
Calcul intégral : Corrigé des exercices de révision

Exercice 1

a) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \arctan(e^x) + C, C \in \mathbb{R}$

COMMENTAIRE. Si on pose $t = e^x$ on obtient $dt = e^x dx$ et $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{1}{1+t^2} dt$.

b) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx = \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C, C \in \mathbb{R}$

COMMENTAIRE. La fonction à intégrer est de la forme $f'(x)/f(x)$ pour $f(x) = 1+e^{2x}$.

c) $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^3} dx = -\frac{1}{2(1+e^x)^2} + C, C \in \mathbb{R}$

COMMENTAIRE. La fonction à intégrer est de la forme $f(x)^{-3} \cdot f'(x)$ pour $f(x) = 1+e^x$.

d) $\int \sqrt{\sin(t)} \cos(t) dt = \frac{2}{3} \sqrt{\sin^3(t)} + C, C \in \mathbb{R}$

COMMENTAIRE. La fonction à intégrer est de la forme $f(x)^{1/2} \cdot f'(x)$ pour $f(x) = \sin(x)$.

e) $\int \frac{\tan(t)}{\cos^3(t)} dt = \int \frac{\sin(t)}{\cos^4(t)} dt = \frac{1}{3 \cos^3(t)} + C, C \in \mathbb{R}$

f) $\int \frac{\tan^2(t)}{\cos^2(t)} dt = \frac{\tan^3(t)}{3} + C, C \in \mathbb{R}$

g) $\int \frac{\ln^5(x)}{x} dx = \frac{\ln^6(x)}{6} + C, C \in \mathbb{R}$

h) $\int \frac{\ln(x)}{x^5} dx = -\frac{4 \ln(x) + 1}{16x^4} + C, C \in \mathbb{R}$

COMMENTAIRE. On intègre par parties en posant $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = 1/x^5$.

i) $\int \ln(x^2+1) dx = x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \arctan(x) + C, C \in \mathbb{R}$

COMMENTAIRE. On intègre par parties en posant $u = \ln(x^2+1)$ et $dv = dx$.

Exercice 2

a) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + C, C \in \mathbb{R}$

COMMENTAIRE. On peut réécrire la fonction : $\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

On peut aussi poser $x = t^2 - 1$ ($t \geq 0$) pour obtenir $dx = 2t dt$ et $\sqrt{x+1} = t$. On peut aussi faire une intégration par parties en posant $u = x$ et $dv = dx/\sqrt{x+1}$.

b) $\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}} dx = \sqrt{x^2+8x} + C, C \in \mathbb{R}$

COMMENTAIRE. La fonction à intégrer est de la forme $f(x)^{-1/2} \cdot f'(x)$ pour $f(x) = x^2 + 8x$.

c) $\int \frac{1}{x^2-2x+2} dx = \int \frac{1}{(x^2-2x+1)+1} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+1} dx = \arctan(x-1) + C, C \in \mathbb{R}$

d) $\int \frac{x-2}{x^2-2x+2} dx = \int \frac{(x-1)-1}{(x-1)^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+1) - \arctan(x-1) + C, C \in \mathbb{R}$

e) $\int \frac{2x}{x^2-4} dx = \ln|x^2-4| + C, C \in \mathbb{R}$

f) $\int \frac{1}{x^2-4} dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C, C \in \mathbb{R}$

COMMENTAIRE. On décompose en éléments simples : $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right)$.

Exercice 3

- a) Plusieurs options sont possibles pour intégrer la fraction. On peut la séparer en deux et remplacer $\tan(x)$ par $\sin(x)/\cos(x)$ par exemple. Mais le plus simple est de remarquer que le numérateur n'est rien d'autre que la dérivée du dénominateur. Ainsi

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2(x)}{\tan(x)} dx = \ln(\tan(x)) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln(\sqrt{3}) - \ln(1/\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \ln(3) - \left(-\frac{1}{2}\right) \ln(3) = \ln(3).$$

- b) Cette fois la fonction à intégrer est de la forme $f(x)^{(1/2)} \cdot f'(x)$ pour $f(x) = \arctan(x)$. Afin de gérer la borne supérieure infinie on calcule premièrement

$$I(t) = \int_0^t \frac{\sqrt{\arctan(x)}}{1+x^2} dx = \frac{2}{3} (\arctan(x))^{\frac{3}{2}} \Big|_0^t = \frac{2}{3} (\arctan(t))^{\frac{3}{2}}.$$

Puis

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\arctan(x)}}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} (\arctan(t))^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi^{3/2}}{3\sqrt{2}}.$$

Exercice 4

- ▷ Les abscisses des intersections entre les graphes représentatifs des deux fonctions sont $x = 1$ et $x = e$ car

$$\ln(x) = \ln^2(x) \iff \ln(x)(\ln(x) - 1) = 0 \iff \ln(x) = 0 \text{ ou } \ln(x) = 1 \iff x = 1 \text{ ou } x = e.$$

- ▷ Pour x entre 1 et e , $\ln(x)$ varie entre 0 et 1 et on a $\ln(x) \geq \ln^2(x)$ alors que pour x entre e et e^2 , on a $\ln(x) \leq \ln^2(x)$.

- ▷ L'aire A est égale à

$$A = \int_1^{e^2} |\ln(x) - \ln^2(x)| dx = \int_1^e (\ln(x) - \ln^2(x)) dx + \int_e^{e^2} (\ln^2(x) - \ln(x)) dx$$

▷ Pour trouver une primitive de $\ln^2(x)$ on fait une intégration par parties en posant

$$f(x) = \ln^2(x) \quad \text{et} \quad g'(x) = 1$$

ce qui nous donne

$$f'(x) = \frac{2 \ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x.$$

On obtient alors

$$\int \ln^2(x) dx = x \ln^2(x) - \int 2 \ln(x) dx = x \ln^2(x) - 2x (\ln(x) - 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▷ Finalement,

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e (\ln(x) - \ln^2(x)) dx + \int_e^{e^2} (\ln^2(x) - \ln(x)) dx \\ &= \left[x (\ln(x) - 1) - x \ln^2(x) + 2x (\ln(x) - 1) \right]_1^e + \left[x \ln^2(x) - 2x (\ln(x) - 1) - x (\ln(x) - 1) \right]_e^{e^2} \\ &= \left[3x (\ln(x) - 1) - x \ln^2(x) \right]_1^e + \left[x \ln^2(x) - 3x (\ln(x) - 1) \right]_e^{e^2} \\ &= 3e(1 - 1) - e \cdot 1^2 - 3(0 - 1) + 1 \cdot 0^2 + e^2 \cdot 2^2 - 3e^2(2 - 1) - e \cdot 1^2 + 3e(1 - 1) \\ &= -e + 3 + 4e^2 - 3e^2 - e = e^2 - 2e + 3. \end{aligned}$$

Exercice 5

La dérivée de $f(x) = 2\sqrt{x^3} = 2x^{3/2}$ est

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{3}{2} \sqrt{x} = 3\sqrt{x}$$

et

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 9x} dx = \frac{2}{27} (1 + 9x)^{3/2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{27} (10^{3/2} - 1) = \frac{2}{27} (10\sqrt{10} - 1). \end{aligned}$$