

Calcul intégral : Corrigé des exercices supplémentaires

Exercice 1

a) On décompose l'intégrale en deux pour obtenir

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 e^{(|x| - \lfloor x \rfloor)} dx &= \int_{-1}^0 e^{(|x| - \lfloor x \rfloor)} dx + \int_0^1 e^{(|x| - \lfloor x \rfloor)} dx = \int_{-1}^0 e^{(-x - (-1))} dx + \int_0^1 e^{(x - 0)} dx \\ &= \int_{-1}^0 e^{1-x} dx + \int_0^1 e^x dx = -e^{1-x} \Big|_{-1}^0 + e^x \Big|_0^1 = -(e^1 - e^2) + e^1 - e^0 = \underline{\underline{e^2 - 1}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 3 \cos \left(2t - \frac{\pi}{6} \right) dt &= \frac{3}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \underbrace{2 \cos \left(2t - \frac{\pi}{6} \right)}_{\sin(2t - \frac{\pi}{6})'} dt = \frac{3}{2} \sin \left(2t - \frac{\pi}{6} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{3}{2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) - \sin \left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \\ &= \frac{3}{2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{6} \right) - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - (-1) \right) = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } \int_0^{-1} \frac{1+2u}{2u-1} du &= \int_0^{-1} \frac{2u+1}{2u-1} du = \int_0^{-1} \frac{2u - \textcolor{blue}{1} + \textcolor{blue}{1} + 1}{2u-1} du = \int_0^{-1} \left(1 + \frac{2}{2u-1} \right) du \\ &= \left[u + \ln |2u-1| \right]_0^{-1} = (-1 + \ln |-3|) - (0 + \ln |-1|) = \underline{\underline{\ln(3) - 1}}.\end{aligned}$$

Exercice 2

$$\begin{aligned}\text{a) } \int \frac{\sqrt{x}-1}{x^2} dx &= \int \left(x^{-3/2} - x^{-2} \right) dx = -2x^{-1/2} + x^{-1} + C \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}}}} + C = \underline{\underline{\frac{1-2\sqrt{x}}{x}}} + C, \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

b) On a

$$(\cos(\ln(x^2)))' = -\sin(\ln(x^2)) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = -2 \cdot \frac{\sin(\ln(x^2))}{x}$$

et

$$\int \frac{\sin(\ln(x^2))}{x} dx = \underline{\underline{-\frac{1}{2} \cos(\ln(x^2))}} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \frac{1-2x}{2x+1} dx &= - \int \frac{2x-1}{2x+1} dx = - \int \frac{2x+1-2}{2x+1} dx = - \int \left(1 - \frac{2}{2x+1} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{2}{2x+1} - 1 \right) dx = \underline{\underline{\ln|2x+1| - x + C, \quad C \in \mathbb{R}}} \end{aligned}$$

Exercice 3

a) Pour x positif on a

$$\frac{x-1}{x(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{x(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

et

$$\underline{\underline{\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x-1}{x(\sqrt{x}-1)} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) dx = \left[2\sqrt{x} + \ln(x) \right]_{\frac{1}{2}}^2 = \dots = \underline{\underline{\sqrt{2} + 2\ln(2)}}}}$$

b) La fonction rationnelle à intégrer étant paire on a

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} dx.$$

La factorisation de $1-x^2$ étant $(1-x)(1+x)$ on cherche une décomposition en éléments simples de la forme

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A(1+x) + B(1-x)}{1-x^2}.$$

On identifie les numérateurs : Pour $x = 1$ on obtient $2A = 1$ est $A = 1/2$ alors que pour $x = -1$ on obtient $2B = 1$ et $B = 1/2$. La décomposition en éléments simples est

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$$

et la valeur de l'intégrale définie est

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} dx}} &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x} dx \\ &= -\ln(1-x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \ln(1+x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(1) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln(1) \\ &= \ln(2) + \ln(3) - \ln(2) = \underline{\underline{\ln(3)}}. \end{aligned}$$

Exercice 4

a) On fait deux intégrations par parties pour obtenir finalement

$$\underline{\underline{\int e^{2x} \sin(x) dx = \frac{e^{2x}}{5} (2 \sin(x) - \cos(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}}}}$$

- b) Le dénominateur de la fonction rationnelle est irréductible sur $\mathbb{R}$. On commence par réécrire le numérateur afin de faire apparaître la dérivée du dénominateur, on décompose ensuite la fonction à intégrer en deux et on reconstitue le carré pour intégrer le deuxième terme :

$$\begin{aligned}\int \frac{2-x}{x^2+4x+5} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx + \int \frac{4}{x^2+4x+5} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5) + 4 \int \frac{1}{(x+2)^2+1} dx \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5) + 4 \arctan(x+2) + C, \quad C \in \mathbb{R}}}\end{aligned}$$

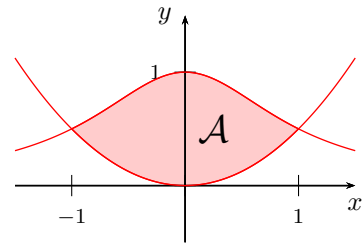
c) $\int \frac{dx}{e^{3x-2}} = \int e^{2-3x} dx = -\frac{1}{3} \int -3e^{2-3x} dx = \underline{\underline{-\frac{1}{3} e^{2-3x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

d) $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = -2 \int \frac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx = -2 \int (\cos(\sqrt{x}))' dx = \underline{\underline{-2 \cos(\sqrt{x}) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Exercice 5

Commençons par chercher les abscisses des intersections des deux courbes :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2} &= \frac{1}{1+x^2} &\iff x^2(1+x^2) &= 2 \\ &&\iff x^4 + x^2 - 2 &= 0 \\ &&\iff (x^2+2)(x^2-1) &= 0 \\ &\iff x = \pm 1 & \quad (x^2+2 \text{ n'est jamais nul})\end{aligned}$$



Pour x entre -1 et 1 , $1/(1+x^2)$ est supérieur à $x^2/2$ et l'aire $\mathcal{A}$ cherchée est égale à

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx \quad (\text{par parité}) \\ &= 2 \left[\arctan(x) - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = 2 \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} - (0-0) \right] = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}}}.\end{aligned}$$

Exercice 6

On a d'une part

$$f(x) = 1 \iff 1 + \frac{x}{2} = 1 \iff x = 0 \quad \text{avec} \quad f(x) \geq 1 \text{ si } x \geq 0,$$

et d'autre part

$$g(x) = 1 \iff \frac{4}{x} = 1 \iff x = 4 \quad \text{avec} \quad g(x) \geq 1 \text{ si } 0 < x \leq 4.$$

De plus

$$f(x) = g(x) \iff 1 + \frac{x}{2} = \frac{4}{x} \iff x^2 + 2x - 8 = 0 \iff (x+4)(x-2) = 0$$

et $g(x) \geq f(x) \geq 1$ pour $0 < x \leq 2$ alors que $f(x) \geq g(x) \geq 1$ pour $2 \leq x \leq 4$.

Ainsi, l'aire $\mathcal{A}$ est bornée supérieurement par $f(x)$ entre 0 et 2 et par $g(x)$ entre 2 et 4 et vaut

$$\mathcal{A} = \int_0^4 (h(x) - 1) dx = \int_0^2 (f(x) - 1) dx + \int_2^4 (g(x) - 1) dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x}{2} dx + \int_2^4 \left(\frac{4}{x} - 1 \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^2 + \left[4 \ln(x) - x \right]_2^4$$

$$= (1 - 0) + (4 \ln(4) - 4 - (4 \ln(2) - 2))$$

$$= \underline{\underline{4 \ln(2) - 1.}}$$

