

Mathématiques 2

Calcul intégral

Table des matières

1	Calcul intégral	1
1.1	Intégrales définies et sommes de Riemann	1
1.2	Primitives et intégrales indéfinies	3
1.3	Théorème fondamental de l'analyse	4
1.4	Techniques d'intégration	6
1.4.1	Intégration par changement de variable et par substitution	6
1.4.2	Intégration par parties	7
1.4.3	Intégration des fonctions rationnelles	7
1.5	Intégrales impropres et généralisées	8
1.6	Applications du calcul intégral	9
1.7	Exercices supplémentaires et récapitulatifs	10
1.8	Solutions d'exercices choisis	12

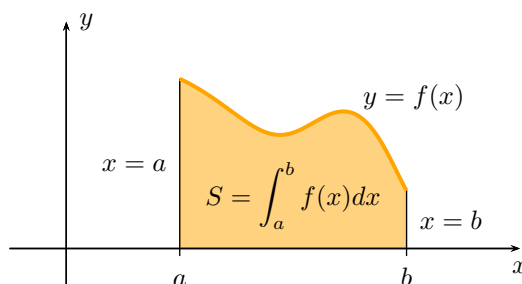
Calcul intégral

1.1 Intégrales définies et sommes de Riemann

On considère une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive ou nulle dans un intervalle réel $[a, b]$ non vide. L'**intégrale définie** de la fonction f entre a et b est notée

$$\int_a^b f(x) dx$$

et sa valeur est égale à l'aire S de la surface comprise entre l'axe des x , le graphe de la fonction $f(x)$ et les verticales $x = a$ et $x = b$:



1.1 Déterminer la valeur de chacune des intégrales définies proposées (raisonner géométriquement et utiliser les propriétés de base des intégrales).

a) $\int_1^4 7dx$ b) $\int_{-3}^5 |x|dx$ c) $\int_a^b xdx$ d) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$
avec $0 \leq a < b$

1.2 Déterminer la valeur de chacune des intégrales définies proposées (raisonner géométriquement et utiliser les propriétés de base des intégrales et les résultats de l'exercice précédent).

a) $\int_1^4 -7dx$ b) $\int_4^1 7dx$ c) $\int_{-3}^5 xdx$ d) $\int_a^b xdx$
avec $0 \leq b < a$

1.3 Soit f définie et continue sur $\mathbb{R}$. Simplifier l'intégrale $\int_{-a}^a f(x)dx$ dans le cas où

- a) f est une fonction paire, b) f est une fonction impaire.

1.4 Déduire la valeur de la troisième intégrale à partir des deux premières.

$$\text{Si } \int_1^4 f(x)dx = 4 \quad \text{et} \quad \int_1^3 3f(x)dx = 5 \quad \text{alors} \quad \int_3^4 2f(x)dx = ?$$

1.5 Déduire la valeur de la troisième intégrale à partir des deux premières.

$$\text{Si } \int_0^4 f(x)dx = 5 \quad \text{et} \quad \int_3^4 4f(x)dx = 6 \quad \text{alors} \quad \int_0^3 (5 - 2f(x))dx = ?$$

1.6 Calculer la valeur de chacune des intégrales définies suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_{-2}^1 (|x| - 1) dx & \text{c) } \int_1^2 \lfloor x^2 \rfloor dx & \text{e) } \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x^{\lfloor x \rfloor} dx \\ \text{b) } \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \lfloor x \rfloor dx & \text{d) } \int_1^3 \lfloor x \rfloor^3 dx & \text{f) } \int_{-1}^1 \tan(\alpha) d\alpha \end{array}$$

1.7 a) Soit b un nombre réel positif. Calculer la valeur de l'intégrale définie $\int_0^b x^2 dx$ au moyen d'une somme de Riemann.

b) Déduire du résultat précédent la valeur de $\int_{-b}^b x^2 dx$.

c) Utiliser les résultats précédents afin de calculer la valeur de chacune des intégrales définies qui suivent.

$$\begin{array}{lll} \text{i) } \int_3^4 x^2 dx & \text{ii) } \int_4^{-2} x^2 dx & \text{iii) } \int_a^b x^2 dx, (a, b \in \mathbb{R}) \end{array}$$

1.8 Calculer la valeur des intégrales suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^\pi \cos(t) dt & \text{b) } \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt & \text{c) } \int_0^{2\pi} \cos^2(nt) dt \\ & & \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \end{array}$$

1.9 a) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Montrer que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

b) Quand l'égalité a-t-elle lieu ?

1.10 Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = |2 - |x||$ sur l'intervalle $I = [-4, 4]$. Déterminer également toutes les valeurs $c \in I$ pour lesquelles $f(c)$ est égal à la valeur moyenne calculée.

1.11 On considère la fonction, définie par morceaux,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2, \\ 0 & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ -1 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

a) Représenter graphiquement $f(x)$ pour x dans l'intervalle $[0, 5]$.

b) Déterminer ensuite la valeur des intégrales suivantes.

$$\text{i) } \int_0^4 f(x)dx \quad \text{ii) } \int_1^5 f(x)dx \quad \text{iii) } \int_4^2 f(x)dx$$

Pour $x \in [0, 5]$, on définit la fonction $F(x)$ par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

c) Représenter graphiquement $F(x)$.

1.12 Soit $f(t) = [t]$ et $F(x)$ la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ par

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x [t]dt.$$

a) Représenter graphiquement $f(x)$ et $F(x)$ pour x dans l'intervalle $[0, 4]$.

b) Calculer $F(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Donner une expression de F valable pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

1.2 Primitives et intégrales indéfinies

▷ Soit f une fonction réelle définie et continue dans un intervalle réel I , toute fonction F dérivable sur I et vérifiant

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

est appelée une **primitive** de f sur I .

▷ Dès qu'une fonction admet une primitive sur un intervalle, elle en admet une infinité, toutes égales à une constante additive près.

▷ La famille de toutes les primitives de f sur I est appelée l'**intégrale indéfinie** de f et est notée

$$\int f(x)dx$$

et si $F(x)$ est une primitive (quelconque) de $f(x)$ sur I on a

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

La constante C est appelée **constante d'intégration**.

1.13 Pour chaque fonction f proposée, déterminer la primitive F qui vérifie la condition demandée.

a) $f(x) = x^2$ avec $F(1) = -4$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $F(x)$ s'annule en $x = 9$

1.14 Est-il vrai que $\int \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{x}{1+x^2} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$?

1.15 Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------------|---|
| a) $\int (4x + 3)dx$ | e) $\int (\sqrt{t} + \sin(t)) dt$ | i) $\int \frac{2-x}{x^3} dx$ |
| b) $\int (9t^3 - 4t + 3)dt$ | f) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ | j) $\int \frac{dx}{1+x^2}$ |
| c) $\int x(x+3)dx$ | g) $\int e^{-t} dt$ | k) $\int \cos(3t)dt$ |
| d) $\int 2x^5 dx$ | h) $\int \frac{dt}{\cos^2(t)}$ | l) $\int A \sin(\omega t + \varphi) dt$ |

1.16 Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

- | | | |
|----------------------------|------------------------------|--|
| a) $\int \sqrt[5]{x^2} dx$ | e) $\int \frac{dx}{2x-1}$ | i) $\int \cos^3(t) dt$ |
| b) $\int (x-1)^8 dx$ | f) $\int \frac{x+2}{x+1} dx$ | j) $\int \frac{2}{4+x^2} dx$ |
| c) $\int \frac{2}{x} dx$ | g) $\int (3x-2)^{17} dx$ | k) $\int e^{2\sin(x)} \cos(x) dx$ |
| d) $\int e^{-3x+2} dx$ | h) $\int 3^{-x} dx$ | l) $\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} dx$ |

1.17 Calculer les intégrales indéfinies suivantes.

- | | | |
|-------------------------------------|--|--|
| a) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$ | e) $\int \sin^2(x) \cos^3(x) dx$ | i) $\int \frac{\ln^2(x)}{x} dx$ |
| b) $\int \frac{x}{x+5} dx$ | f) $\int x(x^2-1)^{99} dx$ | j) $\int x e^{-3x^2+1} dx$ |
| c) $\int \sin^3(t) \cos(t) dt$ | g) $\int \frac{\sin(\frac{\pi}{x})}{x^2} dx$ | k) $\int \frac{\sin^2(t)}{\cos^4(t)} dt$ |
| d) $\int \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} dx$ | h) $\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^2} dx$ | l) $\int \frac{1-x}{1+x} dx$ |

1.3 Théorème fondamental de l'analyse

▷ Le lien entre intégrales définies et indéfinies est donné par le théorème fondamental de l'analyse

Théorème fondamental de l'analyse. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et x un point de cet intervalle, alors la fonction S définie sur $[a, b]$ par

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est la primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en a (la fonction S est donc continue et dérivable sur $[a, b]$ et sa dérivée est égale à f).

Dit autrement, si l'intégrale de Riemann d'une fonction continue f est dérivée par rapport à sa borne supérieure on obtient la valeur de f en cette borne :

$$S'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

et son corollaire

Corollaire. Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et F une primitive de f dans cet intervalle, alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

1.18 Calculer les intégrales définies suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_{-2}^4 5dx & \text{c)} \int_0^\pi \sin(\alpha) d\alpha & \text{e)} \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(t) dt \\ \text{b)} \int_4^{-3} x dx & \text{d)} \int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x} & \text{f)} \int_0^1 e^{t-1} dt \end{array}$$

1.19 Calculer les intégrales définies suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_{-1}^0 x(x^2 - 1)^5 dx & \text{c)} \int_2^3 \frac{1}{x \ln(x)} dx & \text{e)} \int_4^{10} \frac{2x+7}{(x-1)^2} dx \\ \text{b)} \int_{\frac{3\pi}{4}}^\pi \tan(t) dt & \text{d)} \int_0^{\pi/6} \tan^3(t) dt & \text{f)} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} \end{array}$$

1.20 Calculer les intégrales définies suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx & \text{c)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2(t)}{1-\sin^2(t)} dt & \text{e)} \int_1^2 4(2x-3)^{12} dx \\ \text{b)} \int_1^2 \sqrt{x-1} dx & \text{d)} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{1-\cos(t)} dt & \text{f)} \int_1^3 3^x dx \end{array}$$

1.21 Soit f une fonction continue, que valent les dérivées suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{d}{dx} \int f(x) dx & \text{c)} \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt \\ \text{b)} \frac{d}{dx} \int_0^1 f(x) dx & \text{d)} \frac{d}{dx} \int_{2x}^{x^2} f(t) dt \end{array}$$

1.22 Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonction G définie par

$$G(x) = \int_x^{2x} \cos(t) dt.$$

- a) Calculer $G(\pi/4)$.
- b) Déterminer $G'(x)$.
- c) Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 3 de G au voisinage de $x_0 = 0$.

1.23 Soient les fonctions

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = 2e^{-\frac{x}{4}} \quad \text{et} \quad h(x) = \min(f(x), g(x)).$$

- Représenter graphiquement le domaine limité supérieurement par le graphe représentatif de h et inférieurement par la droite horizontale d'équation $y = 1$.
- Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de ce domaine.

1.24 a) Montrer, pour tout entier $n \geq 1$, l'inégalité

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \ln(n+1).$$

INDICATION. Borner supérieurement la valeur de l'intégrale de $f(x) = 1/x$ entre 1 et $n+1$.

- Déduire du résultat précédent la limite de la suite harmonique $(H_n, n \geq 1)$. Autrement dit, calculer, si elle existe, la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1.4 Techniques d'intégration

1.4.1 Intégration par changement de variable et par substitution

1.25 Calculer les intégrales indéfinies suivantes en effectuant le changement de variable proposé.

- $\int x\sqrt{x-1}dx$, poser $x = t^2 + 1, t \geq 0$
- $\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}dx$, poser $x = 3\sin(t)$
- $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$, poser $x = t^2, t \geq 0$
- $\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}}$, poser $x = t^3$

1.26 Calculer les intégrales indéfinies suivantes en effectuant la substitution proposée.

- $\int \frac{\sin^3(t)}{1 + \cos^2(t)}dt$, poser $u = \cos(t)$
- $\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}dx$, poser $t = \sqrt{9-x^2}$
- $\int \frac{e^{x/2}}{\sqrt{4-e^x}}dx$, poser $t = e^{x/2}$
- $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$, poser $t = \sqrt{x}$

RAPPEL. La dérivée de la fonction $\arcsin(x)$ est $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1.27 Calculer la valeur des intégrales définies suivantes.

- $\int_1^4 \frac{dx}{4\sqrt{x} + x}$
- $\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1}dx$
- $\int_0^9 \frac{1}{1 + \sqrt{x}}dx$
- $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2x}$

1.4.2 Intégration par parties

1.28 Calculer les intégrales indéfinies suivantes en effectuant des intégrations par parties.

- | | |
|------------------------------|---------------------------|
| a) $\int x e^x dx$ | e) $\int x^3 e^{-x^2} dx$ |
| b) $\int \sqrt{x} \ln(x) dx$ | f) $\int \arctan(x) dx$ |
| c) $\int x^2 \cos(x) dx$ | g) $\int x^2 e^{-x} dx$ |
| d) $\int \cos^2(t) dt$ | h) $\int e^x \sin(x) dx$ |

1.29 Calculer la valeur des intégrales définies suivantes.

- | | |
|--|--|
| a) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t \sin(t) dt$ | c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2(x)} dx$ |
| b) $\int_1^2 x \ln(x) dx$ | d) $\int_0^1 (e^x + 1)x^2 dx$ |

1.30 Calculer les intégrales indéfinies suivantes en effectuant d'abord une substitution puis une intégration par parties.

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| a) $\int \sin(\sqrt{x}) dx$ | b) $\int e^{\sqrt{x}} dx$ |
|-----------------------------|---------------------------|

1.31 a) Vérifier, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx.$$

- b) Utiliser le résultat précédent pour calculer $\int x^4 e^x dx$.
- c) Donner également une formule pour $\int x^n e^x dx$ valable pour tout entier $n \geq 0$.

1.32 Soit f une fonction dérivable et strictement croissante dans un intervalle $I = [a, b]$ et f^{-1} sa fonction réciproque.

a) Montrer que

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x) dx.$$

INDICATION. Effectuer un changement de variable suivi d'une intégration par parties.

b) Interpréter géométriquement l'identité précédente.

c) Utiliser l'identité pour calculer

(1) $\int_0^{\sqrt{3}/2} \arcsin(y) dy$	(2) $\int_0^1 \arctan(y) dy$
---	------------------------------

1.4.3 Intégration des fonctions rationnelles

1.33 Calculer les intégrales indéfinies des fonctions rationnelles suivantes.

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------|--|
| a) $\int \frac{2}{3x-7} dx$ | b) $\int \frac{x+5}{x+2} dx$ | c) $\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x-3} dx$ |
|-----------------------------|------------------------------|--|

1.34 Calculer les intégrales indéfinies des fonctions rationnelles suivantes.

a) $\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx$

c) $\int \frac{x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} dx$

b) $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$

d) $\int \frac{9x}{10x^2 - x - 2} dx$

1.35 Calculer les intégrales indéfinies des fonctions rationnelles suivantes.

a) $\int \frac{2x + 7}{(x - 1)^2} dx$

b) $\int \frac{x + 1}{4x^2 - 20x + 25} dx$

1.36 Calculer les intégrales indéfinies des fonctions rationnelles suivantes.

a) $\int \frac{2}{4x^2 + 9} dx$

d) $\int \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + 9x + 9} dx$

b) $\int \frac{2x - 1}{x^2 + 4} dx$

e) $\int \frac{7x - 2}{5x^2 + 6} dx$

c) $\int \frac{3 - 6x}{x^2 - x + 2} dx$

f) $\int \frac{1 - 3x}{4x^2 - 4x + 2} dx$

1.5 Intégrales impropres et généralisées

1.37 Calculer, en se préoccupant de la convergence, la valeur des intégrales suivantes.

a) $\int_0^{+\infty} e^{-x/10} dx$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(4 + x^2)^2} dx$

b) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8}{x^2 + 4} dx$

c) $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x(x + 1)}$

g) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln(x)}$

d) $\int_0^{+\infty} \sin(\omega t) dt \quad (\omega > 0)$

h) $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$

1.38 Calculer, en se préoccupant de la convergence, la valeur des intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

e) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2(x)}$

b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

f) $\int_{1/2}^3 \frac{1}{x \ln(x)} dx$

c) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4 - x}}$

g) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x - 1}}$

d) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x - 1}}$

h) $\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{x + 3}$

1.39 Le résultat suivant permet d'établir la convergence ou la divergence de certaines intégrales impropres par comparaison.

Soient f et g deux fonctions continues sur I et telles que

$$f(x) \geq g(x) \geq 0 \quad \forall x \in I.$$

i) Si $\int_I f(x)dx$ converge alors $\int_I g(x)dx$ converge aussi.

ii) Si $\int_I g(x)dx$ diverge alors $\int_I f(x)dx$ diverge aussi.

Utiliser les critères précédents pour décider de la convergence ou de la divergence des intégrales généralisées suivantes.

a) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)} dx$

b) $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$

c) $\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx$

1.40 Fonction Gamma

Pour x réel et strictement positif on définit la fonction Gamma par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

REMARQUE. On montre que l'intégrale généralisée converge quel que soit $x > 0$.

a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel $x > 0$ on a

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

REMARQUE. On considérera comme acquis que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^x e^{-t} = 0$ quel que soit le réel $x \geq 0$.

b) Calculer $\Gamma(1)$.

c) Quelle est la valeur de $\Gamma(n)$ lorsque n est un entier strictement positif?

1.6 Applications du calcul intégral

1.41 Calculer l'aire A du domaine borné délimité par les paires de fonctions suivantes.

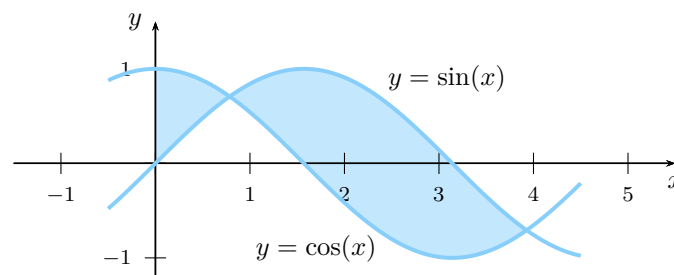
a) $f(x) = 4$ et $g(x) = (x-1)^2$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$

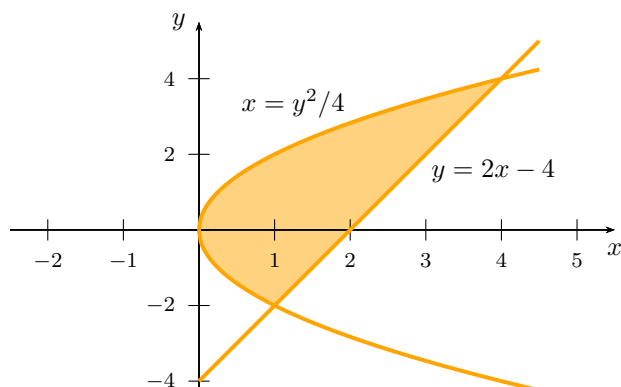
b) $f(x) = 2 - x^2$ et $g(x) = x^2$

d) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ et $g(x) = 0$

1.42 Calculer l'aire A du domaine délimité par les graphes des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ pour x entre 0 et $\frac{5\pi}{4}$.



- 1.43** Calculer l'aire A du domaine borné délimité par la parabole $x = y^2/4$ et la droite $y = 2x - 4$.



- 1.44** Calculer le volume V du solide engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la région délimitée par

a) $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 3$ et $y = 0$ b) $y = x^2 + 2$, $x = 0$, $x = 1$ et $y = \frac{x}{2} + 1$

- 1.45** Calculer le volume V du corps de révolution engendré par rotation autour de l'axe des x de la surface bornée comprise entre la parabole $y = x^2$ et la droite $y = 2 - x$.

- 1.46** Calculer le volume V et l'aire A d'une sphère de rayon r .

INDICATION. Considérer la fonction $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

- 1.47** Calculer le volume V contenu dans une calotte sphérique de hauteur h découpée dans une sphère de rayon r .

- 1.48** Une fourmi se promène sur le graphe de la parabole d'équation $y = x^2/4$. Elle part du sommet de la parabole et avance vers la droite jusqu'à ce que la pente qui lui fait face soit égale à 100 %. Calculer la distance D parcourue par la fourmi.

REMARQUE. Une primitive de $\sqrt{t^2 + 1}$ est $\frac{1}{2} (t\sqrt{t^2 + 1} + \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}))$.

1.49 Trompette de Gabriel

Calculer le volume V et l'aire latérale A du corps de révolution engendré par la rotation autour de l'axe Ox de l'arc d'hyperbole $y = 1/x$ pour $x \geq 1$.

1.7 Exercices supplémentaires et récapitulatifs

- 1.50** Calculer la valeur moyenne des fonctions f proposées sur les intervalles I indiqués.

a) $f(x) = 8 - x^3$ et $I = [-2, 1]$ b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+1}}$ et $I = [6, 12]$

- 1.51** Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on considère les deux fonctions

$$f(x) = 2(x - \lfloor x \rfloor) \quad \text{et} \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- a) Représenter graphiquement $f(x)$ et $F(x)$ pour x dans l'intervalle $[0, 3[$.
b) Donner une expression de $F(x)$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

- 1.52** Calculer l'intégrale indéfinie $\int \frac{dx}{(9+x^2)^2}$ en effectuant le changement de variable $x = 3 \tan(t)$.

Donner votre réponse sous une forme aussi simple que possible.

- 1.53** Calculer la valeur de l'intégrale définie $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx$ en effectuant le changement de variable $x = \sin^2(t)$.

- 1.54** Pour $R \geq r \geq 0$ on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $(0, R)$ et de rayon r (et, donc, d'équation $\mathcal{C} : x^2 + (y - R)^2 = r^2$). Calculer le volume V et l'aire latérale A du tore obtenu par rotation de $\mathcal{C}$ autour de l'axe Ox .

REMARQUE. Une primitive de $\sqrt{1-t^2}$ est $\frac{1}{2} (t\sqrt{1-t^2} + \arcsin(t))$.

- 1.55** Pour quelle valeur du paramètre réel A la quantité $\int_0^\pi (1 - A \sin(x))^2 dx$ est-elle minimale ?

- 1.56** On considère les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$y = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad y = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

appelées, respectivement, *sinus hyperbolique* et *cosinus hyperbolique* et dont les graphes sont représentés ci-dessous à droite.

- a) Vérifier, en développant et simplifiant, l'identité

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- b) Déterminer les dérivées de $\sinh(x)$ et $\cosh(x)$.

- c) Le sinus hyperbolique étant strictement croissant et continu, il définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et possède donc une fonction réciproque appelée *argument sinus hyperbolique*, notée $\operatorname{arsinh}(x)$ et vérifiant

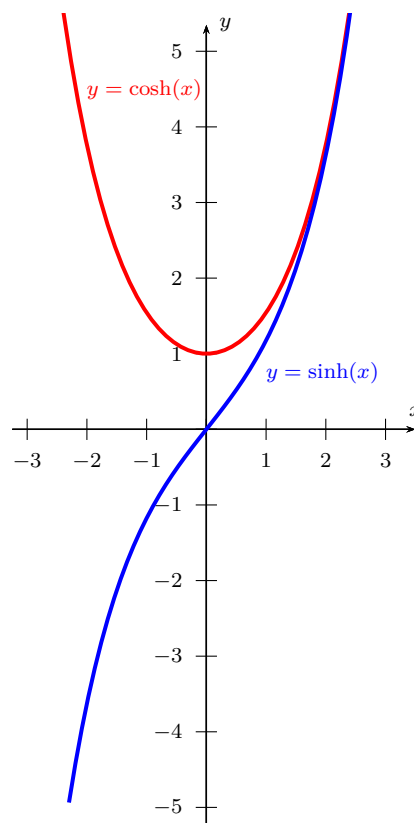
$$y = \operatorname{arsinh}(x) \iff x = \sinh(y).$$

Utiliser la formule de dérivation des fonctions réciproques afin de calculer la fonction dérivée de $\operatorname{arsinh}(x)$.

- d) Déterminer une formule pour $\operatorname{arsinh}(x)$ en résolvant la définition de $\sinh(x)$ par rapport à x .

- e) Calculer une primitive de la fonction

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$



1.57 Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $G(x) = \int_0^x \sin^2(t) dt$.

- a) Déterminer $G'(x)$.
 b) Déterminer le développement limité de G d'ordre 5 au voisinage de $x_0 = 0$.

RAPPEL : $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$.

1.58 Calculer les intégrales indéfinies qui suivent.

- a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)} dx$ c) $\int \frac{2x+3}{x^2-4x+7} dx$ e) $\int \frac{4x-1}{2x^2-2x-12} dx$
 b) $\int \frac{1}{x^2-4x+7} dx$ d) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$ f) $\int \frac{x-1}{x(\sqrt{x}-1)} dx$

1.59 Calculer la valeur des intégrales définies qui suivent.

- a) $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx$ c) $\int_0^1 \arctan(\sqrt{x}) dx$ e) $\int_e^{+\infty} \frac{x}{\ln^2(x)} dx$
 b) $\int_1^e x^2 \ln(x) dx$ d) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{4-x^2} dx$ f) $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1+\cos^2(t)}{t} dt$

1.60 Calculer les intégrales indéfinies qui suivent.

- a) $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$ b) $\int \frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x} dx$

1.61 Calculer les intégrales indéfinies qui suivent.

- a) $\int \frac{(1+x)^3}{\sqrt{x}} dx$ c) $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ e) $\int \frac{3x+8}{(6x-5)^4} dx$
 b) $\int e^x \cos(2x) dx$ d) $\int \frac{x}{\cos^2(x)} dx$ f) $\int \frac{\sin(x) \cos(x)}{1-\cos(x)} dx$

1.62 À l'instant $t = 0$ un mobile se déplaçant horizontalement se trouve à la position $x(0) = 0$ et possède une vitesse instantanée $v(0) = 1$. Si son accélération $a(t)$ est donnée par la fonction

$$a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

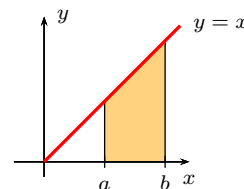
calculer la vitesse $v(t)$ et la position $x(t)$ du mobile pour $t \geq 0$.

1.8 Solutions d'exercices choisis

1.1 a) $\int_1^4 7dx = 21$ b) $\int_{-3}^5 |x| dx = 17$

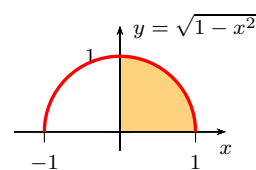
- c) La valeur de l'intégrale est égale à l'aire d'un trapèze :

$$\int_a^b x dx = \frac{a+b}{2} \cdot (b-a) = \frac{b^2-a^2}{2}$$



- d) Pour $-1 \leq x \leq 1$, le graphe représentatif de la fonction définie par $y = \sqrt{1-x^2}$ n'est rien d'autre que la partie supérieure du cercle unité et

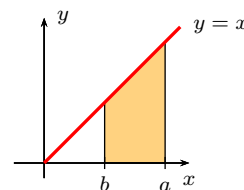
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$



1.2 a) $\int_1^4 -7dx = -21$ b) $\int_4^1 7dx = -21$ c) $\int_{-3}^5 xdx = 8$

- d) Si les bornes vérifient $0 < b < a$ on a

$$\begin{aligned} \int_a^b x dx &= - \int_b^a x dx = -\frac{b+a}{2} \cdot (a-b) \\ &= -\frac{a^2-b^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2} \end{aligned}$$



1.3 a) $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$ b) $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

- 1.4** En utilisant la linéarité de l'intégrale définie on obtient

$$\int_1^3 3f(x)dx = 3 \int_1^3 f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_1^3 f(x)dx = \frac{5}{3}.$$

La relation de Chasles et la linéarité permettent alors d'obtenir

$$\begin{aligned} \int_3^4 2f(x)dx &= 2 \int_3^4 f(x)dx = 2 \left(\int_3^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx \right) \\ &= 2 \left(- \int_1^3 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx \right) = 2 \left(-\frac{5}{3} + 4 \right) = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

- 1.5** En utilisant la linéarité de l'intégrale définie et la relation de Chasles on obtient

$$\int_0^3 (5 - 2f(x))dx = \int_0^3 5dx - 2 \int_0^3 f(x)dx = 5 \cdot 3 - 2 \int_0^3 f(x)dx$$

et

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx \iff \int_0^3 f(x)dx = \int_0^4 f(x)dx - \int_3^4 f(x)dx.$$

En partant de la deuxième intégrale donnée on tire

$$\int_3^4 4f(x)dx = 6 \iff \int_3^4 f(x)dx = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^4 f(x)dx - \int_3^4 f(x)dx = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

et

$$\int_0^3 (5 - 2f(x))dx = 15 - 2 \int_0^3 f(x)dx = 15 - 2 \cdot \frac{7}{2} = 8.$$

1.6 a) $\int_{-2}^1 (|x| - 1) dx = \int_{-2}^0 (-x - 1)dx + \int_0^1 (x - 1)dx = -\frac{1}{2}$

$$b) \int_{-1}^{\frac{1}{2}} [x] dx = \int_{-1}^0 (-1) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} 0 dx = -1$$

$$c) \int_1^2 [x^2] dx = \int_1^{\sqrt{2}} 1 dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2 dx + \int_{\sqrt{3}}^2 3 dx = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

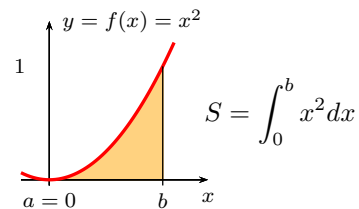
$$d) \int_1^3 [x]^3 dx = \int_1^2 1^3 dx + \int_2^3 2^3 dx = 9$$

$$e) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x^{[x]} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^0 dx + \int_1^{\frac{3}{2}} x^1 dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 1 dx + \int_1^{\frac{3}{2}} x dx = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1^2}{2} = \frac{9}{8}$$

$$f) \int_{-1}^1 \tan(\alpha) d\alpha = 0 \text{ (la fonction tangente est impaire)}$$

- 1.7** a) Pour $b \geq 0$, on cherche à calculer la valeur de l'intégrale définie

$$S = \int_0^b x^2 dx$$



correspondant à l'aire sous la parabole d'équation $y = f(x) = x^2$ dans l'intervalle $[0, b]$.

- ▷ On choisit une subdivision régulière de l'intervalle $[0, b]$ en n sous-intervalles. On a alors

$$x_k = k \cdot \frac{b}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

et, quel que soit k ,

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = k \cdot \frac{b}{n} - (k-1) \cdot \frac{b}{n} = \frac{b}{n} = \Delta x.$$

- ▷ Dans chaque sous-intervalle on choisit son extrémité supérieure comme point d'évaluation :

$$x_k^* = x_k = k \cdot \frac{b}{n}.$$

- ▷ La somme de Riemann correspondant aux choix précédents est

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \left(k \cdot \frac{b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2.$$

- ▷ Pour obtenir S il reste à calculer la limite de la somme précédente lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^3}{6} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} = \frac{b^3}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{b^3}{3}. \end{aligned}$$

- ▷ Ainsi, quel que soit $b \geq 0$, on a

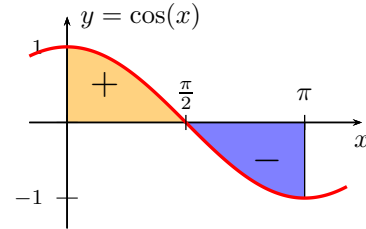
$$\int_0^b f(x) dx = \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$$

b) $\int_{-b}^b x^2 dx = \frac{2b^3}{3}$ car $f(x) = x^2$ est paire.

c) i) $\int_3^4 x^2 dx = \frac{37}{3}$ ii) $\int_4^{-2} x^2 dx = -24$ iii) $\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$

1.8

a) $\int_0^\pi \cos(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos(t) dt = 0$



b) Le sinus et le cosinus étant égaux à un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ près on a

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt$$

et

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) + \sin^2(t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 dt = \pi.$$

c) Les arguments précédents s'appliquent quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(nt) dt = \pi.$$

1.9

a) Quel que soit $x \in [a, b]$, on a $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. Ainsi

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{et} \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

b) L'égalité a lieu si et seulement si f ne change pas de signe dans l'intervalle $[a, b]$.

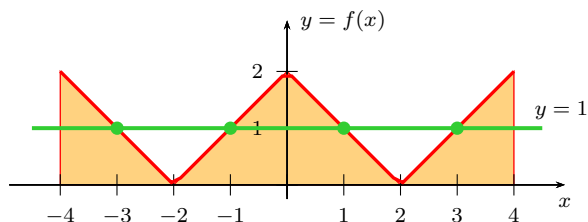
1.10

La valeur moyenne de la fonction $f(x) = |2 - |x||$ sur l'intervalle $I = [-4, 4]$ est

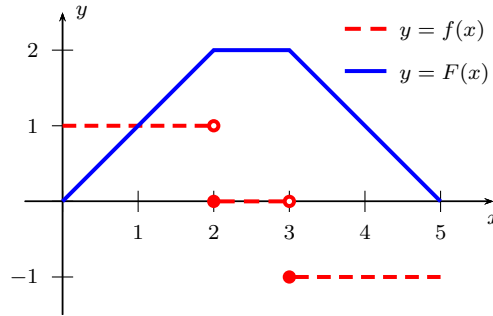
$$\begin{aligned} f_{\text{moy}} &= \frac{1}{8} \int_{-4}^4 f(x) dx = \frac{1}{8} \int_{-4}^4 |2 - |x|| dx = \frac{1}{4} \int_0^4 |2 - x| dx \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_0^2 (2 - x) dx + \int_2^4 (x - 2) dx \right) = \frac{1}{2} \int_0^2 (2 - x) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Il existe quatre valeurs pour $c \in I$ telles que $f(c) = 1$:

$$c = -3, c = -1, c = 1 \text{ et } c = 3.$$



1.11 a) Le graphe de $f(x)$ est représenté en traitillé rouge ci-dessous.



b) i) $\int_0^4 f(x)dx = 1$ ii) $\int_1^5 f(x)dx = -1$ iii) $\int_4^2 f(x)dx = 1$

c) Le graphe de $F(x)$ est représenté en trait plein bleu ci-dessus.

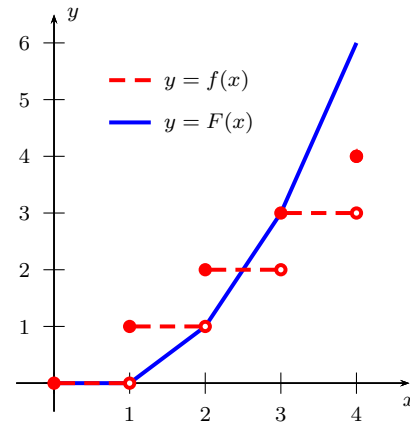
1.12 a) Le graphe de $f(x)$ est représenté en traitillé rouge et celui de $F(x)$ en trait plein bleu ci-contre.

b) $F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}, n \in \mathbb{N}$

c) $F(x) = F(\lfloor x \rfloor) + (x - \lfloor x \rfloor)\lfloor x \rfloor$

$$= \frac{\lfloor x \rfloor(\lfloor x \rfloor - 1)}{2} + (x - \lfloor x \rfloor)\lfloor x \rfloor$$

$$= \frac{\lfloor x \rfloor}{2} (2x - \lfloor x \rfloor - 1), x \in \mathbb{R}_+$$



1.13 a) $F(x) = \frac{x^3 - 13}{3}$

b) $F(x) = 2\sqrt{x} - 6$

1.14 C'est vrai car la dérivée de $\frac{x}{1+x^2}$ est bien $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

1.15 Dans toutes les solutions ci-dessous, C désigne une constante réelle quelconque.

a) $2x^2 + 3x + C$

e) $\frac{2}{3}\sqrt{t^3} - \cos(t) + C$

i) $\frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) + C$

b) $\frac{9}{4}t^4 - 2t^2 + 3t + C$

f) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$

j) $\arctan(x) + C$

c) $\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C$

g) $-e^{-t} + C$

k) $\frac{1}{3}\sin(3t) + C$

d) $\frac{x^6}{3} + C$

h) $\tan(t) + C$

l) $\frac{-A}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) + C$

1.16 Dans toutes les solutions ci-dessous, C désigne une constante réelle quelconque.

- | | | |
|-----------------------------------|---------------------------------|--|
| a) $\frac{5}{7}\sqrt[5]{x^7} + C$ | e) $\frac{1}{2}\ln 2x-1 + C$ | i) $\sin(t) - \frac{1}{3}\sin^3(t) + C$ |
| b) $\frac{(x-1)^9}{9} + C$ | f) $x + \ln x+1 + C$ | j) $\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$ |
| c) $2\ln x + C$ | g) $\frac{(3x-2)^{18}}{54} + C$ | k) $\frac{1}{2}e^{2\sin(x)} + C$ |
| d) $-\frac{1}{3}e^{-3x+2} + C$ | h) $-\frac{3^{-x}}{\ln(3)} + C$ | l) $-\frac{1}{\sin(x)} + C$ |

———— Solutions détaillées ————

- a) $\int \sqrt[5]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{5}} dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + C = \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + C = \frac{5}{7}\sqrt[5]{x^7} + C$
- b) $\int (x-1)^8 dx = \int \left(\frac{(x-1)^9}{9}\right)' dx = \frac{(x-1)^9}{9} + C$
- c) $\int \frac{2}{x} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx = 2\ln|x| + C$
- d) $\int e^{-3x+2} dx = \int \left(-\frac{1}{3}e^{-3x+2}\right)' dx = -\frac{1}{3}e^{-3x+2} + C$
- e) $\int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x-1} dx = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$
- f) $\int \frac{x+2}{x+1} dx = \int \frac{(x+1)+1}{x+1} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = x + \ln|x+1| + C$
- g) $\int (3x-2)^{17} dx = \frac{1}{3} \int \underbrace{3}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(3x-2)^{17}}_{f(x)^{17}} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-2)^{17+1}}{17+1} + C = \frac{(3x-2)^{18}}{54} + C$
- h) $\int 3^{-x} dx = \int e^{-\ln(3)x} dx = -\frac{1}{\ln(3)} \int -\ln(3)e^{-\ln(3)x} dx = -\frac{e^{-\ln(3)x}}{\ln(3)} + C$
 $= -\frac{3^{-x}}{\ln(3)} + C$
- i) $\int \cos^3(t) dt = \int \cos(t) (1 - \sin^2(t)) dt = \int \underbrace{\cos(t)}_{(\sin(t))'} dt - \int \underbrace{\cos(t) \sin^2(t)}_{(\sin^3(t)/3)'} dt$
 $= \sin(t) - \frac{1}{3}\sin^3(t) + C$
- j) $\int \frac{2}{4+x^2} dx = \int \frac{2}{4\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)} dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \int \left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)' dx$
 $= \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$
- k) $\int e^{2\sin(x)} \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int \left(e^{2\sin(x)}\right)' dx = \frac{1}{2}e^{2\sin(x)} + C$

$$l) \int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} dx = \int \underbrace{\cos(x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sin^2(x)}}_{f(x)^{-2}} dx = - \int \left(\frac{1}{\sin(x)} \right)' dx = -\frac{1}{\sin(x)} + C$$

1.17 Dans toutes les solutions ci-dessous, C désigne une constante réelle quelconque.

- | | |
|--|---|
| a) $\frac{2}{3}\sqrt{x}(x+3) + C$ | g) $\frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + C$ |
| b) $x - 5 \ln x+5 + C$ | h) $\frac{-1}{2(x^2+6x)} + C$ |
| c) $\frac{1}{4} \sin^4(t) + C$ | i) $\frac{1}{3} \ln^3(x) + C$ |
| d) $\frac{2}{3}x^{3/2} - 2x + C$ | j) $-\frac{1}{6}e^{-3x^2+1} + C$ |
| e) $\frac{1}{3} \sin^3(x) - \frac{1}{5} \sin^5(x) + C$ | k) $\frac{1}{3} \tan^3(t) + C$ |
| f) $\frac{1}{200}(x^2-1)^{100} + C$ | l) $2 \ln x+1 - x + C$ |

———— Solutions détaillées ————

- a) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$
 $= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x}(x+3) + C$
- b) $\int \frac{x}{x+5} dx = \int \frac{x+5-5}{x+5} dx = \int dx - 5 \int \frac{dx}{x+5} = x - 5 \ln|x+5| + C$
- c) $\int \sin^3(t) \cos(t) dt = \frac{1}{4} \int \underbrace{4 \sin^3(t) \cos(t)}_{(\sin^4(t))'} dt = \frac{1}{4} \sin^4(t) + C$
- d) $\int \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} dx = \int \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2} dx = \int (\sqrt{x}-2) dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - 2x + C$
- e) $\int \sin^2(x) \cos^3(x) dx = \int \sin^2(x) (1 - \sin^2(x)) \cos(x) dx$
 $= \int \underbrace{\sin^2(x) \cos(x)}_{(\sin^3(x)/3)'} dx - \int \underbrace{\sin^4(x) \cos(x)}_{(\sin^5(x)/5)'} dx$
 $= \frac{1}{3} \sin^3(x) - \frac{1}{5} \sin^5(x) + C$
- f) $\int x(x^2-1)^{99} dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{(2x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(x^2-1)^{99}}_{f(x)^{99}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-1)^{99+1}}{99+1} + C = \frac{(x^2-1)^{100}}{200} + C$
- g) $\int \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^2} dx = \frac{1}{\pi} \int -\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int \left(\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \right)' dx = \frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + C$
- h) $\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^2} dx = -\frac{1}{2} \int \left(-\frac{2x+6}{(x^2+6x)^2} \right) dx = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x^2+6x} \right)' dx = \frac{-1}{2(x^2+6x)} + C$

$$\text{i)} \int \frac{\ln^2(x)}{x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3 \ln^2(x)}{x} dx = \frac{1}{3} \int (\ln^3(x))' dx = \frac{1}{3} \ln^3(x) + C$$

$$\text{j)} \int x e^{-3x^2+1} dx = -\frac{1}{6} \int \underbrace{(-6x)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^{-3x^2+1}}_{e^{f(x)}} dx = -\frac{1}{6} e^{-3x^2+1} + C$$

$$\text{k)} \int \frac{\sin^2(t)}{\cos^4(t)} dt = \int \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} \cdot \frac{1}{\cos^2(t)} dt = \int \tan^2(t) \cdot (\tan(t))' dt = \frac{\tan^3(t)}{3} + C$$

$$\begin{aligned} \text{l)} \int \frac{1-x}{1+x} dx &= \int -\frac{x-1}{1+x} dx = -\int \frac{(x+1)-2}{1+x} dx = -\int dx + 2 \int \frac{1}{1+x} dx \\ &= -x + 2 \ln|1+x| + C = -x + \ln((1+x)^2) + C \end{aligned}$$

$$\mathbf{1.18} \quad \text{a)} \int_{-2}^4 5dx = 5x \Big|_{-2}^4 = 20 - (-10) = 30$$

$$\text{b)} \int_4^{-3} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_4^{-3} = \frac{9}{2} - \frac{16}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$\text{c)} \int_0^\pi \sin(\alpha) d\alpha = -\cos(\alpha) \Big|_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$$

$$\text{d)} \int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x} = \ln(-x) \Big|_{-3}^{-2} = \ln(2) - \ln(3) = \ln(2/3)$$

$$\text{e)} \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(t) dt = \frac{1}{2} \sin^2(t) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} (\sin^2(2\pi) - \sin^2(0)) = 0$$

$$\text{f)} \int_0^1 e^{t-1} dt = e^{t-1} \Big|_0^1 = e^0 - e^{-1} = \frac{e-1}{e}$$

$$\mathbf{1.19} \quad \text{a)} \int_{-1}^0 x(x^2-1)^5 dx = \frac{1}{12} (x^2-1)^6 \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{12}$$

$$\text{b)} \int_{\frac{3\pi}{4}}^\pi \tan(t) dt = -\ln(-\cos(t)) \Big|_{\frac{3\pi}{4}}^\pi = -\frac{\ln(2)}{2} \quad (\cos(t) < 0 \text{ pour } 3\pi/4 \leq t \leq \pi)$$

$$\text{c)} \int_2^3 \frac{1}{x \ln(x)} dx = \ln(\ln(x)) \Big|_2^3 = \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2)) = \ln\left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \int_0^{\pi/6} \tan^3(t) dt &= \int_0^{\pi/6} \frac{\sin(t)(1-\cos^2(t))}{\cos^3(t)} dt = \int_0^{\pi/6} \left(\frac{\sin(t)}{\cos^3(t)} - \tan(t) \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2 \cos^2(t)} + \ln(\cos(t)) \right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{6} + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \int_4^{10} \frac{2x+7}{(x-1)^2} dx &= \int_4^{10} \frac{2(x-1)+9}{(x-1)^2} dx = \int_4^{10} \frac{2}{x-1} dx + \int_4^{10} \frac{9}{(x-1)^2} dx \\
 &= \left[2 \ln(x-1) - \frac{9}{x-1} \right]_4^{10} = \ln(9) + 2 = 2(\ln(3) + 1) \\
 \text{f) } \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5} &= \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \arctan(x+2) \Big|_0^1 = \arctan(3) - \arctan(2)
 \end{aligned}$$

1.20 a) $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx = \frac{\arctan(x)^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{32}$

b) $\int_1^2 \sqrt{x-1} dx = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{2}{3}$

c) $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan^2(t)}{1-\sin^2(t)} dt = \frac{\tan^3(t)}{3} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{3}$

d) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{1-\cos(t)} dt = \ln(1-\cos(t)) \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = \ln(2)$

e) $\int_1^2 4(2x-3)^{12} dx = \frac{2}{13}(2x-3)^{13} \Big|_1^2 = \frac{4}{13}$

f) $\int_1^3 3^x dx = \frac{3^x}{\ln(3)} \Big|_1^3 = \frac{24}{\ln(3)}$

1.21 Soient F une primitive de f (F existe car f est continue) et C une constante réelle.

a) $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = \frac{d}{dx} (F(x) + C) = F'(x) = f(x)$

b) $\frac{d}{dx} \int_0^1 f(x) dx = 0$ car $\int_0^1 f(x) dx$ est un nombre

c) $\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = \frac{d}{dx} (F(x) - F(0)) = F'(x) = f(x)$

d) $\frac{d}{dx} \int_{2x}^{x^2} f(t) dt = \frac{d}{dx} (F(x^2) - F(2x)) = 2xF'(x^2) - 2F'(2x)$
 $= 2xf(x^2) - 2f(2x)$

1.22 a) $G(\pi/4) = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(t) dt = \sin(t) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

b) $G'(x) = \frac{d}{dx} \int_x^{2x} \cos(t) dt = (2x)' \cos(2x) - (x)' \cos(x) = 2\cos(2x) - \cos(x)$.

c) Le polynôme de Taylor d'ordre 3 d'une fonction G au voisinage de x_0 est

$$T_3(x) = G(0) + G'(0)x + \frac{G''(0)}{2}x^2 + \frac{G'''(0)}{6}x^3.$$

À l'aide du résultat du point précédent on obtient successivement

$$\triangleright G(0) = \int_0^0 \cos(t)dt = 0,$$

$$\triangleright G'(0) = (2 \cos(2x) - \cos(x)) \Big|_0 = 2 - 1 = 1,$$

$$\triangleright G''(0) = \frac{d}{dx} (2 \cos(2x) - \cos(x)) \Big|_0 = (-4 \sin(2x) + \sin(x)) \Big|_0 = 0 - 0 = 0,$$

$$\triangleright G'''(0) = \frac{d}{dx} (-4 \sin(2x) + \sin(x)) \Big|_0 = (-8 \cos(2x) + \cos(x)) \Big|_0 = -7,$$

et le polynôme de Taylor d'ordre 3 de G au voisinage de $x_0 = 0$ est

$$T_3(x) = x - \frac{7}{6}x^3.$$

1.23 a) Le domaine limité supérieurement par le graphe de h et inférieurement par la droite horizontale d'équation $y = 1$ est représenté en figure 1.1.

b) Son aire $\mathcal{A}$ est égale à

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{4\ln(2)} (h(x) - 1) dx = \int_0^{\frac{4\ln(2)}{5}} (f(x) - 1) dx + \int_{\frac{4\ln(2)}{5}}^{4\ln(2)} (g(x) - 1) dx \\ &= \int_0^{\frac{4\ln(2)}{5}} f(x) dx + \int_{\frac{4\ln(2)}{5}}^{4\ln(2)} g(x) dx - \int_0^{4\ln(2)} 1 dx \\ &= \int_0^{\frac{4\ln(2)}{5}} e^x dx + \int_{\frac{4\ln(2)}{5}}^{4\ln(2)} 2e^{-\frac{x}{4}} dx - \int_0^{4\ln(2)} 1 dx \\ &= e^x \Big|_0^{\frac{4\ln(2)}{5}} - 8e^{-\frac{x}{4}} \Big|_{\frac{4\ln(2)}{5}}^{4\ln(2)} - x \Big|_0^{4\ln(2)} \\ &= 2^{\frac{4}{5}} - 1 - 8 \left(2^{-1} - 2^{-\frac{1}{5}} \right) - (4\ln(2) - 0) \\ &= 5 \left(2^{\frac{4}{5}} - 1 \right) - 4\ln(2) \approx 0,933 \end{aligned}$$

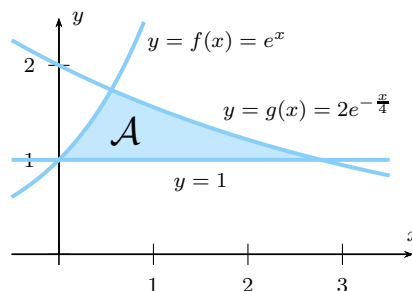


Figure 1.1 – Représentation graphique du domaine de l'exercice 1.23.

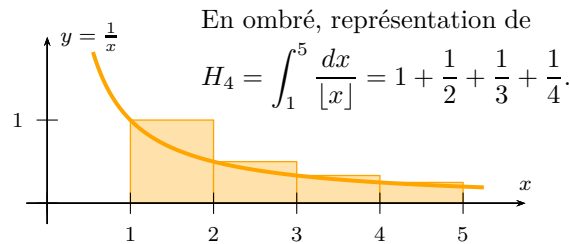


Figure 1.2 – Interprétation géométrique des nombres harmoniques de l'exercice 1.24.

- 1.24** a) Pour tout réel $x \geq 1$ on a $[x] \leq x$ et $\frac{1}{[x]} \geq \frac{1}{x}$ et, quel que soit l'entier $n \geq 1$, cette dernière relation d'ordre est conservée en intégrant les deux fonctions entre 1 et $n+1$:

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{[x]} \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x}.$$

De plus, comme illustré graphiquement en figure 1.2, on a

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{[x]} = \int_1^2 dx + \int_2^3 \frac{dx}{2} + \int_3^4 \frac{dx}{3} + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{dx}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n$$

alors que

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(x) \Big|_1^{n+1} = \ln(n+1).$$

Ainsi

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln(n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- b) En passant à la limite lorsque n tend vers l'infini on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) \rightarrow +\infty$$

et la suite harmonique diverge.

- 1.25** Dans toutes les solutions ci-dessous, C désigne une constante réelle quelconque.

- a) $\frac{2}{15}(x-1)^{3/2}(3x+2) + C$ c) $-\frac{\sqrt{9-x^2}(18+x^2)}{3} + C$
- b) $2(\sqrt{x} - \arctan(\sqrt{x})) + C$ d) $\frac{3}{2} \ln(x^{2/3} + 1) + C$

_____ Solutions détaillées _____

- a) On considère le changement de variable $x = \varphi(t) = t^2 + 1$ avec $t \geq 0$. On obtient alors $dx/dt = (t^2 + 1)' = 2t$ puis $dx = 2t dt$ et l'intégrale devient

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x-1} dx &= \int (t^2 + 1) \sqrt{(t^2 + 1) - 1} \cdot 2t dt = 2 \int (t^2 + 1) t^2 dt \\ &= 2 \int (t^4 + t^2) dt = \frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + C. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer t par $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-1}dx &= \frac{2(\sqrt{x-1})^5}{5} + \frac{2(\sqrt{x-1})^3}{3} + C = 2(x-1)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x-1}{5} + \frac{1}{3}\right) + C \\ &= \frac{2}{15}(x-1)^{\frac{3}{2}}(3x+2) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

b) On considère le changement de variable $x = \varphi(t) = t^2$. On a alors

$$\frac{dx}{dt} = (t^2)' = 2t \quad \text{et} \quad dx = 2tdt.$$

L'intégrale devient

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx &= \int \frac{\sqrt{t^2}}{1+t^2} \cdot 2tdt = \int \frac{2t^2}{1+t^2}dt = 2 \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt \\ &= 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 2(t - \arctan(t)) + C.\end{aligned}$$

Pour $t \geq 0$ on a $t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$ et en remplaçant le résultat précédent on obtient

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = 2(\sqrt{x} - \arctan(\sqrt{x})) + C.$$

c) On considère le changement de variable $x = \varphi(t) = 3\sin(t)$. On a alors

$$\frac{dx}{dt} = (3\sin(t))' = 3\cos(t) \quad \text{et} \quad dx = 3\cos(t)dt.$$

En remplaçant dans l'intégrale on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}dx &= \int \frac{27\sin^3(t)}{\sqrt{9-9\sin^2(t)}} \cdot 3\cos(t)dt = \int 27\sin^3(t)dt \\ &= 27 \int \sin(t)(1-\cos^2(t))dt = 27 \left(-\cos(t) + \frac{\cos^3(t)}{3}\right) + C.\end{aligned}$$

On revient à la variable initiale en remplaçant t par $\varphi^{-1}(x) = \arcsin(x/3)$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}dx &= 9 \left(-3\cos(\arcsin(x/3)) + \cos^3(\arcsin(x/3))\right) + C \\ &= 9 \left(-3\sqrt{1-(x/3)^2} + \left(\sqrt{1-(x/3)^2}\right)^3\right) + C \\ &= 9\sqrt{9-x^2} \left(-1 + \frac{9-x^2}{27}\right) + C \\ &= -\frac{\sqrt{9-x^2}(18+x^2)}{3} + C, C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

REMARQUE. $\cos(\arcsin(t)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(t))} = \sqrt{1-t^2}$.

- d) On pose $x = \varphi(t) = t^3$. On a alors $dx/dt = (t^3)' = 3t^2$ et $dx = 3t^2 dt$. En effectuant le changement de variable on obtient

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{3t^2 dt}{t^3 + \sqrt[3]{t^3}} = 3 \int \frac{t}{t^2 + 1} dt = \frac{3}{2} \ln(t^2 + 1) + C.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer t par $\varphi^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ pour obtenir

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} \ln((\sqrt[3]{x})^2 + 1) + C = \frac{3}{2} \ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1.26 Dans toutes les solutions ci-dessous, C désigne une constante réelle quelconque.

- a) $\cos(t) - 2 \arctan(\cos(t)) + C$ c) $-\frac{1}{3} \sqrt{9 - x^2} (18 + x^2) + C$
 b) $2 \arcsin\left(\frac{e^{x/2}}{2}\right) + C$ d) $2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C$

_____ Solutions détaillées _____

- a) Comme proposé, on pose $u = \cos(t)$. On a alors $du = -\sin(t)dt$ et l'intégrale peut être réécrite comme

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3(t)}{1 + \cos^2(t)} dt &= - \int \frac{\sin^2(t)}{1 + \cos^2(t)} \cdot (-\sin(t)) dt \\ &= - \int \frac{1 - \cos^2(t)}{1 + \cos^2(t)} \cdot (-\sin(t)) dt \end{aligned}$$

Il est maintenant possible d'effectuer la substitution pour obtenir

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3(t)}{1 + \cos^2(t)} dt &= - \int \frac{1 - \cos^2(t)}{1 + \cos^2(t)} \cdot (-\sin(t)) dt = - \int \frac{1 - u^2}{1 + u^2} du \\ &= \int \frac{(u^2 + 1) - 2}{u^2 + 1} du = u - 2 \arctan(u) + C \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à substituer $\cos(t)$ à u pour obtenir

$$\int \frac{\sin^3(t)}{1 + \cos^2(t)} dt = \cos(t) - 2 \arctan(\cos(t)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- b) On introduit la variable $t = e^{x/2}$. On a alors

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx} (e^{x/2}) = \frac{1}{2} e^{x/2} \quad \text{et} \quad e^{x/2} dx = 2dt$$

En effectuant la substitution on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{x/2}}{\sqrt{4 - e^x}} dx &= \int \frac{2}{\sqrt{4 - t^2}} dt = \int \frac{1}{\sqrt{1 - (t/2)^2}} dt \\ &= 2 \arcsin(t/2) + C = 2 \arcsin\left(\frac{e^{x/2}}{2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c) On pose $t = \sqrt{9 - x^2}$. On a alors

$$\frac{dt}{dx} = [\sqrt{9 - x^2}]' = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}} \quad \text{d'où} \quad dt = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}} dx$$

On a aussi $x^2 = 9 - t^2$ et, en effectuant la substitution, on obtient

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{9 - x^2}} dx &= - \int x^2 \cdot \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}} dx = - \int (9 - t^2) dt = -9t + \frac{t^3}{3} + C \\ &= -9\sqrt{9 - x^2} + \frac{(\sqrt{9 - x^2})^3}{3} + C \\ &= \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3} (-27 + (9 - x^2)) + C \\ &= -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{3} (18 + x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

d) On pose $t = \sqrt{x}$. On a alors $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ et on peut réécrire l'intégrale comme suit.

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \int \frac{dx}{(\sqrt{x} + 1)\sqrt{x}} = \int \frac{2}{\sqrt{x} + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

Il est maintenant possible d'effectuer la substitution pour obtenir

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \int \frac{2}{t + 1} dt = 2 \ln(t + 1) + C = 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1.27 a) En posant $x = \varphi(t) = t^2$, avec $t \geq 0$, on a $dx = 2t dt$ et les nouvelles bornes d'intégration sont $\varphi^{-1}(1) = \sqrt{1} = 1$ et $\varphi^{-1}(4) = \sqrt{4} = 2$. On obtient ainsi

$$\int_1^4 \frac{dx}{4\sqrt{x} + x} = \int_1^2 \frac{2t dt}{4t + t^2} = 2 \ln(4 + t) \Big|_1^2 = 2(\ln(4 + 2) - \ln(5)) = 2 \ln(6/5).$$

b) On pose $t = f(x) = \sqrt{x}$. On a alors $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ ou encore $dx = 2\sqrt{x} dt = 2t dt$. Les nouvelles bornes d'intégration sont $f(0) = \sqrt{0} = 0$ et $f(9) = \sqrt{9} = 3$ et en effectuant la substitution on obtient

$$\int_0^9 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx = \int_0^3 \frac{2t dt}{1 + t} = \left[2t - 2 \ln(1 + t) \right]_0^3 = 6 - 4 \ln(2).$$

c) En posant $t = f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ on a $x = f^{-1}(t) = \ln(t^2 + 1)$ et $dx = \frac{2t dt}{t^2 + 1}$. Les nouvelles bornes sont $f(0) = \sqrt{e^0 - 1} = 0$ et $f(\ln(2)) = \sqrt{e^{\ln(2)} - 1} = 1$ et l'intégrale devient

$$\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1} dx = \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt = 2 \int_0^1 \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} dt = 2 \left[t - \arctan(t) \right]_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

DÉVELOPPEMENT ALTERNATIF. Si on essaie la substitution $t = f(x) = e^x$ on obtient $dt = e^x dx = t dx$ et $dx = dt/t$. Les nouvelles bornes sont, respectivement, $t = e^0 = 1$ et $t = e^{\ln(2)} = 2$ et, en substituant, on obtient

$$\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1} dx = \int_1^2 \sqrt{t - 1} \frac{dt}{t} = \int_1^2 \frac{\sqrt{t - 1}}{t} dt.$$

À ce stade on effectue le changement de variable $t = \varphi(u) = u^2 + 1$ (équivalent à la substitution $u = f(t) = \sqrt{t - 1}$). On a alors $dt = 2u du$ et des nouvelles bornes d'intégration égales, respectivement, à $u = \sqrt{1 - 1} = 0$ et $u = \sqrt{2 - 1} = 1$. Ensuite

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{t - 1}}{t} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{u^2 + 1 - 1}}{u^2 + 1} \cdot 2u du = \int_0^1 \frac{2u^2}{u^2 + 1} du$$

et la fin du calcul est identique à celle du premier développement.

- d) On pose $x = \varphi(t) = t^3$, on a alors $t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, $dx = 3t^2 dt$ et l'intégrale devient

$$\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2x} = \int_{\sqrt[3]{1}}^{\sqrt[3]{8}} \frac{3t^2 dt}{t + 2t^3} = \frac{3}{4} \int_1^2 \frac{4t}{1 + 2t^2} dt = \frac{3}{4} \ln(1 + 2t^2) \Big|_1^2 = \frac{3 \ln(3)}{4}.$$

1.28 Dans toutes les solutions ci-dessous, C désigne une constante réelle quelconque.

- | | |
|---|--|
| a) $(x - 1)e^x + C$ | e) $-\frac{(x^2 + 1)}{2}e^{-x^2} + C$ |
| b) $\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \left(\ln(x) - \frac{2}{3} \right) + C$ | f) $x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$ |
| c) $2x \cos(x) + (x^2 - 2) \sin(x) + C$ | g) $-(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$ |
| d) $\frac{1}{2}(t + \cos(t) \sin(t)) + C$ | h) $\frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + C$ |

———— Solutions détaillées ————

- a) Afin d'intégrer xe^x on effectue une intégration par parties en posant

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g'(x) = e^x$$

ce qui nous donne

$$f'(x) = 1 \quad \text{et} \quad g(x) = e^x.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx = xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C = (x - 1)e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Afin d'intégrer $\sqrt{x} \ln(x)$ par parties on pose

$$u = \ln(x) \quad \text{et} \quad dv = \sqrt{x} dx$$

ce qui nous donne

$$du = \frac{1}{x} dx \quad \text{et} \quad v = \frac{2x^{3/2}}{3}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \ln(x) dx &= \frac{2x^{\frac{3}{2}} \ln(x)}{3} - \int \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3x} dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}} \ln(x)}{3} - \frac{2}{3} \int \sqrt{x} dx \\ &= \frac{2x^{\frac{3}{2}} \ln(x)}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \left(\ln(x) - \frac{2}{3} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c) Afin d'intégrer $x^2 \cos(x)$ par parties on pose, dans un premier temps,

$$u = x^2 \quad \text{et} \quad dv = \cos(x) dx$$

ce qui nous donne

$$du = 2x dx \quad \text{et} \quad v = \sin(x).$$

On obtient alors

$$\int x^2 \cos(x) dx = x^2 \sin(x) - 2 \int x \sin(x) dx.$$

Pour intégrer $x \sin(x)$ une deuxième intégration par parties (déjà faite en cours) est nécessaire. On obtient alors

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos(x) dx &= x^2 \sin(x) - 2(-x \cos(x) + \sin(x)) + C \\ &= 2x \cos(x) + (x^2 - 2) \sin(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

d) Le calcul de $\int \cos^2(t) dt$ mime celui effectué au cours pour calculer $\int \sin^2(x) dx$.

e) Pour le calcul de $\int x^3 e^{-x^2} dx$ on pose

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g'(x) = x e^{-x^2}$$

ce qui nous donne

$$f'(x) = 2x \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2}.$$

f) Pour le calcul de $\int \arctan(x) dx$ on pose $u = \arctan(x)$ et $dv = dx$.

g) Pour le calcul de $\int x^2 e^{-x} dx$ on pose $u = x^2$ et $dv = e^{-x} dx$ puis on fait une deuxième intégration par parties.

h) Pour le calcul de $\int e^x \sin(x) dx$ on fait une 1^{re} intégration par parties en posant $f(x) = e^x$ et $g'(x) = \sin(x)$ puis une 2^e intégration par parties selon le même schéma de décomposition.

REMARQUE. On peut aussi poser $f(x) = \sin(x)$ et $g'(x) = e^x$.

1.29 a) $\left[\sin(t) - t \cos(t) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \pi - 1$ c) $\left[x \tan(x) + \ln(\cos(x)) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln(2)$
 b) $\left[\frac{x^2}{4} (2 \ln(x) - 1) \right]_1^2 = 2 \ln(2) - \frac{3}{4}$ d) $\left[\frac{x^3}{3} + e^x (x^2 - 2x + 2) \right]_0^1 = e - \frac{5}{3}$

———— Solutions détaillées ————

a) En posant $u = t$ et $dv = \sin(t)dt$ on obtient $du = dt$ et $v = -\cos(t)$ puis

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t \sin(t) dt = -t \cos(t) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos(t) dt = \left[\sin(t) - t \cos(t) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \pi - 1.$$

b) On pose $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = x$. On a alors $f'(x) = 1/x$ et $g(x) = x^2/2$ puis

$$\int_1^2 x \ln(x) dx = \frac{x^2 \ln(x)}{2} \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = 2 \ln(2) - \frac{3}{4}.$$

c) Toujours par parties, si on pose $f(x) = x$ et $g'(x) = 1/\cos^2(x)$ on a $f'(x) = 1$, $g(x) = \tan(x)$ et

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2(x)} dx = x \tan(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x) dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln(\cos(x)) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln(2).$$

d) Ici, deux intégrations par parties successives sont nécessaires. Pour la première, on pose $u = x^2$ et $dv = (e^x + 1)dx$ ce qui aboutit à $du = 2x dx$ et $v = e^x + x$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 (e^x + 1)x^2 dx &= x^2(e^x + x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (e^x + x) \cdot 2x dx \\ &= x^2(e^x + x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx - 2 \int_0^1 x^2 dx \\ &= x^2(e^x + x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx - \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1. \end{aligned}$$

Une deuxième intégration par parties permet d'intégrer $x e^x$ afin d'obtenir la primitive $(x - 1)e^x$ (voir l'exercice précédent). Au final

$$\begin{aligned} \int_0^1 (e^x + 1)x^2 dx &= x^2(e^x + x) \Big|_0^1 - 2(x - 1)e^x \Big|_0^1 - \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1 \\ &= \left[x^2 e^x + x^3 - 2x e^x + 2e^x - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + e^x (x^2 - 2x + 2) \right]_0^1 = e - \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

1.30 Dans toutes les solutions ci-dessous, C désigne une constante réelle quelconque.

$$\text{a) } 2(\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x} \cos(\sqrt{x})) + C \quad \text{b) } 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C$$

———— Solutions détaillées ————

- a) Pour intégrer $\sin(\sqrt{x})$ on commence par faire un changement de variable en posant $x = \varphi(t) = t^2$ avec $t \geq 0$. On a alors $dx = 2t dt$ et l'intégrale devient

$$\int \sin(\sqrt{x}) dx = \int \sin(\sqrt{t^2}) 2t dt = 2 \int t \sin(t) dt$$

On enchaîne avec une intégration par parties on posant

$$u = t \quad \text{et} \quad dv = \sin(t) dt$$

ce qui nous donne

$$du = dt \quad \text{et} \quad v = -\cos(t).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \int \sin(\sqrt{x}) dx &= 2 \int t \sin(t) dt = 2 \left(-t \cos(t) + \int \cos(t) dt \right) \\ &= 2(\sin(t) - t \cos(t)) + C \end{aligned}$$

et en remplaçant t par $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$ on a

$$\int \sin(\sqrt{x}) dx = 2(\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x} \cos(\sqrt{x})) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- 1.31** a) En posant $u = x^n$ et $dv = e^x dx$ on a $du = nx^{n-1} dx$ et $v = e^x$ et l'intégrale devient

$$\int x^n e^x dx = uv - \int v du = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx.$$

$$\text{b) } \int x^4 e^x dx = (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\text{c) } \int x^n e^x dx = e^x \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} (-1)^{n-k} x^k \right) + C = (-1)^n e^x \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} (-x)^k \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- 1.32** Soit f une fonction dérivable et strictement croissante dans un intervalle $I = [a, b]$ et f^{-1} sa fonction réciproque.

$$\text{a) Pour montrer que } \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x) dx$$

▷ on commence par le changement de variable $y = f(x)$. On a alors $dy = f'(x) dx$ et

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy = \int_{f^{-1}(f(a))}^{f^{-1}(f(b))} f^{-1}(f(x)) f'(x) dx = \int_a^b x f'(x) dx.$$

▷ puis on enchaîne avec une intégration par parties on posant

$$u = x \quad \text{et} \quad dv = f'(x) dx \quad \text{d'où} \quad du = dx \quad \text{et} \quad v = f(x)$$

pour obtenir

$$\int_a^b x f'(x) dx = x f(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) dx = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x) dx.$$

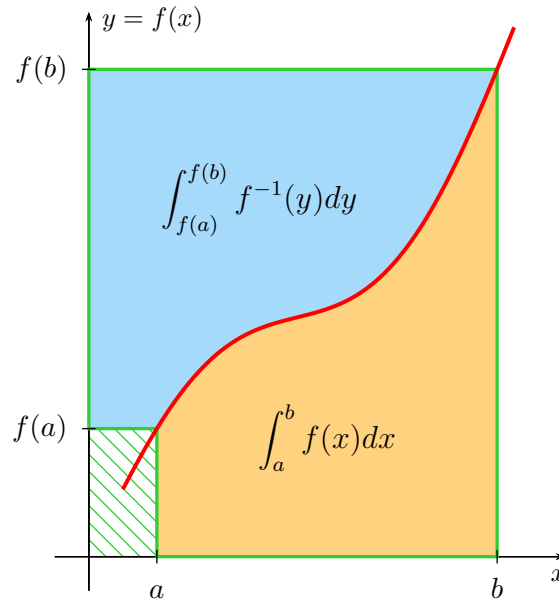


Figure 1.3 – Interprétation géométrique de la formule de l'exercice 1.32.

- b) Pour l'interprétation géométrique on suppose f positive dans $[a, b]$ et $0 < a < b$. La situation est illustrée en figure 1.3 dans laquelle

- ▷ la valeur de $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy$ est égale à l'aire de la surface comprise entre le graphe représentatif de f , l'axe Oy et les horizontales $y = f(a)$ et $y = f(b)$ (en bleu dans la figure) ;
- ▷ la valeur de $\int_a^b f(x) dx$ est égale à l'aire de la surface comprise entre le graphe de f , l'axe Ox et les verticales $x = a$ et $x = b$ (en orange dans la figure) ;
- ▷ l'aire du rectangle de base $[0, b]$ et de hauteur $[0, f(b)]$ est $bf(b)$ (rectangle vers dans la figure) alors que celle du rectangle de base $[0, a]$ et de hauteur $[0, f(a)]$ est $af(a)$ (rectangle en hachuré dans la figure) ;
- ▷ la différence de ces deux aires est égale à la somme des deux premières.

c) (1) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$ (2) $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$

_____ Solutions détaillées _____

- (1) En appliquant la formule au calcul de $\int_0^{\sqrt{3}/2} \arcsin(y) dy$ on a

$$f^{-1}(y) = \arcsin(y) \quad \text{et} \quad f(x) = \sin(x).$$

De plus

$$f(a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = f^{-1}(0) = \arcsin(0) = 0$$

et

$$f(b) = \sqrt{3}/2 \quad \Longleftrightarrow \quad b = \arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}/2} \arcsin(x) dx &= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \cdot 0 - \int_0^{\pi/3} \sin(x) dx \\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \cos(x) \Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

1.33 Dans toutes les solutions ci-dessous, C désigne une constante réelle quelconque.

a) $\frac{2}{3} \ln |3x - 7| + C$ b) $x + 3 \ln |x + 2| + C$ c) $x^2 + x + 4 \ln |x - 3| + C$

———— Solutions détaillées ————

a) $\int \frac{2}{3x-7} dx = \frac{2}{3} \int \frac{3}{3x-7} dx = \frac{2}{3} \ln |3x-7| + C, C \in \mathbb{R}$

b) $\int \frac{x+5}{x+2} dx = \int \frac{x+2+3}{x+2} dx = \int \left(1 + \frac{3}{x+2}\right) dx = x + 3 \ln |x+2| + C, C \in \mathbb{R}$

c) On divise le numérateur par le dénominateur ce qui permet de réécrire la fonction rationnelle sous la forme

$$\frac{2x^2 - 5x + 1}{x - 3} = 2x + 1 + \frac{4}{x - 3}$$

avant d'intégrer chaque terme à droite pour obtenir

$$\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x - 3} dx = \int \left(2x + 1 + \frac{4}{x - 3}\right) dx = x^2 + x + 4 \ln |x - 3| + C, C \in \mathbb{R}.$$

1.34 Dans toutes les solutions ci-dessous, C désigne une constante réelle quelconque.

a) $2 \ln |x - 2| - \ln |x - 1| + C$ c) $\frac{x^2}{2} + x - \ln |x| + C$
 b) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$ d) $\frac{1}{2} \ln |2x - 1| + \frac{2}{5} \ln |5x + 2| + C$

———— Solutions détaillées ————

a) Pour intégrer la fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$:

1. On factorise le dénominateur : $D(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$

2. On décompose la fonction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 1} = \frac{A(x - 1) + B(x - 2)}{(x - 2)(x - 1)}$$

Pour déterminer A et B on identifie les numérateurs : $x = A(x - 1) + B(x - 2)$:

▷ pour $x = 2$ on a $2 = A$,

▷ pour $x = 1$ on a $1 = -B$.

La décomposition de $f(x)$ est donc $\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2}{x - 2} - \frac{1}{x - 1}$.

3. On intègre finalement chaque élément simple :

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2}dx = \int \frac{2}{x-2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx \\ &= 2 \ln |x-2| - \ln |x-1| + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

b) Soit la fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{1}{x^2 - 1}$.

1. Factorisation du dénominateur : $D(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

2. Décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)}.$$

3. Identification des numérateurs : $1 = A(x+1) + B(x-1)$

Pour $x = 1$ on a $1 = 2A$ et $A = \frac{1}{2}$, pour $x = -1$ on a $1 = -2B$ et $B = -\frac{1}{2}$.

4. Intégration des éléments simples :

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+1| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

c) Pour intégrer la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x}$$

on commence par faire une division puisque le numérateur a un degré supérieur à celui du dénominateur.

1. Division de $N(x)$ par $D(x)$:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} = x + 1 - \frac{x-2}{x^2 - 2x} = x + 1 - \frac{1}{x}$$

2. Intégration :

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{x^3 - x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x}dx = \int \left(x + 1 - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

d) Soit la fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{9x}{10x^2 - x - 2}$.

1. Factorisation du dénominateur : $D(x) = 10x^2 - x - 2 = (2x-1)(5x+2)$.

2. Décomposition en éléments simples :

$$\frac{9x}{(2x-1)(5x+2)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{5x+2} = \frac{A(5x+2) + B(2x-1)}{(2x-1)(5x+2)}.$$

3. Identification des numérateurs : $9x = A(5x+2) + B(2x-1)$

Pour $x = \frac{1}{2}$ on a $\frac{9}{2} = \frac{9}{2}A$ et $A = 1$, pour $x = -\frac{2}{5}$ on a $-\frac{18}{5} = -\frac{9}{5}B$ et $B = 2$.

4. Intégration des éléments simples :

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{9x}{10x^2 - x - 2} dx = \int \frac{dx}{2x-1} + 2 \int \frac{dx}{5x+2} \\ &= \frac{1}{2} \ln |2x-1| + \frac{2}{5} \ln |5x+2| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.35 Dans toutes les solutions ci-dessous, C désigne une constante réelle quelconque.

a) $2 \ln |x-1| - \frac{9}{x-1} + C$ b) $\frac{1}{4} \ln |2x-5| - \frac{7}{4(2x-5)} + C$

_____ Solutions détaillées _____

a) Soit la fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{2x+7}{(x-1)^2}$.

1. Le dénominateur est déjà factorisé. Il possède une racine réelle double.

2. Réécriture du numérateur, afin de faire apparaître un multiple de $(x-1)$:

$$2x+7 = 2(x-1) + 9.$$

3. Décomposition en éléments simples :

$$f(x) = \frac{2x+7}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)+9}{(x-1)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{9}{(x-1)^2}.$$

4. Intégration des éléments simples :

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{2x+7}{(x-1)^2} dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{9}{(x-1)^2} dx \\ &= 2 \ln |x-1| - \frac{9}{x-1} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Soit la fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x+1}{4x^2-20x+25}$.

1. Factorisation du dénominateur : $D(x) = 4x^2 - 20x + 25 = (2x-5)^2$.

2. Réécriture du numérateur, afin de faire apparaître un multiple de $(2x-5)$:

$$x+1 = \frac{1}{2}(2x-5) + \frac{7}{2}.$$

3. Décomposition en éléments simples :

$$f(x) = \frac{x+1}{4x^2-20x+25} = \frac{\frac{1}{2}(2x-5) + \frac{7}{2}}{(2x-5)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-5} + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{(2x-5)^2}.$$

4. Intégration des éléments simples :

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{x+1}{4x^2-20x+25}dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2x-5}dx + \frac{7}{2} \int \frac{1}{(2x-5)^2}dx \\ &= \frac{1}{4} \ln |2x-5| - \frac{7}{4(2x-5)} + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

1.36 Dans toutes les solutions ci-dessous, C désigne une constante réelle quelconque.

- a) $\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{2x}{3}\right) + C$ d) $\frac{1}{2} \ln(x^2+9) - \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C$
- b) $\ln(x^2+4) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$ e) $\frac{7}{10} \ln(5x^2+6) - \sqrt{\frac{2}{15}} \arctan\left(\sqrt{\frac{5}{6}}x\right) + C$
- c) $-3 \ln(x^2-x+2) + C$ f) $-\frac{3 \ln(4x^2-4x+2)}{8} - \frac{\arctan(2x-1)}{4} + C$

_____ Solutions détaillées _____

- a) Soit la fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{2}{4x^2+9}$.

1. Le dénominateur est irréductible sur $\mathbb{R}$.
2. Réécriture du dénominateur sous la forme $\lambda(u^2+1)$:

$$4x^2+9 = 9 \left(\frac{4x^2}{9} + 1 \right) = 9 \left(\left(\frac{2x}{3} \right)^2 + 1 \right).$$

La fonction à intégrer s'écrit alors :

$$f(x) = \frac{2}{4x^2+9} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2x}{3}\right)^2 + 1}.$$

3. Intégration de l'élément simple :

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{2}{4x^2+9}dx = \frac{2}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{2x}{3}\right)^2 + 1}dx = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{2} \int \frac{2/3}{\left(\frac{2x}{3}\right)^2 + 1}dx \\ &= \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{2x}{3}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- b) Soit la fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{2x-1}{x^2+4}$.

1. Le dénominateur est irréductible sur $\mathbb{R}$.
2. Décomposition en éléments simples (afin de faire apparaître un multiple de la dérivée du dénominateur comme premier élément du numérateur) :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2+4} = \frac{2x}{x^2+4} - \frac{1}{x^2+4} = \frac{2x}{x^2+4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1}$$

3. Intégration des éléments simples :

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{2x-1}{x^2+4}dx = \int \frac{2x}{x^2+4}dx - \frac{1}{2} \int \frac{1/2}{(\frac{x}{2})^2+1}dx \\ &= \ln(x^2+4) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

c) Soit la fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{3-6x}{x^2-x+2}$.

1. Le dénominateur est irréductible sur $\mathbb{R}$ (son discriminant est égal à -7).
2. Décomposition en éléments simples (afin de faire apparaître un multiple de la dérivée du dénominateur comme premier élément du numérateur) :

$$f(x) = \frac{3-6x}{x^2-x+2} = \frac{-3(2x-1)}{x^2-x+2} = -3 \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+2}.$$

REMARQUE. Ici il n'y a qu'un seul élément simple car le numérateur est un multiple de la dérivée du dénominateur. La fonction à intégrer est de la forme $f(x) = \lambda \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$.

3. Intégration de l'élément simple :

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{3-6x}{x^2-x+2}dx = -3 \int \frac{2x-1}{x^2-x+2}dx \\ &= -3 \ln(x^2-x+2) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

d) Soit la fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^2-1}{x^3+x^2+9x+9}$.

1. On factorise le numérateur et le dénominateur puis on réduit la fraction :

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+x^2+9x+9} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{x-1}{x^2+9}$$

2. Le dénominateur est irréductible sur $\mathbb{R}$.
3. Décomposition en éléments simples (afin de faire apparaître un multiple de la dérivée du dénominateur comme premier élément du numérateur) :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+9} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2x-1}{x^2+9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+9} - \frac{1}{x^2+9}.$$

4. Intégration des éléments simples :

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{x-1}{x^2+9}dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+9}dx - \frac{1}{3} \int \frac{1/3}{(\frac{x}{3})^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+9) - \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

e) Soit la fonction rationnelle $f(x) = \frac{7x-2}{5x^2+6}$.

1. Le dénominateur $5x^2+6$ est irréductible sur $\mathbb{R}$.
2. Décomposition en éléments simples : On réécrit le numérateur afin de faire apparaître un multiple de la dérivée du dénominateur comme premier élément du numérateur :

$$\frac{7x-2}{5x^2+6} = \frac{7x}{5x^2+6} - \frac{2}{5x^2+6} = \frac{7}{10} \cdot \frac{10x}{5x^2+6} - \frac{2}{5x^2+6}.$$

3. On réécrit le dénominateur du 2^e élément sous la forme $\lambda(x^2+1)$:

$$\frac{2}{5x^2+6} = \frac{2}{6\left(\frac{5x^2}{6}+1\right)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{5}{6}}x\right)^2+1}.$$

4. On intègre les éléments simples :

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-2}{5x^2+6} dx &= \frac{7}{10} \int \frac{10x}{5x^2+6} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{5}{6}}x\right)^2+1} dx \\ &= \frac{7}{10} \ln(5x^2+6) - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{6}{5}} \int \frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{\left(\sqrt{\frac{5}{6}}x\right)^2+1} dx \\ &= \frac{7}{10} \ln(5x^2+6) - \sqrt{\frac{2}{15}} \arctan\left(\sqrt{\frac{5}{6}}x\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

f) Soit la fonction rationnelle $f(x) = \frac{1-3x}{4x^2-4x+2}$.

1. Le dénominateur $4x^2-4x+2$ est irréductible sur $\mathbb{R}$ (son discriminant est égal à -16).
2. Décomposition en éléments simples : On réécrit le numérateur afin de faire apparaître un multiple de la dérivée du dénominateur (égale à $8x-4$) comme premier élément du numérateur :

$$\frac{1-3x}{4x^2-4x+2} = \frac{-\frac{3}{8}(8x-4) - \frac{1}{2}}{4x^2-4x+2} = -\frac{3}{8} \cdot \frac{8x-4}{4x^2-4x+2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4x^2-4x+2}.$$

3. On réécrit le dénominateur du 2^e élément sous la forme $\lambda(u^2+1)$ en complétant le carré :

$$\frac{1}{4x^2-4x+2} = \frac{1}{(2x-1)^2+1}.$$

4. On intègre les éléments simples :

$$\begin{aligned} \int \frac{1-3x}{4x^2-4x+2} dx &= -\frac{3}{8} \int \frac{8x-4}{4x^2-4x+2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(2x-1)^2+1} dx \\ &= -\frac{3}{8} \ln(4x^2-4x+2) - \frac{1}{4} \arctan(2x-1) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.37

- a) 10
b) diverge vers $-\infty$
c) $\ln(6/5)$
d) diverge
- e) $1/8$
f) 4π
g) diverge vers $+\infty$
h) 1

- 1.38** a) $3/2$ e) $1/\ln(2)$
b) diverge vers $+\infty$ f) diverge
c) 4 g) 0
d) π h) diverge

- 1.39** a) L'intégrale diverge vers $+\infty$ car, pour $0 < x \leq \pi/2$ on a

$$0 < \sin(x) \leq x \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sin(x)} \geq \frac{1}{x} > 0$$

et $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x} dx$ diverge vers $+\infty$.

- b) L'intégrale converge car, pour tout $x \geq 1$ on a $x^2 \geq x$ ou encore $-x^2 \leq -x$. De plus l'exponentielle étant une fonction croissante (et positive) on a

$$-x^2 < -x \quad \Leftrightarrow \quad 0 < e^{-x^2} < e^{-x}.$$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge, l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge aussi.

REMARQUE. En fait on peut montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- c) L'intégrale diverge vers $+\infty$ car, pour tout $x \geq 1$ on a

$$e^{-x} \geq 0 \quad \text{et donc} \quad \frac{1+e^{-x}}{x} \geq \frac{1}{x} > 0$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge vers $+\infty$.

- 1.40** a) On a $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$ et on peut effectuer une intégration par parties en posant

$$u = t^x \quad \text{et} \quad dv = e^{-t} dt$$

ce qui nous donne

$$dy = xt^{x-1}dt \quad \text{et} \quad v = -e^{-t}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \lim_{s \rightarrow +\infty} -t^x e^{-t} \Big|_0^s + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= \underbrace{\lim_{s \rightarrow +\infty} -s^x e^{-s}}_{=0} + 0 + x \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt}_{=\Gamma(x)} = x\Gamma(x).\end{aligned}$$

b) Pour $x = 1$ on a

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^s e^{-t} dt \\ &= \lim_{s \rightarrow +\infty} -e^{-t} \Big|_0^s = \lim_{s \rightarrow +\infty} -e^{-s} + 1 = 1\end{aligned}$$

c) Restreinte aux entiers n strictement positifs, la fonction Gamma vérifie la relation de récurrence

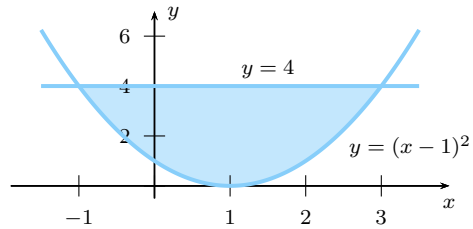
$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad n \geq 1,$$

et la condition initiale $\Gamma(1) = 1$. La solution de cette récurrence est

$$\Gamma(n) = (n-1)!, n \geq 1.$$

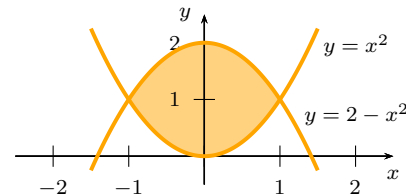
1.41 a) $A = \int_{-1}^3 (4 - (x-1)^2) dx$

$$= 2 \int_{-1}^3 (4 - (x-1)^2) dx = \frac{32}{3}$$

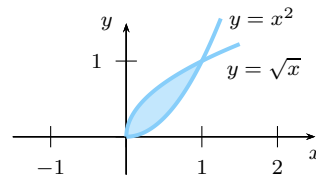


b) $A = \int_{-1}^1 2(1 - x^2) dx$

$$= 4 \int_0^1 (1 - x^2) dx = \frac{8}{3}$$

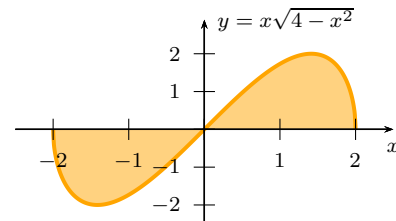


c) $A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{3}$



d) $A = \int_{-2}^2 |x| \sqrt{4 - x^2} dx$

$$= 2 \int_0^2 x \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{16}{3}$$



1.42 $A = \int_0^{\pi/4} (\cos(x) - \sin(x)) dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin(x) - \cos(x)) dx = 3\sqrt{2} - 1$

1.43 $A = \int_{-2}^4 \left(\frac{y+4}{2} - \frac{y^2}{4} \right) dy = 9$

$$1.44 \quad a) \quad V = \pi \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx = -\pi \cdot \frac{1}{x} \Big|_1^3 = -\pi \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$b) \quad V = \pi \int_0^1 \left((x^2 + 2)^2 - \left(\frac{x}{2} + 1 \right)^2 \right) dx = \pi \int_0^1 \left(x^4 + \frac{15x^2}{4} - x + 3 \right) dx = \frac{79\pi}{20}$$

$$1.45 \quad V = \pi \int_{-2}^1 \left((2-x)^2 - x^4 \right) dx = -\pi \left[\frac{(2-x)^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^1 = \frac{72\pi}{5}$$

$$1.46 \quad V = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$A = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-r}^r r dx = 4\pi r^2$$

$$1.47 \quad V = \pi \int_{r-h}^r (r^2 - x^2) dx = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$$

———— Solutions détaillées ————

Le volume V contenu dans une calotte sphérique de hauteur h découpée dans une sphère de rayon r est

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{r-h}^r \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = \pi \int_{r-h}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{r-h}^r = \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} - r^2(r-h) + \frac{(r-h)^3}{3} \right] \\ &= \frac{\pi}{3} [2r^3 - 3r^3 + 3r^2h + r^3 - 3r^2h + 3rh^2 - h^3] \\ &= \frac{\pi}{3} [3rh^2 - h^3] = \frac{\pi h^2}{3} (3r - h). \end{aligned}$$

La formule est valable pour $0 \leq h \leq 2r$.

$$1.48 \quad D = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} dx = \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$$

$$1.49 \quad V = \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi \text{ et } A = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3} dx \rightarrow +\infty$$

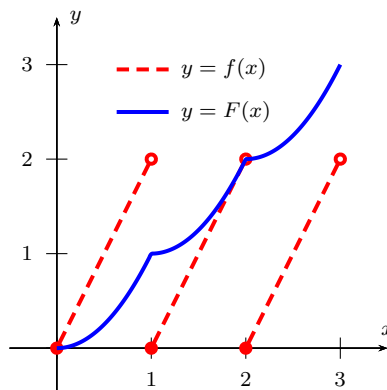
1.50 a) On a

$$\int_I f(x) dx = \int_{-2}^1 (8 - x^3) dx = \left[8x - \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^1 = \left(8 - \frac{1}{4} \right) - \left(-16 - \frac{16}{4} \right) = \frac{111}{4}$$

et la valeur moyenne de $f(x) = 8 - x^3$ sur $I = [-2, 1]$ est $f_{\text{moy}} = \frac{111/4}{3} = \frac{37}{4}$.

b) La valeur moyenne de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+1}}$ sur $I = [6, 12]$ est $f_{\text{moy}} = \frac{1}{6}$.

1.51 a) Le graphe de $f(x)$ est représenté en traitillé rouge et celui de $F(x)$ en trait plein bleu ci-dessous.



b) $F(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$

1.52 En posant $x = 3 \tan(t)$ on obtient

$$dx = 3(1 + \tan^2(t)) dt$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dx}{(9+x^2)^2} &= \frac{3(1+\tan^2(t))}{(9+9\tan^2(t))^2} dt = \frac{3}{9^2} \cdot \frac{1+\tan^2(t)}{(1+\tan^2(t))^2} dt \\ &= \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{1+\tan^2(t)} dt = \frac{1}{27} \cos^2(t) dt \end{aligned}$$

la dernière égalité étant basée sur l'identité $1 + \tan^2(t) = 1/\cos^2(t)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(9+x^2)^2} &= \int \frac{1}{27} \cos^2(t) dt = \frac{1}{54} (t + \sin(t) \cos(t)) + C \\ &= \frac{1}{54} \left(t + \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \cos^2(t) \right) + C = \frac{1}{54} \left(t + \frac{\tan(t)}{1+\tan^2(t)} \right) + C \\ &= \frac{1}{54} \left(\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x/3}{1+(x/3)^2} \right) + C \\ &= \frac{1}{54} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{18(9+x^2)} + C \end{aligned}$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

1.53 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \left[t + \cos(t) \sin(t) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi-2}{4}$

1.54 $V = 2\pi^2 r^2 R$ et $A = 4\pi^2 r R$

1.55 La valeur de l'intégrale définie $\int_0^\pi (1 - A \sin(x))^2 dx$ est minimale lorsque $A = \frac{4}{\pi}$.

_____ Solution détaillée _____

Posons $G(A) = \int_0^\pi (1 - A \sin(x))^2 dx$. La fonction G est continue et vérifie

$$\lim_{A \rightarrow \pm\infty} G(A) = +\infty.$$

Cherchons les abscisses des points stationnaires de G (c.-à-d. les valeurs de A pour lesquelles G' s'annule) :

$$\begin{aligned} G'(A) &= \frac{dG(A)}{dA} = \frac{d}{dA} \int_0^\pi (1 - A \sin(x))^2 dx = \int_0^\pi \frac{d}{dA} (1 - A \sin(x))^2 dx \\ &= \int_0^\pi 2(1 - A \sin(x))(-\sin(x)) dx \\ &= 2 \int_0^\pi (A \sin^2(x) - \sin(x)) dx \\ &= 2 \left[\frac{A}{2} (x - \sin(x) \cos(x)) + \cos(x) \right]_0^\pi \end{aligned}$$

RAPPEL. $\int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} (x - \sin(x) \cos(x)) + C, C \in \mathbb{R}.$

Ainsi

$$\begin{aligned} G'(A) &= \frac{dG(A)}{dA} = 2 \left[\frac{A}{2} (x - \sin(x) \cos(x)) + \cos(x) \right]_0^\pi \\ &= 2 \left[\frac{A}{2} (\pi - 0) + ((-1) - (-1)) \right] \\ &= A\pi - 4. \end{aligned}$$

La fonction G possède donc un seul point stationnaire, qui est forcément un minimum global (puisque $G(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$), atteint lorsque

$$G'(A) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A\pi - 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = \frac{4}{\pi}.$$

1.56 a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}$

$$= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = 1$$

b) $\sinh'(x) = \cosh(x)$ et $\cosh'(x) = \sinh(x)$

c) Rappelons que pour deux fonctions réciproques f et f^{-1} on a

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Pour $f = \sinh$ et $f^{-1} = \operatorname{arsinh}$ on obtient

$$[\operatorname{arsinh}(x)]' = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))}.$$

De l'identité $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ on tire $\cosh(x) = \sqrt{\sinh^2(x) + 1}$ et la dérivée de la fonction argument sinus hyperbolique est

$$[\operatorname{arsinh}(x)]' = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(\operatorname{arsinh}(x)) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

d) $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

- e) Pour calculer une primitive de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ on commence par faire une intégration par parties en posant

$$u = f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ et } dv = dx \text{ d'où on tire } du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \text{ et } v = x.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + 1} dx &= x\sqrt{x^2 + 1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \\ &= x\sqrt{x^2 + 1} - \int \sqrt{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 + 1} + \operatorname{arsinh}(x)) + C \\ &= \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 + 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- 1.57** a) Le théorème fondamental de l'analyse donne immédiatement que

$$G'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \sin^2(t) dt = \sin^2(x).$$

- b) Les cinq premières dérivées de $f(x)$ ainsi que les valeurs, en 0, de la fonction et de ses dérivées sont

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x \sin^2(t) dt & \text{et} & \quad G(0) = \int_0^0 \sin^2(t) dt = 0 \\ G'(x) &= \sin^2(x) & \text{et} & \quad G'(0) = \sin^2(0) = 0 \\ G''(x) &= 2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x) & \text{et} & \quad G''(0) = \sin(0) = 0 \\ G'''(x) &= 2 \cos(2x) & \text{et} & \quad G'''(0) = 2 \cos(0) = 2 \\ G^{(4)}(x) &= -4 \sin(2x) & \text{et} & \quad G^{(4)}(0) = -4 \sin(0) = 0 \\ G^{(5)}(x) &= -8 \cos(2x) & \text{et} & \quad G^{(5)}(0) = -8 \cos(0) = -8. \end{aligned}$$

Ainsi le développement limité d'ordre de 5 de G au voisinage de 0 est le polynôme

$$T_5(x) = \sum_{k=0}^5 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{2}{3!} x^3 - \frac{8}{5!} x^5 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{15}.$$

- 1.58** Dans toutes les solutions ci-dessous, C désigne une constante réelle quelconque.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)} dx &= \ln \left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right| + C \\ \text{b) } \int \frac{1}{x^2-4x+7} dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{x-2}{\sqrt{3}} \right) + C \\ \text{c) } \int \frac{2x+3}{x^2-4x+7} dx &= \ln(x^2-4x+7) + \frac{7}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{x-2}{\sqrt{3}} \right) + C \end{aligned}$$

$$d) \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = 2 \left(\sqrt{x+4} + \ln \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| \right) + C$$

$$e) \int \frac{(4x-1)dx}{2x^2-2x-12} = \frac{11}{10} \ln|x-3| + \frac{9}{10} \ln|x+2| + C$$

$$f) \int \frac{x-1}{x(\sqrt{x}-1)} dx = 2\sqrt{x} + \ln(x) + C$$

$$1.59 \quad a) \int_{-1}^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx = \ln(e^x+1) \Big|_{-1}^1 = 1$$

$$b) \int_1^e x^2 \ln(x) dx = \left[\frac{x^3}{9} (3 \ln(x) - 1) \right]_1^e = \frac{1+2e^3}{9}$$

$$c) \int_0^1 \arctan(\sqrt{x}) dx = \left[(x+1) \arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$d) \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{4-x^2} dx = \frac{1}{4} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} \right) dx = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2+x}{2-x} \right) \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{5}{3} \right)$$

$$e) \int_e^{+\infty} \frac{x}{\ln^2(x)} dx \text{ diverge vers } +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln^2(x)} \rightarrow +\infty$$

$$f) \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1+\cos^2(t)}{t} dt \text{ diverge vers } +\infty \left(\frac{1+\cos^2(t)}{t} \geq \frac{1}{t} > 0 \text{ pour } t \geq \pi \right)$$

1.60 Dans toutes les solutions ci-dessous, C désigne une constante réelle quelconque.

$$a) \frac{1}{2} (\ln|x+1| - 2 \ln|x+2| + \ln|x+3|) + C \quad b) \ln|x| - \frac{2}{x-1} + C$$

_____ Solutions détaillées _____

$$a) \text{ Soit la fonction rationnelle } f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

1. Le dénominateur est déjà factorisée et possède 3 racines réelles distinctes.

2. Décomposition en éléments simples : On cherche une décomposition de la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \\ &= \frac{A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \end{aligned}$$

3. Identification des num. : $1 = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$

$$\triangleright \text{ Pour } x = -1 \text{ on a } 1 = 2A \text{ et } A = \frac{1}{2}.$$

$$\triangleright \text{ Pour } x = -2 \text{ on a } 1 = -B \text{ et } B = -1.$$

▷ Pour $x = -3$ on a $1 = 2C$ et $C = \frac{1}{2}$.

La décomposition de $f(x)$ est donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{1/2}{x+1} + \frac{-1}{x+2} + \frac{1/2}{x+3} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - 2 \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right)\end{aligned}$$

4. Intégration des éléments simples :

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{x+1}dx - 2 \int \frac{1}{x+2}dx + \int \frac{1}{x+3}dx \right) \\ &= \frac{1}{2} (\ln|x+1| - 2\ln|x+2| + \ln|x+3|) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

b) Soit la fonction rationnelle $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}$.

1. Le numérateur est irréductible sur $\mathbb{R}$ et la factorisation du dénominateur est

$$D(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2.$$

Le numérateur et le dénominateur ne partagent aucune racine ou facteur irréductible. Il n'y a donc aucune simplification possible et la fraction est réduite.

2. Décomposition en éléments simples : On cherche une décomposition de la forme

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x} = \frac{x^2+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \\ &= \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} = \frac{A(x^2-2x+1) + B(x^2-x) + Cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A}{x(x-1)^2}\end{aligned}$$

3. Identification des numérateurs. : $x^2+1 = (A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A$.

On doit avoir

$$\begin{cases} A+B &= 1 \\ -2A-B+C &= 0 \\ A &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= 1 \\ B &= 0 \\ C &= 2 \end{cases}$$

4. Décomposition en éléments simples finale :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x} = \frac{x^2+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

5. Intégration des éléments simples :

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx = \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ &= \ln|x| - \frac{2}{x-1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

1.61 Dans toutes les solutions ci-dessous, C désigne une constante réelle quelconque.

a) $\frac{2}{35}\sqrt{x}(5x^3 + 21x^2 + 35x + 35) + C$ d) $x \tan(x) + \ln|\cos(x)| + C$

b) $\frac{e^x}{5}(\cos(2x) + 2\sin(2x)) + C$ e) $-\frac{2x+3}{8(6x-5)^3} + C$

c) $-\frac{\ln(x)+1}{x} + C$ f) $\cos(x) + \ln(1 - \cos(x)) + C$