution inverse $t = \varphi^{-1}(x) = \arcsin(x)$ pour obtenir

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- L' **intégration par substitution** est une version plus formelle, mais aussi plus générale et plus puissante, de la technique d'intégration de base consistant à reconnaître la dérivée d'une composition de deux fonctions élémentaires.
- Le principe de la méthode consiste à **introduire une nouvelle variable d'intégration égale à une fonction de la variable d'intégration initiale**.
- Plus spécifiquement si on pose $t = f(x)$ on a alors

$$\frac{dt}{dx} = f'(x) \quad \text{ou, encore,} \quad dt = f'(x)dx$$

et si la fonction à intégrer est de la forme, ou peut être réécrite sous la forme,

$$g(f(x))f'(x)$$

il suffit de remplacer $f(x)$ par t pour obtenir la formule d'intégration par substitution :

$$\int g(f(x))f'(x)dx = \int g(t)dt .$$

■ On considère l'intégrale indéfinie $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$.

► Il est naturel (d'essayer) de poser $t = f(x) = \sqrt{x}$. On a alors $\frac{dt}{dx} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $dx = 2\sqrt{x}dt = 2tdt$.

► L'intégrale devient

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx &= \int \frac{t}{1+t^2} \cdot 2tdt = 2 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} dt \\ &= 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = 2(t - \arctan(t)) + C. \end{aligned}$$

► En substituant $\sqrt{x}$ à t , on obtient

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = 2(\sqrt{x} - \arctan(\sqrt{x})) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

■ On veut calculer l'intégrale indéfinie $\int \frac{e^{2x}}{e^x + 2} dx$.

► On essaie la substitution $t = f(x) = e^x$. On a alors $\frac{dt}{dx} = f'(x) = e^x$ ou, encore, $dt = e^x dx$ et l'intégrale devient

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{e^x + 2} dx &= \int \frac{e^x}{e^x + 2} e^x dx = \int \frac{t}{t + 2} dt = \int \frac{t + 2 - 2}{t + 2} dt \\ &= \int \left(1 - \frac{2}{t + 2} \right) dt = t - 2 \ln(t + 2) + C. \end{aligned}$$

► Il ne reste plus qu'à revenir à la variable initiale x en substituant e^x à t pour obtenir

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 2} dx = e^x - 2 \ln(e^x + 2) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3

■ On veut calculer l'intégrale indéfinie $\int \frac{x}{\sqrt{2x-3}} dx$.

- ▶ On considère la substitution $t = f(x) = \sqrt{2x-3}$. On a alors $dt = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} dx$.
- ▶ Il nous faut également exprimer x en fonction de t : On élève au carré chaque côté de la relation $t = \sqrt{2x-3}$ afin d'obtenir $t^2 = 2x-3$ puis $x = \frac{t^2+3}{2}$.
- ▶ On a maintenant tous les éléments pour effectuer la substitution :

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-3}} dx = \int \frac{t^2+3}{2} dt = \frac{t^3}{6} + \frac{3t}{2} + C$$

et il ne reste plus qu'à revenir à la variable initiale pour obtenir

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{2x-3}} dx &= \frac{\sqrt{(2x-3)^3}}{6} + \frac{3\sqrt{2x-3}}{2} + C = \sqrt{2x-3} \left(\frac{2x-3}{6} + \frac{3}{2} \right) + C \\ &= \sqrt{2x-3} \left(\frac{2x-3}{6} + \frac{9}{6} \right) + C = \frac{1}{3} \sqrt{2x-3} (x+3) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Cas des intégrales définies

- Dans le cas d'une intégrale définie, les techniques d'intégration par changement de variable ou par substitution restent identiques à la différence près qu'**il faut également transformer les bornes d'intégration**.
- En effet, dans le cas du **changement de variable** $x = \varphi(t)$ avec φ bijective (dans l'intervalle d'intégration), la variable x varie entre a et b si et seulement si $\varphi(t)$ varie entre a et b ou encore si et seulement si la variable t varie entre $\varphi^{-1}(a)$ et $\varphi^{-1}(b)$. La règle s'écrit alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt .$$

- Pour la **substitution** $t = f(x)$ on a, plus simplement,

$$\int_a^b g(f(x)) f'(x) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(t) dt .$$

Exemple 1

■ On désire calculer la valeur de l'intégrale définie $\int_{-64}^{-8} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{x - \sqrt[3]{x}} dx$.

► On considère la substitution $t = f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. On a alors

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 (\sqrt[3]{x})^2} \quad \text{et} \quad dx = 3 (\sqrt[3]{x})^2 dt = 3t^2 dt.$$

► Pour les nouvelles bornes d'intégration, elles sont égales à $f(-64) = \sqrt[3]{-64} = -4$ pour la borne inférieure et à $f(-8) = \sqrt[3]{-8} = -2$ pour la borne supérieure.

► L'intégrale définie devient alors

$$\begin{aligned} \int_{-64}^{-8} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{x - \sqrt[3]{x}} dx &= \int_{-4}^{-2} \frac{1 + t}{t^3 - t} \cdot 3t^2 dt = 3 \int_{-4}^{-2} \frac{t(t + 1)}{t^2 - 1} dt = 3 \int_{-4}^{-2} \frac{t}{t - 1} dt \\ &= 3 \int_{-4}^{-2} \left(1 + \frac{1}{t - 1} \right) dt = 3 \left[t + \ln(1 - t) \right]_{-4}^{-2} \\ &= 3 (-2 + \ln(3) - (-4 + \ln(5))) = 3 \left(2 + \ln \left(\frac{3}{5} \right) \right). \end{aligned}$$

Exemple 2

■ On veut calculer la valeur de l'intégrale définie $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$.

► On considère le changement de variable $x = \varphi(t) = \frac{\cos(t)}{2}$. On a alors

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\sin(t)}{2} \quad \text{et} \quad dx = -\frac{\sin(t)}{2} dt.$$

► De plus $t = \varphi^{-1}(x) = \arccos(2x)$ et pour les nouvelles bornes d'intégration on a

$$x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = \varphi^{-1}(0) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

et

$$x = \frac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad t = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Exemple 2 (2)

► On a maintenant tous les éléments pour effectuer le changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{1-4\left(\frac{\cos(t)}{2}\right)^2}} \left(-\frac{\sin(t)}{2}\right) dt \\&= -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{\sqrt{1-\cos^2(t)}} dt = -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} dt \\&= -\frac{1}{2} \cdot t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

■ On notera l'inversion dans l'ordre des bornes lors du changement de variable. Cette inversion est due au fait que la fonction $\arccos$ est strictement décroissante sur son domaine de définition (l'intervalle $[-1, 1]$) et *a fortiori* dans l'intervalle $[0, \frac{1}{4}]$.

1.4 Techniques d'intégration

1.4.2 Intégration par parties



- Cette technique d'intégration est basée sur la règle de dérivation du produit de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

- En intégrant de chaque côté, on obtient

$$\int (f(x) \cdot g(x))' dx = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

ou encore

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx.$$

- En réarrangeant l'égalité précédente, on obtient la **règle d'intégration par parties** :

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx.$$

- Si on pose $u = f(x)$ et $v = g(x)$, on obtient en dérivant

$$\frac{du}{dx} = f'(x) \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dx} = g'(x)$$

que l'on peut réécrire comme

$$du = f'(x)dx \quad \text{et} \quad dv = g'(x)dx$$

et la règle d'intégration par parties prend la forme plus compacte

$$\int u \, dv = u v - \int v \, du .$$

- Tout l'art dans l'utilisation de cette technique consiste à décomposer judicieusement la fonction à intégrer en un produit $u \, dv$ pour lequel v est facile à obtenir et $v \, du$ facile à intégrer.

■ On veut calculer l'intégrale indéfinie : $\int x \sin(x) dx$.

► On essaie une intégration par parties en posant

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g'(x) = \sin(x)$$

ce qui nous donne

$$f'(x) = 1 \quad \text{et} \quad g(x) = -\cos(x).$$

(en fait n'importe quelle primitive de $g'(x)$ fait l'affaire).

► En appliquant la règle d'intégration par parties on obtient

$$\int x \sin(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

$$= x(-\cos(x)) - \int (-\cos(x)) dx$$

$$= -x \cos(x) + \sin(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1 (2)

■ Utilisons la deuxième forme de la règle d'intégration par parties pour calculer $\int x \sin(x) dx$.

► On pose

$$u = x \qquad \text{et} \qquad dv = \sin(x) dx$$

ce qui nous donne

$$du = dx \qquad \text{et} \qquad v = -\cos(x).$$

► On remplace chaque expression dans $\int u dv = u \cdot v - \int v du$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \int x \sin(x) dx &= u v - \int v du \\ &= x(-\cos(x)) - \int (-\cos(x)) dx \\ &= -x \cos(x) + \sin(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■ On veut calculer l'intégrale indéfinie : $\int \ln(x) dx$.

► On pose

$$u = \ln(x) \qquad \text{et} \qquad dv = dx$$

ce qui nous donne

$$du = \frac{1}{x} dx \qquad \text{et} \qquad v = x.$$

► On obtient alors

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln(x) - \int dx = x \ln(x) - x + C \\ &= x (\ln(x) - 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemple 3

■ On veut calculer l'intégrale indéfinie : $\int \sqrt{1-x^2} dx$.

► On pose

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{et} \quad g'(x) = 1$$

ce qui nous donne

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad g(x) = x.$$

► On obtient

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned}$$

► Ainsi

$$\begin{aligned} 2 \int \sqrt{1-x^2} dx &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) + C \end{aligned}$$

et

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \right) + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

■ REMARQUE. On a montré que $\arcsin(x)$ est une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en section 1.4.1 à l'aide d'une intégration par changement de variable.

■ On veut calculer l'intégrale indéfinie : $\int \sin^2(x) dx$.

► On pose

$$u = \sin(x) \qquad \text{et} \qquad dv = \sin(x) dx$$

ce qui nous donne

$$du = \cos(x) dx \qquad \text{et} \qquad v = -\cos(x).$$

► On obtient

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x) dx &= -\sin(x) \cos(x) + \int \cos^2(x) dx \\ &= -\sin(x) \cos(x) + \int (1 - \sin^2(x)) dx \\ &= -\sin(x) \cos(x) + \int dx - \int \sin^2(x) dx \\ &= x - \sin(x) \cos(x) - \int \sin^2(x) dx. \end{aligned}$$

► Ainsi

$$2 \int \sin^2(x) dx = x - \sin(x) \cos(x) + C$$

et

$$\int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} (x - \sin(x) \cos(x)) + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

■ REMARQUE. On obtient le même résultat (mais plus simplement) à partir des identités trigonométriques

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2x))$$

et

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x).$$

Cas des intégrales définies

- Ici aussi la règle s'adapte directement au cas des intégrales définies.
- On peut l'énoncer sous la forme

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

ou sous la forme plus compacte

$$\int_a^b u \, dv = u v \Big|_a^b - \int_a^b v \, du .$$

Exemple 1

■ On veut calculer la valeur de l'intégrale définie : $\int_{-1}^1 x\sqrt{x+1}dx$.

► On pose

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g'(x) = \sqrt{x+1}$$

ce qui nous donne

$$f'(x) = 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}.$$

► On obtient

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x\sqrt{x+1}dx &= x \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}dx \\ &= \frac{2}{3} \left(1 \cdot (1+1)^{3/2} - (-1)(-1+1)^{3/2} \right) - \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (x+1)^{3/2}dx. \end{aligned}$$

Exemple 1 (2)

► Puis

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x\sqrt{x+1}dx &= \frac{2}{3} \left(2^{3/2} - 0\right) - \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (x+1)^{3/2}dx \\&= \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \int_{-1}^1 \frac{5}{2}(x+1)^{3/2}dx \\&= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{15} \left[(x+1)^{5/2}\right]_{-1}^1 \\&= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{15} \left((1+1)^{5/2} - (-1+1)^{5/2}\right) \\&= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{15} \cdot 4\sqrt{2} = \frac{20\sqrt{2} - 16\sqrt{2}}{15} = \frac{4\sqrt{2}}{15}.\end{aligned}$$

■ On veut calculer la valeur de l'intégrale définie : $\int_0^{\sqrt{3}/2} \arcsin(x) dx$.

► Afin d'obtenir une primitive de $\arcsin$ on essaie une intégration par parties.

► On pose

$$u = \arcsin(x) \qquad \text{et} \qquad dv = dx$$

ce qui nous donne

$$du = ??? \qquad \text{et} \qquad v = x.$$

► Mais quelle est la dérivée de $\arcsin$?

► Rappelons que pour deux fonctions réciproques f et f^{-1} on a

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Exemple 2 (2)

- Dans notre cas, pour $x \in [-1, 1]$ et $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a

$$y = f^{-1}(x) = \arcsin(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = f(y) = \sin(y)$$

et

$$\frac{dy}{dx} = [\arcsin(x)]' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

et la dérivée de $\arcsin(x)$ est $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

- On peut maintenant poursuivre notre tentative d'intégration par parties de $\arcsin(x)$:

$$u = \arcsin(x) \quad \text{et} \quad dv = dx$$

ce qui nous donne

$$du = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad \text{et} \quad v = x.$$

Exemple 2 (3)

- L'intégrale (indéfinie) devient

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x) dx &= x \arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- Pour terminer le calcul, il ne reste plus qu'à évaluer la primitive aux bornes d'intégration :

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}/2} \arcsin(x) dx &= \left[x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} \right]_0^{\sqrt{3}/2} \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{1-\frac{3}{4}} \right) - 1 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

1.4 Techniques d'intégration

1.4.3 Intégration des fonctions rationnelles



Intégration des fonctions rationnelles

- Une **fonction rationnelle** est une fonction de la forme

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

où $N(x)$ et $D(x)$ sont deux polynômes (à coefficients réels).

- L'intégration d'une telle fonction nécessite plusieurs étapes, qui peuvent se révéler assez longues en pratique, mais suit une démarche bien établie.
- Nous nous concentrerons ici sur les fonctions où **le dénominateur est un polynôme du second degré** (le cas où le dénominateur est de degré 1 ne pose pas de problèmes). Les méthodes introduites se généralisent directement à des dénominateurs de degré plus élevé (mais demandent un effort de calcul plus important).
- Les fonctions rationnelles considérées sont donc de la forme

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}.$$

Intégration des fonctions rationnelles (2)

■ Étapes préliminaires :

- ▶ Si le numérateur est de degré supérieur ou égal à celui du dénominateur, on commence par effectuer une division polynomiale afin de réécrire la fonction sous la forme

$$f(x) = Q(x) + \frac{N(x)}{D(x)}$$

avec $\text{degré}(N) < \text{degré}(D)$ (donc avec $\text{degré}(N)$ égal à 0 ou 1 pour un dénominateur de degré 2).

- ▶ EXEMPLE. Pour la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$$

la division euclidienne de $x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ par $x^2 + x - 2$ donne

$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = (x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + x - 2}$$

Intégration des fonctions rationnelles (3)

- On considère la fonction rationnelle irréductible

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + bx + c}.$$

REMARQUE. On suppose que le coefficient de x^2 est égal à 1. Si tel n'est pas le cas, il suffit de faire une mise en évidence au préalable.

- La démarche générale pour intégrer la fonction f est la suivante :

1. Factoriser le dénominateur.
2. Décomposer la fonction en **éléments simples**.
3. Intégrer chacun des éléments simples.

- La forme de la décomposition et l'intégration des éléments simples dépendent du nombre de racines réelles de D qui peut être égal à 2 (deux racines réelles distinctes), 1 (une racine réelle double) ou 0 (deux racines complexes conjuguées) pour un dénominateur de degré 2.

Cas 1 : Deux racines réelles distinctes

- Si le dénominateur possède deux racines réelles distinctes, il s'écrit, après factorisation,

$$D(x) = (x - x_1)(x - x_2)$$

et la décomposition en éléments simples de la fonction est de la forme

$$\frac{\alpha x + \beta}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}.$$

avec A et B deux nombres réels à déterminer par identification.

- EXEMPLE 1.

1. Pour la fonction

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{1}{x^2 + x - 2}$$

la factorisation du dénominateur est

$$D(x) = (x - 1)(x + 2).$$

Exemple 1 (2)

2. Pour décomposer la fonction en éléments simples on cherche deux constantes A et B telles que

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \quad \text{quel que soit } x (\neq 1 \text{ et } -2).$$

- ▷ On peut montrer que de telles constantes existent toujours.
- ▷ Pour les obtenir on met l'expression de droite au même dénominateur :

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{(A+B)x + (2A-B)}{(x-1)(x+2)}$$

et on identifie ensuite le numérateur obtenu avec N :

$$1 = (A+B)x + (2A-B) \iff \begin{cases} A+B = 0 \\ 2A-B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1/3 \\ B = -1/3. \end{cases}$$

Exemple 1 (3)

3. À ce stade on a $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x + 2}$.

Il ne reste plus qu'à intégrer chaque élément :

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x + 2} = \frac{1}{3} \ln |x - 1| - \frac{1}{3} \ln |x + 2| + C \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 2} \right| + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

REMARQUE. On peut aussi obtenir la décomposition à partir de

$$N(x) = 1 = A(x + 2) + B(x - 1).$$

Cette égalité devant être vérifiée pour toute valeur de x on obtient

pour $x = 1$	:	$1 = A \cdot 3$	et	$A = \frac{1}{3}$
pour $x = -2$	:	$1 = B \cdot (-3)$	et	$B = -\frac{1}{3}$

- On considère la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{2x - 5}{x^2 + x - 2}.$$

1. Comme dans l'exemple précédent, la factorisation du dénominateur est

$$D(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2).$$

2. La décomposition en éléments simples de la fonction est de la forme

$$\begin{aligned} \frac{2x - 5}{(x - 1)(x + 2)} &= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} \\ &= \frac{A(x + 2) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)}. \end{aligned}$$

2. Pour identifier les numérateurs on part de l'égalité

$$2x - 5 = A(x + 2) + B(x - 1).$$

$$\text{Pour } x = 1 \text{ on obtient} \quad : \quad -3 = A \cdot 3 \quad \text{et} \quad A = -1.$$

$$\text{Pour } x = -2 \text{ on obtient} \quad : \quad -9 = B \cdot (-3) \quad \text{et} \quad B = 3.$$

3. La fonction décomposée s'écrit donc

$$f(x) = \frac{2x - 5}{(x - 1)(x + 2)} = -\frac{1}{x - 1} + \frac{3}{x + 2}$$

et, en intégrant chaque élément, on obtient

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{2x - 5}{(x - 1)(x + 2)} dx = - \int \frac{dx}{x - 1} + 3 \int \frac{dx}{x + 2} \\ &= -\ln |x - 1| + 3 \ln |x + 2| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Cas 2 : Une racine réelle double

- Si le dénominateur possède une racine réelle double, il peut s'écrire

$$D(x) = (x - x_0)^2$$

et la décomposition en éléments simples de la fonction est de la forme

$$\frac{\alpha x + \beta}{(x - x_0)^2} = \frac{A}{x - x_0} + \frac{B}{(x - x_0)^2}.$$

- EXEMPLE 3. On considère la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{3x + 2}{x^2 - 4x + 4}.$$

1. La factorisation du dénominateur est

$$D(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2.$$

2. La décomposition en éléments simples est de la forme

$$\frac{3x+2}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{Ax + (B-2A)}{(x-2)^2}$$

et l'identification des numérateurs donne $A = 3$ et $B = 2 + 2A = 8$.

3. Décomposée en éléments simples, la fonction s'écrit

$$f(x) = \frac{3x+2}{(x-2)^2} = \frac{3}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2}$$

et, en intégrant chaque terme, on obtient

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{3x+2}{(x-2)^2} dx = \int \frac{3}{x-2} dx + \int \frac{8}{(x-2)^2} dx \\ &= 3 \ln |x-2| - \frac{8}{x-2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemple 4

- Lorsque le dénominateur est de degré deux, il est possible de réécrire le numérateur afin d'y faire apparaître un multiple du facteur simple de la factorisation du dénominateur et d'obtenir ainsi directement la décomposition en éléments simples.

- Ainsi, la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{6x - 1}{4x^2 + 4x + 1} = \frac{6x - 1}{(2x + 1)^2}$$

peut être réécrite

$$f(x) = \frac{6x - 1}{(2x + 1)^2} = \frac{3(2x + 1) - 4}{(2x + 1)^2} = \frac{3}{2x + 1} - \frac{4}{(2x + 1)^2}.$$

- Il ne reste plus qu'à intégrer chaque terme séparément :

$$\begin{aligned} \int \frac{6x - 1}{4x^2 + 4x + 1} dx &= \int \frac{6x - 1}{(2x + 1)^2} dx = \int \frac{3}{2x + 1} dx - \int \frac{4}{(2x + 1)^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \ln |2x + 1| + \frac{2}{2x + 1} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Cas 3 : Aucune racine réelle

- Si le dénominateur est irréductible et de la forme

$$D(x) = x^2 + a^2$$

l'intégration de la fonction repose sur les deux formules

$$\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

et

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx &= \int \frac{1}{a^2 \left(\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1 \right)} dx \stackrel{t=x/a}{=} \frac{1}{a} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= \frac{1}{a} \arctan(t) + C = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- On considère la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x+1}{x^2+4}.$$

1. Le dénominateur est bien un polynôme irréductible de degré 2 de la forme $x^2 + a^2$.
2. On sépare la fonction en deux :

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+4} = \frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{x^2+4}.$$

3. On intègre ensuite chaque terme séparément :

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2+4} dx &= \int \frac{x}{x^2+4} dx + \int \frac{1}{x^2+4} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- On considère la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - x + 2}.$$

1. Comme dans l'exemple précédent le dénominateur est un polynôme irréductible de degré 2 mais il n'est pas (encore) sous la forme $x^2 + a^2$.
2. Pour intégrer la fonction, on commence par la décomposer en deux en réécrivant le numérateur comme un multiple de la dérivée du dénominateur plus une constante :

$$\frac{2x - 3}{x^2 - x + 2} = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 2} + \frac{-2}{x^2 - x + 2}.$$

3. Le premier terme s'intègre facilement

$$\int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 2} dx = \ln(x^2 - x + 2) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 6 (2)

4. Pour intégrer le deuxième terme on se ramène à la forme canonique $x^2 + a^2$ « en complétant le carré » :

$$x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}.$$

Avec la substitution $t = x - \frac{1}{2}$ on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{-2}{x^2 - x + 2} dx &= -2 \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} dx = -2 \int \frac{1}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} dt \\ &= -2 \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \left(\frac{2t}{\sqrt{7}} \right) + C = -\frac{4}{\sqrt{7}} \arctan \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{7}} \right) + C \end{aligned}$$

et

$$\int \frac{2x - 3}{x^2 - x + 2} dx = \ln(x^2 - x + 2) - \frac{4}{\sqrt{7}} \arctan \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{7}} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Récapitulatif : Deux racines réelles distinctes

Soit la fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ avec D de degré 2 et N de degré ≤ 1 .

1) **Si D possède deux racines réelles distinctes** il s'écrit $D(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ et

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \frac{A}{a} \ln |x - x_1| + \frac{B}{a} \ln |x - x_2| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

avec A et B tels que $N(x) = A(x - x_2) + B(x - x_1)$.

EXEMPLE 7. Pour la fonction $\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x - 8}{2x^2 - 7x + 3} = \frac{x - 8}{(2x - 1)(x - 3)}$ on a

$D(x) = 2(x - \frac{1}{2})(x - 3)$ et $N(x) = 3(x - 3) - 2(x - \frac{1}{2})$. Ainsi $A = 3$ et $B = -2$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{N(x)}{D(x)} dx &= \int \frac{x - 8}{2x^2 - 7x + 3} dx = \frac{3}{2} \ln |x - \frac{1}{2}| - \ln |x - 3| + C \\ &= \frac{3}{2} \ln |2x - 1| - \ln |x - 3| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Récapitulatif : Une racine réelle double

2) Si D possède une racine réelle double il s'écrit $D(x) = a(x - x_0)^2$ et

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \frac{A}{a} \ln |x - x_0| - \frac{B}{a(x - x_0)} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

avec A et B tels que $N(x) = A(x - x_0) + B$.

EXEMPLE 8. Pour la fonction rationnelle

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{2x - 5}{3x^2 + 6x + 3} = \frac{2(x + 1) - 7}{3(x + 1)^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x + 1} - \frac{7}{(x + 1)^2} \right)$$

on a $A = 2$ et $B = -7$ et

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int \frac{x - 5}{3x^2 + 6x + 3} dx = \frac{2}{3} \ln |x + 1| + \frac{7}{3(x + 1)} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Récapitulatif : Aucune racine réelle

3) Si D n'a aucune racine réelle et est de la forme $D(x) = x^2 + a^2$:

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \frac{\alpha}{2} \ln(x^2 + a^2) + \frac{\beta}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

avec $N(x) = \alpha x + \beta$.

EXEMPLE 9. Pour la fonction rationnelle

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{5x + 4}{x^2 + 9} = \frac{5x}{x^2 + 9} + \frac{4}{x^2 + 9} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 9} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1/3}{(x/3)^2 + 1}$$

on a $a = 3$, $\alpha = 5$ et $\beta = 4$ et

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int \frac{5x + 4}{x^2 + 9} dx = \frac{5}{2} \ln(x^2 + 9) + \frac{4}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Récapitulatif : Aucune racine réelle, cas général

3) Si D n'a aucune racine réelle il est de la forme $D(x) = ax^2 + bx + c$ avec $b^2 - 4ac < 0$.

3.1) On commence par réécrire le numérateur afin de faire apparaître la dérivée du dénominateur, c'est-à-dire trouver α et β tels que N s'écrive

$$N(x) = \alpha (2ax + b) + \beta.$$

La fonction rationnelle s'écrit alors

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\alpha (2ax + b) + \beta}{ax^2 + bx + c} = \frac{\alpha (2ax + b)}{ax^2 + bx + c} + \frac{\beta}{ax^2 + bx + c}.$$

3.2) Le premier terme s'intègre sans difficultés :

$$\int \frac{\alpha (2ax + b)}{ax^2 + bx + c} dx = \alpha \ln |ax^2 + bx + c| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Récapitulatif : Aucune racine réelle, cas général (2)

3.3) Pour intégrer le second terme on complète le carré au dénominateur afin d'obtenir

$$\begin{aligned} D(x) = ax^2 + bx + c &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] \\ &= \frac{1}{4a} \left[(2ax + b)^2 + (4ac - b^2) \right] \end{aligned}$$

À ce stade on doit calculer l'intégrale

$$\int \frac{\beta}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\beta}{\frac{1}{4a} \left[(2ax + b)^2 + (4ac - b^2) \right]} dx$$

En effectuant la substitution $t = 2ax + b$ (et donc $dt = 2adx$) on obtient

$$\int \frac{\beta}{\frac{1}{4a} \left[(2ax + b)^2 + (4ac - b^2) \right]} dx = \int \frac{2\beta}{t^2 + (4ac - b^2)} dt$$

Récapitulatif : Aucune racine réelle, cas général (3)

3.3) Pour conclure, rappelons que

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$\int \frac{2\beta}{t^2 + (4ac - b^2)} dt = \frac{2\beta}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \left(\frac{t}{\sqrt{4ac - b^2}} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

et en substituant $2ax + b$ à t on obtient (enfin)

$$\int \frac{\beta}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2\beta}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

- On considère la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{3x - 2}{2x^2 - 2x + 1}.$$

1. On commence par réécrire le numérateur en faisant apparaître un multiple de la dérivée du dénominateur égale, ici, à $4x - 2$. On cherche donc α et β tels que

$$3x - 2 = \alpha(4x - 2) + \beta.$$

On obtient

$$3x - 2 = \frac{3}{4}(4x - 2) - \frac{1}{2}.$$

Ainsi $\alpha = \frac{3}{4}$ et $\beta = -\frac{1}{2}$ et la fonction à intégrer se réécrit

$$f(x) = \frac{3x - 2}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4x - 2}{2x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$$

2. Afin d'intégrer le deuxième terme de la décomposition, on complète le carré au dénominateur :

$$2x^2 - 2x + 1 = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (2x - 1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} ((2x - 1)^2 + 1)$$

3. On peut maintenant intégrer chaque terme :

$$\begin{aligned} \int \frac{3x - 2}{2x^2 - 2x + 1} dx &= \int \frac{3}{4} \cdot \frac{4x - 2}{2x^2 - 2x + 1} dx - \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} ((2x - 1)^2 + 1)} dx \\ &= \frac{3}{4} \ln(2x^2 - 2x + 1) - \frac{1}{2} \int \frac{2}{(2x - 1)^2 + 1} dx \\ &= \frac{3}{4} \ln(2x^2 - 2x + 1) - \frac{1}{2} \arctan(2x - 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.5 Intégrales impropres



- La notion d'intégrales de Riemann introduite et étudiée dans les sections précédentes repose sur plusieurs hypothèses :
 - ▶ L'intervalle d'intégration est **borné**.
 - ▶ La fonction à intégrer est **continue** sur l'intervalle d'intégration ou, du moins, **continue par morceaux et bornée** sur tout l'intervalle d'intégration (avec un nombre fini de morceaux).
- Pour certaines fonctions il est possible de généraliser la notion d'intégrales définies dans les deux situations suivantes :
 - ▶ L'intervalle d'intégration est **non borné**.
 - ▶ La fonction à intégrer présente une **asymptote verticale** à l'une des extrémités de l'intervalle d'intégration (voire en un point situé à l'intérieur de cet intervalle).

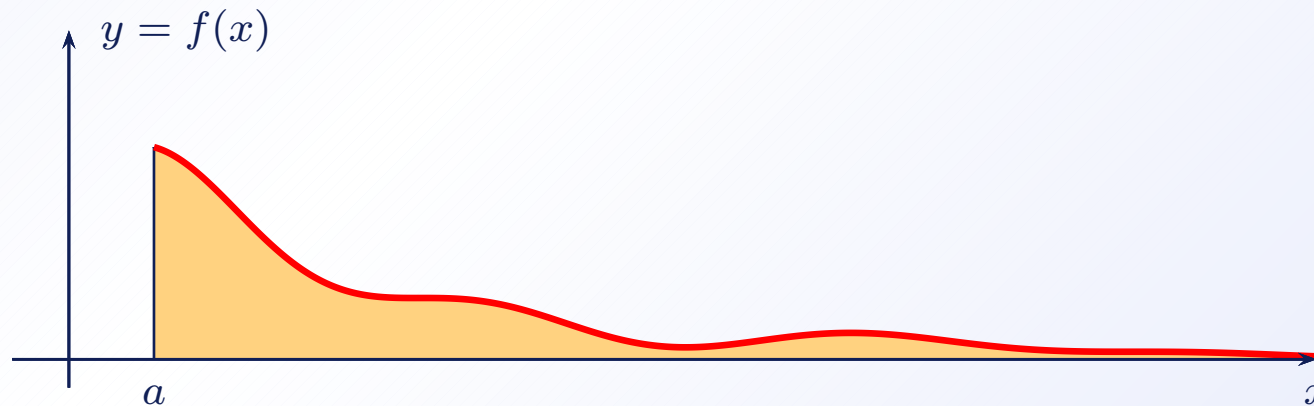
Dans les deux cas on parle alors d'intégrales **impropres** ou **généralisées**.

Intégrales impropres de type I

- Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$ alors

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx .$$

à condition que la limite existe. Si tel est le cas, l'intégrale est dite **convergente** alors qu'elle est dite **divergente** si la limite n'existe pas.



- REMARQUE. Pour que l'intégrale impropre converge, il est nécessaire mais pas suffisant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Intégrales impropres de type I (2)

- De même, si f est continue sur l'intervalle $] -\infty, b]$, on a

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx.$$

si la limite existe.

- Finalement, si la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

où a est un nombre réel quelconque et **à condition que les deux intégrales impropres de droites convergent.**

■ Pour la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ on a $I(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^t = \left(-\frac{1}{t} - (-1) \right) = 1 - \frac{1}{t}$ et

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right) = 1.$$

Ainsi l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est convergente et sa valeur est égale à 1.

■ Pour la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ on a $I(t) = \int_1^t \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_1^t = \ln(t)$ et

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) \rightarrow +\infty.$$

L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge donc vers $+\infty$.

- Plus généralement, pour la fonction $f(x) = \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$, avec $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$, on a

$$I(t) = \int_1^t \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^t x^{-\alpha} dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^t = \frac{t^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}.$$

- En passant à la limite lorsque t tend vers l'infini, on obtient

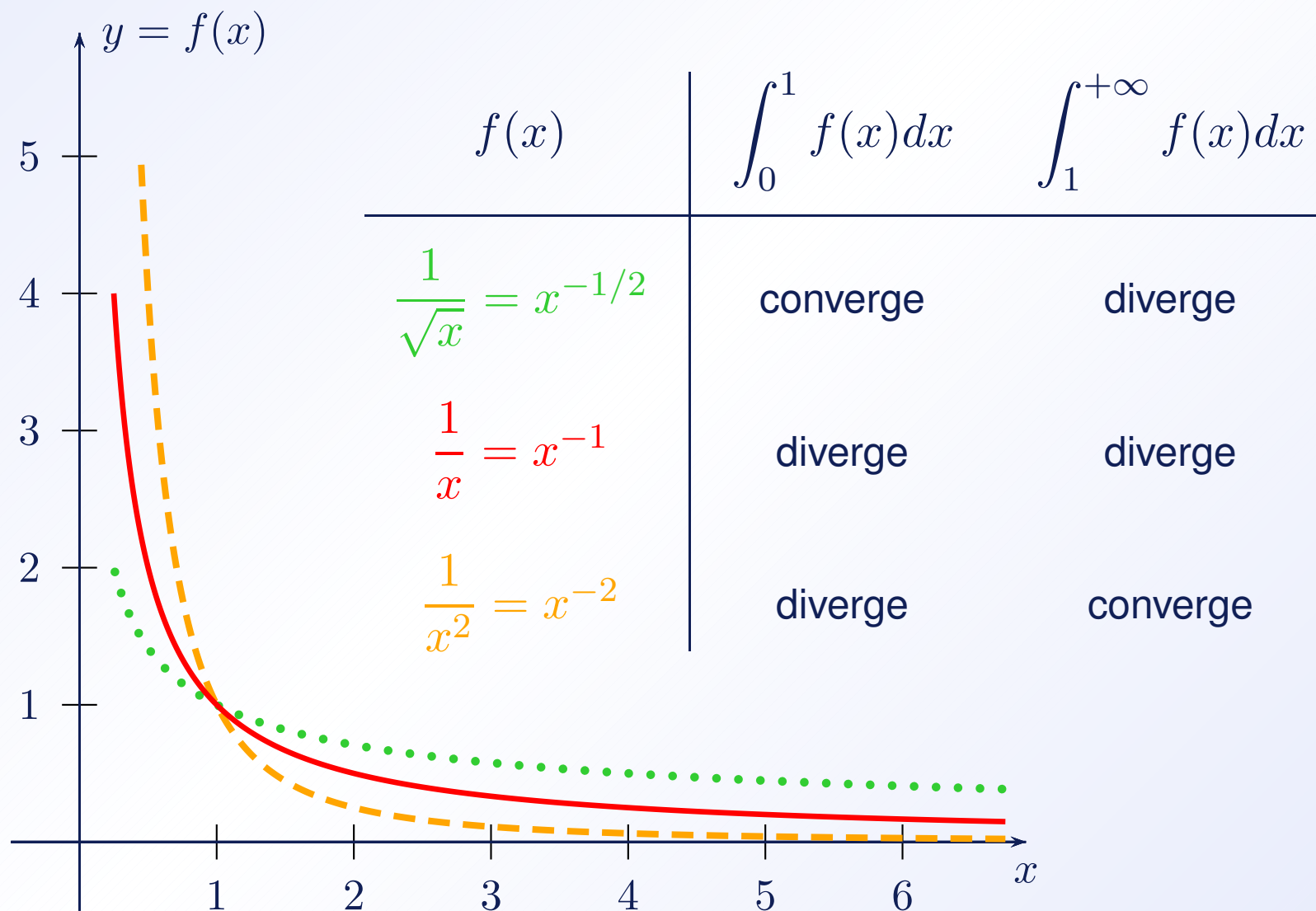
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} \quad \text{si } \alpha > 1$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ diverge (vers } +\infty) \text{ si } 0 < \alpha < 1.$$

- Pour $\alpha = 1$, l'intégrale diverge également vers $+\infty$ (voir l'exemple précédent).

Illustration graphique

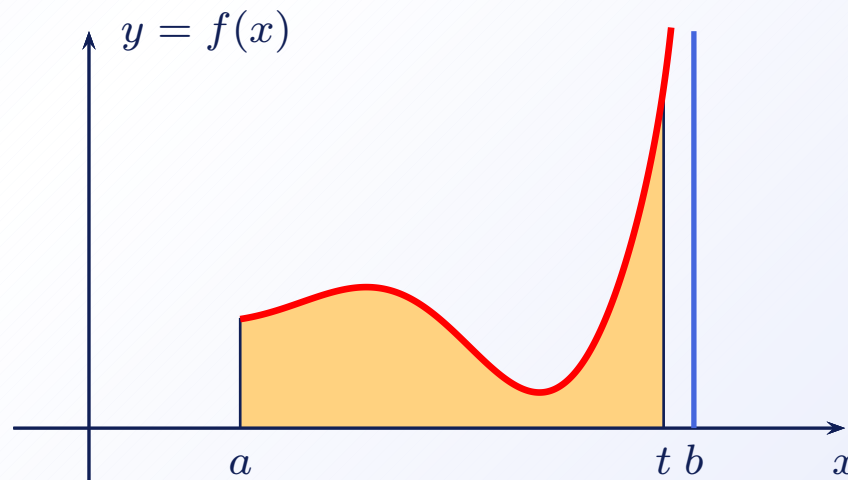


Intégrales impropres de type II

- Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b[$ et possédant une asymptote verticale en b (on a donc $\lim_{t \rightarrow b-} f(x) = \pm\infty$), alors

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f(x)dx .$$

à condition que la limite existe. Si tel est le cas, l'intégrale est dite **convergente** alors qu'elle est dite **divergente** si la limite n'existe pas.



Intégrales impropres de type II (2)

- De même, si f est continue sur l'intervalle $]a, b]$ et possède une asymptote verticale en a , alors

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a+} \int_t^b f(x)dx$$

si la limite existe.

- Finalement, si f possède une asymptote verticale en c , avec $a < c < b$, on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

à condition que les deux intégrales impropres de droite convergent.

■ Pour la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ on a $I(t) = \int_t^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_t^1 = \frac{1}{t} - 1$. Ainsi

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow 0+} I(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{t} - 1 \right) \rightarrow +\infty$$

et l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ diverge vers $+\infty$.

■ Pour la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ on a $I(t) = \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_t^1 = 2 - 2\sqrt{t}$ et

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0+} I(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} (2 - 2\sqrt{t}) = 2.$$

L'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est convergente et sa valeur est égale à 2.

- Plus généralement, pour la fonction $f(x) = \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$, avec $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_t^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_t^1 x^{-\alpha} dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_t^1 = \frac{1 - t^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

- En passant à la limite lorsque t tend vers zéro plus, on obtient

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{si } 0 < \alpha < 1$$

et

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ diverge (vers } +\infty) \text{ si } \alpha > 1.$$

- On vérifie que l'intégrale diverge également lorsque $\alpha = 1$.

Quelques intégrales impropres importantes

■ Puissances :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \begin{cases} \text{converge} & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ \text{diverge} & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \begin{cases} \text{diverge} & \text{si } 0 < \alpha \leq 1 \\ \text{converge} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

■ Exponentielles décroissantes :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \text{ converge pour tout } \alpha > 0.$$

■ Produit d'une exponentielle décroissante et d'une puissance :

$$\int_0^{+\infty} x^\beta e^{-\alpha x} dx \text{ converge pour tout } \alpha > 0 \text{ et pour tout } \beta \geq 0.$$

1.6 Quelques applications du calcul intégral



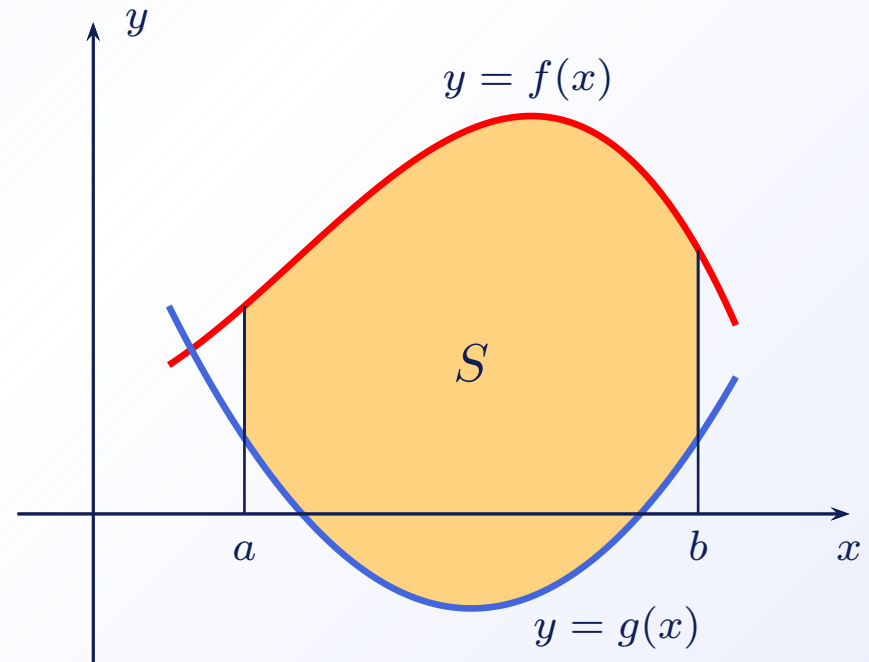
Aire entre deux courbes

- On considère deux fonctions f et g continues dans l'intervalle $[a, b]$ et telles que

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

- On cherche l'aire S du domaine délimité par ces deux courbes et les verticales $x = a$ et $x = b$.

- Cette aire est égale à



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

Exemple

- On considère les deux fonctions

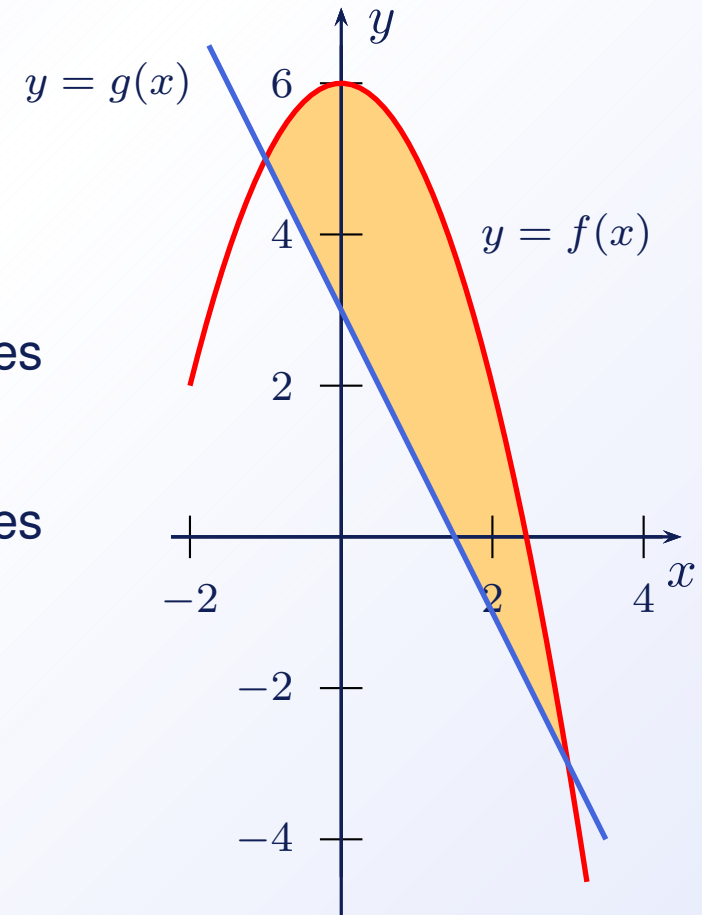
$$f(x) = 6 - x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = 3 - 2x.$$

- On cherche l'aire de la région bornée située entre les graphes de ces deux fonctions.
- Les abscisses des points d'intersection des deux courbes sont solutions de

$$\begin{aligned} 6 - x^2 &= 3 - 2x && \Longleftrightarrow && x^2 - 2x - 3 = 0 \\ &&& \Longleftrightarrow && (x - 3)(x + 1) = 0 \end{aligned}$$

- On a $f \geq g$ dans l'intervalle $[-1, 3]$ et l'aire cherchée est

$$\int_{-1}^3 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^3 (3 + 2x - x^2) dx = \left[3x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^3 = 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}.$$

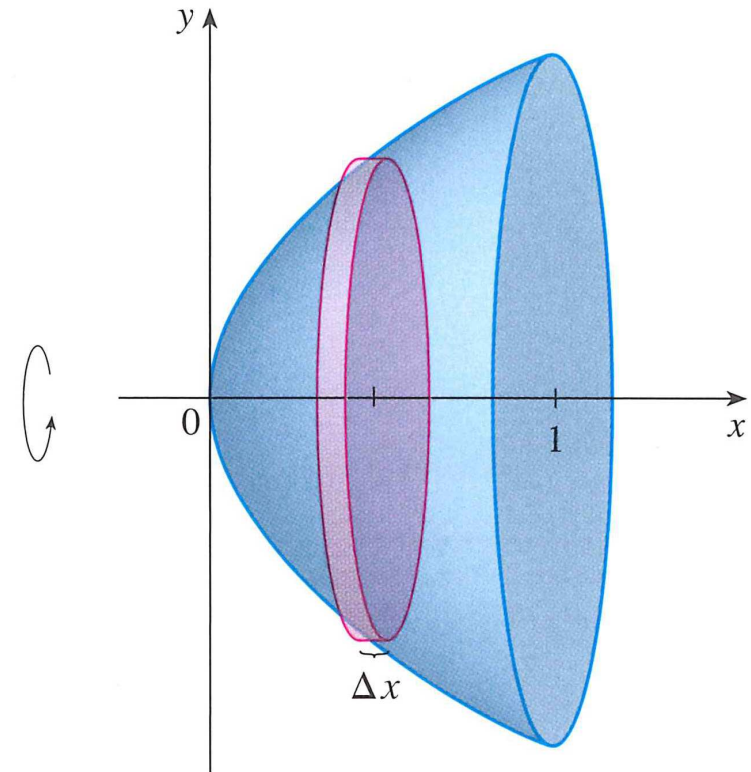


Volume d'un solide de révolution

- On se donne une fonction f continue et positive ou nulle dans l'intervalle $[a, b]$.
- On cherche le volume V du solide généré par la révolution, autour de l'axe Ox , de la courbe $y = f(x)$ entre $x = a$ et $x = b$.
- Ce volume est égal à

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

- Méthode : Découper le solide en tranches de largeur Δx et approcher le volume de chaque tranche par celui d'un cylindre de hauteur Δx et de rayon $f(x)$ dont l'aire de la base est égale à $\pi (f(x))^2$.



Exemple

- Le volume engendré par la rotation d'un sinus, autour de l'axe Ox et sur une demi-période, est

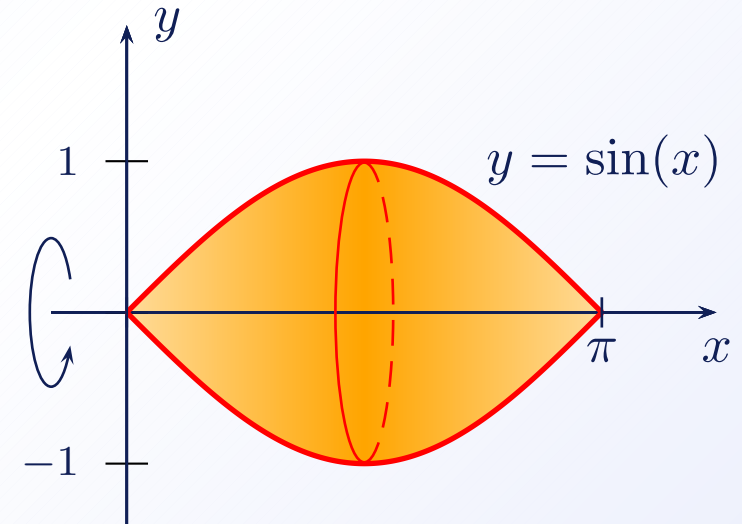
$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx.$$

- RAPPEL. Une primitive de la fonction $f(x) = \sin^2(x)$ est

$$F(x) = \frac{1}{2} (x - \sin(x) \cos(x)).$$

- Le volume cherché est donc égal à

$$V = \frac{\pi}{2} \left[x - \sin(x) \cos(x) \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2}.$$



Longueur d'un arc de courbe

- On se donne une fonction f de classe C^1 (c.-à-d. dont la dérivée est continue) dans l'intervalle $[a, b]$.
- On cherche la longueur L de la courbe $y = f(x)$ pour x entre a et b .
- Cette longueur est égale à

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

- Méthode : Sur un intervalle de largeur Δx la longueur de la courbe est proche de

$$\Delta L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

En passant aux différentielles on obtient

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (f'(x)dx)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

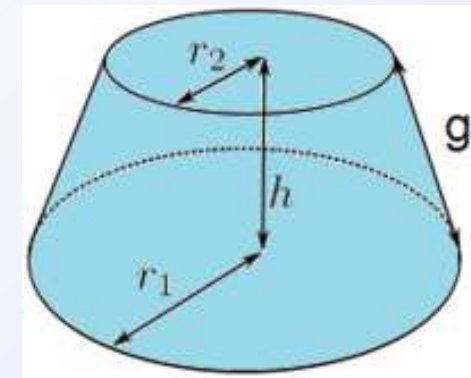
Aire latérale d'un solide de révolution

- On se donne une fonction f de classe C^1 et positive ou nulle dans l'intervalle $[a, b]$.
- On cherche l'aire latérale A du solide généré par la révolution, autour de l'axe Ox , de la courbe $y = f(x)$ entre $x = a$ et $x = b$.
- Cette aire est égale à

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

- Méthode : Découper le solide en tranches de largeur Δx et approcher l'aire latérale de la tranche par celle d'un tronc de cône de génératrice de longueur $g = dL$ et de rayon moyen $\frac{r_1 + r_2}{2} = f(x)$. On obtient l'élément de surface

$$dA = 2\pi \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot g = 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$



- On désire calculer l'aire latérale du volume de l'exemple précédent. On a

$$f(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad f'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \cos^2(x)}.$$

- L'aire latérale cherchée est donc

$$A = 2\pi \int_0^\pi \sin(x) \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx \stackrel{t=\cos(x)}{=} 2\pi \int_1^{-1} -\sqrt{1 + t^2} dt = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 + t^2} dt.$$

- RAPPEL. Une primitive de la fonction $g(t) = \sqrt{1 + t^2}$ est

$$G(t) = \frac{t}{2} \sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \ln \left(t + \sqrt{1 + t^2} \right).$$

- Et la valeur de l'aire latérale est

$$A = 2\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \ln(-1 + \sqrt{2}) \right) = 2\pi \left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right).$$